3 9001 03363 4851

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/geometriederdyna0000unse

GEOMETRIE DER DYNAMEN.

DIE ZUSAMMENSETZUNG VON KRÄFTEN
UND VERWANDTE GEGENSTÄNDE DER GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

E. STUDY.

MIT 44 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND EINER TAFEL.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER,
1903.

UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTES, VORBEHALTEN.

531.1
S933

DEM ANDENKEN

VON

SOPHUS LIE

GEWIDMET.

Vorwort.

In der vorliegenden Schrift wird die Frage nach der constructiven Darstellung und Zusammensetzung von Dynamen, d. i. von Systemen von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, als Ausgangspunkt genommen für Untersuchungen geometrischen (und also rein theoretischen) Inhalts.

Im *ersten Abschnitt* wird gezeigt, dass die aus Lehrbüchern der Mechanik allgemein bekannten Sätze über Streckensysteme ein Glied (und zwar nicht durchaus in jeder Hinsicht das einfachste) bilden in einer Kette verwandter Constructionen, die hier zum ersten Male vollständig und mit ausgeführten Beweisen vorgelegt werden. Die verwendeten Hülfsmittel sind die der Elementargeometrie; Jeder wird der Darlegung folgen können, der mit guten Schulkenntnissen einige Uebung im geometrischen Denken verbindet, solche, wie sie etwa durch Beschäftigung mit der sogenannten synthetischen oder der darstellenden Geometrie erworben werden kann.

Der *zweite Abschnitt* bringt eine algebraische Begründung derselben Theorie. Die Abfassung ist hier etwas kürzer, besondere Kenntnisse aber werden vom Leser ebenfalls nicht verlangt. Wem die projective Geometrie in ihrer analytischen Gestalt geläufig ist, der wird gut vorbereitet sein zum Studium auch dieses Abschnittes, dessen Inhalt zum Theil wohl geradezu als eine Ergänzung zu den vorhandenen Lehrbüchern der analytischen Geometrie wird betrachtet werden können.

Der *dritte Abschnitt* behandelt hauptsächlich die linearen Systeme von Dynamen. Im Zusammenhange damit werden die Anfänge einer neuen Art von Liniengeometrie entwickelt. Den Schluss bilden Anwendungen auf Kinematik. Diese weitergehenden Untersuchungen haben auf einem verhältnissmässig engen Raum untergebracht werden müssen: Wir wenden uns mit ihnen nur an geübtere Geometer, solche, die mit den Hülfsmitteln der modernen Analysis und namentlich mit der Handhabung des Gruppenbegriffs genügend vertraut sind. Doch wird ein Theil des Vorgetragenen (z. B. § 29, §§ 36—40) wohl ebenfalls nicht schwer zugänglich sein.

Dem Verfasser sind Betrachtungen von wesentlichem Nutzen gewesen, die sich auf gewisse Operationen mit Zahlenpaaren, gewöhnlich sogenannten complexen Grössen, beziehen. Da es scheint, dass von dem Grundgedanken dieser Ueberlegungen auch ohne Eingehen auf Einzelheiten und in allgemein verständlicher Weise sich Rechenschaft geben lässt, so wollen wir dieses noch versuchen.

Andere complexe Grössen als die gemeinen können, wie bereits Gauss angedeutet hat, nur begrenzte Gebiete nützlicher Anwendung finden. Sie dienen dann, wie in der Theorie der conformen Abbildung schon die gemeinen complexen Grössen selbst, und wie (in geringerem Maasse) auch die Quaternionen, nicht zur Erweiterung irgend eines Systems geometrischer Begriffe, sondern zur Abkürzung des Calculs, zur Verschmelzung von mehreren häufig zusammen auftretenden Gleichungen in eine einzige. Diese Vortheile sind also formaler Natur, und sie mögen daher leicht gering angeschlagen werden. Die erwähnte Zusammenfassung kann aber sehr suggestiv sein: Es können dadurch Gesetzmässigkeiten hervortreten, die sonst nicht so leicht bemerkt werden würden und deren Untersuchung dann Thatsachen zum Vorschein bringt, die durchaus nicht mehr formal sind. Eben diesem Umstand hat der Verfasser z. B. die Auffindung mehrerer der im ersten Abschnitt angegebenen geometrischen Constructionen zu danken, die dann, *aber auch erst dann*, natürlich sehr wohl mit anderen Hülfsmitteln abgeleitet werden konnten.

Wir wollen nun den Fall setzen, dass ein Geometer, der nichts Besseres zu thun wüsste, auf den Gedanken verfiele, zu einer Erweiterung des Systems der ebenen und räumlichen Geometrie statt der gemeinen complexen Grössen oder Zahlenpaare deren Ausartung, nämlich die ebenfalls aus zwei Einheiten 1, ε abgeleiteten Grössen zu verwenden, deren Rechnungsregeln durch die Gleichung $\varepsilon^2 = 0$ (an Stelle von $i^2 = -1$) bezeichnet sind*). Dieser Geometer würde dann, bei gehöriger Ausgestaltung, zu einem System abstracter Begriffe kommen, das sich, wie die sogenannte Geometrie im imaginären Gebiet, auf Mannigfaltigkeiten von vier und sechs Dimensionen bezöge. An Stelle der ∞^4 oder ∞^6 imaginären Punkte würden ∞^4 und ∞^6, sagen wir „ideale Punkte“ treten. Der Operation des Verbindens zweier Punkte durch eine gerade Linie z. B. würde eine verwandte abstracte und analytisch auszuführende Operation entsprechen u. s. w.: Zahlreiche Uebereinstimmungen mit dem System der imaginären Geometrie würden

*) Man vergleiche den Artikel über complexe Grössen in der Mathematischen Encyclopädie, Nr. 9, S. 166. Oder auch Kap. X in der Theoretischen Arithmetik von Stolz und Gmeiner (Leipzig, 1902).

auftreten, aber es müssten auch nicht minder zahlreiche und dabei sehr tiefgreifende Unterschiede sich zeigen. Ein Nutzen der ganzen Betrachtung würde unmittelbar nicht zu erkennen sein; ja Mancher dürfte sie wohl so öde und steril finden wie nur möglich.

Wir glauben nun nachweisen zu können, dass der fragliche Nutzen dennoch vorhanden ist, *dass nämlich den bezeichneten Begriffssystemen eine Realität in der Erscheinungswelt entspricht.* Der fingirte Geometer würde thatsächlich zwei geometrische Disciplinen, die *Liniengeometrie* und die *Kinematik*, eine Strecke weit entwickelt haben, nicht gerade in der Richtung, in der sie bisher ausgestaltet worden sind — in diesem Falle würde seine Bemühung grösstentheils entbehrlich sein — wohl aber in einer solchen, die als eine natürliche, ja vielleicht sogar nothwendige Weiterbildung vorhandener Ansätze gelten kann. Man kann nämlich eindeutig-umkehrbar den idealen Punkten der erweiterten ebenen Geometrie die ∞^4 geraden Linien im Raume und denen der erweiterten räumlichen Geometrie die ∞^6 Lagen eines starren Körpers zuordnen. Der idealen Verbindungslinie zweier idealer Punkte wird dann im ersten Falle zugeordnet die gemeinsame Normale der entsprechenden Geraden; und im zweiten entspricht z. B. der idealen Verbindungsebene dreier idealer Punkte jene schöne von Herrn C. Stephanos gefundene Figur, nämlich die Lage des starren Körpers, aus der drei gegebene durch Umwendungen um gerade Linien hervorgehen. Das Auftreten von Grenzfällen, in denen diese Constructionen unbestimmte Ergebnisse liefern, wird in der Theorie unseres Geometers ebenfalls schon vorgemerkt sein, und er wird dafür auch die im zweiten Beispiel schon nicht mehr bekannten analytischen Kriterien zur Hand haben, sammt einer genauen Einsicht in die Art des Unbestimmtwerdens. Und manche bei anderen Untersuchungen gefundene Figuren werden sich alsbald von neuen Seiten zeigen — so das schon bei den verschiedensten Gelegenheiten zum Vorschein gekommene Cylindroid, das nun die Bedeutung eines Grundbegriffs der Liniengeometrie erhält, oder auch jene merkwürdigen Paare von Strahlencongruenzen, deren jede aus allen gemeinsamen Normalen von Strahlen der anderen besteht. Und zu diesen Figuren werden eine Fülle neuer Gestalten treten, die alle in den Formeln schon bereit liegen und nur aus der Puppenhülle der Abstraction hervorzukommen brauchen, um geometrische Eigenschaften zu offenbaren. —

Wie aus diesen noch etwas formlosen Gedanken präcise mathematische Probleme und Sätze gebildet werden können, wo und warum sodann die geschilderte Methode ihre Schranken findet, und durch welche weiter reichende Methode sie deshalb zu ergänzen ist, das muss in dem

Buche selbst nachgelesen werden. Wir haben uns dort in der Hauptsache auf die Erweiterung der ebenen Geometrie beschränkt, und zwar haben wir auch von dieser nur die projective betrachtet; denn die so entstehende Art von Liniengeometrie hat besonders einfache Beziehungen zu unserem eigentlichen Thema, der Geometrie der Dynamen, und sie unterscheidet sich darin, wie es scheint, von anderen Arten der Liniengeometrie, die demselben Process ihre Entstehung verdanken. Doch sind, in einem Anhange, die verwandten Betrachtungen über Kinematik wenigstens noch skizzirt worden. — Von der soeben geschilderten Art der Exposition sind wir in einer Hinsicht abgewichen. Wir haben nämlich nicht erst eine abstracte Theorie entwickelt, um nachträglich deren Realisirbarkeit zu zeigen, sondern wir haben den analytischen Apparat von vorn herein in organische Verbindung mit den zugehörigen Constructionen gebracht. —

Die projective Geometrie umfasst bekanntlich in gewissem Sinne, ausser der Euklidischen, auch *die Nicht-Euklidische Geometrie.* Auf diese letzte ist daher das besprochene Erweiterungsprincip ebenfalls anwendbar*). Die Uebertragung aus der Nicht-Euklidischen Geometrie bekannter Schlüsse auf die gewöhnliche Liniengeometrie und Kinematik hat für die mitgetheilten Untersuchungen eine ganz besondere Bedeutung, so dass dem Buche auch recht wohl der Nebentitel „Anwendungen der Nicht-Euklidischen Geometrie“ hätte gegeben werden können, wenn das nicht zu irrigen Annahmen über das Maass der im Ganzen vom Leser zu verlangenden Kenntnisse führen müsste. Die sämmtlichen Constructionen unseres ersten Abschnittes gehören hierher, als das werthvollste Resultat aber erscheint dem Verfasser die im Anhang vorgetragene Anwendung der Nicht-Euklidischen Geometrie auf die Kinematik. In dieser umfassenderen und wegen ihrer Beziehungen zur Erscheinungswelt besonders wichtigen Disciplin finden Untersuchungen, die von scharfsinnigen Mathematikern zu ganz anderen Zwecken angestellt worden sind, eine wohl ziemlich unerwartete und dennoch ganz unmittelbare Verwerthung. —

Nach Erscheinen der ersten Lieferung dieser Schrift ist dem Verfasser mehrfach bemerkt worden, dass die etwas ausgedehnte Terminologie das Eindringen in den bearbeiteten Gedankenkreis erschwere.

Die Grundsätze, nach denen jede mathematische Terminologie zu bilden ist, hat Gauss in den Disquisitiones circa superficies wie folgt bezeichnet:

---

*) Ein ähnliches besteht auch im Nicht-Euklidischen Raume selbst, kommt aber hier nicht in Betracht.

„Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, ut omnis ambiguitas arceatur .... Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?“

Die Worte also sind ziemlich gleichgültig, die Begriffe aber sollen deutlich umgrenzt sein, verschiedene Begriffe sollen jedenfalls dort, wo Missdeutungen nahe liegen, nicht mit denselben Worten bezeichnet werden, und das Verständniss mathematischer Sätze soll nicht besondere Interpretationskünste erfordern.

Es scheint uns, dass man sich in einigen Gebieten der Geometrie von diesen Richtlinien nicht nur ziemlich allgemein, sondern auch sehr weit entfernt hat, und dass diese Gebiete dadurch in einen höchst bedenklichen Zustand gerathen sind. Es ist das ein betrübendes Kapitel. Ein Bedürfniss nach präciser Formulirung geometrischer Sätze scheint von Vielen überhaupt nicht empfunden zu werden, und das Schlimmste ist, dass die Kritik — sobald es sich um Geometrie handelt — an vagen Behauptungen selbst dann keinen Anstoss zu nehmen pflegt, wenn sie in Lehrbüchern und massenhaft auftreten. Es gilt aber Bacon's Wort:

Citius emergit veritas ex errore quam ex confusione.

Es ist doch wohl, in der Sprache Saccheris zu reden, ein Makel am schönen Leibe der Geometrie — viel störender als der, auf den dieses Wort gemünzt war —, wenn unzähligen ihrer Sätze ein klarer Sinn überhaupt nicht zukommt. Kann man ja auch in vielen Fällen wohl errathen, was „gemeint“ ist, so werden doch in anderen nicht minder zahlreichen besondere Untersuchungen erforderlich sein. Ganze Gruppen von Behauptungen können nur als Probleme gewürdigt werden nach diesem Schema: „Wie müssen die Begriffe umgrenzt und die sonstigen Voraussetzungen gefasst werden, damit diese oder jene Classe ungefähr das Richtige treffender Sätze einen deutlichen Sinn und ausserdem einen möglichst umfangreichen Gültigkeitsbereich erhalte?“*)

Wenn einmal nicht nur Einzelne, sondern die Mehrzahl der Geometer sich zu der Ansicht entschliessen werden, dass mit der sogenannten Erledigung eines nicht einmal gehörig bezeichneten allgemeinen Falles noch nicht „alles Wesentliche“ gethan ist, und wenn dann das nöthige Reinigungswerk auch auf diesem Gebiete ernsthaft in Angriff

*) Wir denken diese Art von Ueberlegung demnächst an dem Beispiel von S. Lie's Geometrie der Kreise und Kugeln durchzuführen. Ein anderes Beispiel findet man im vorliegenden Buche behandelt.

genommen werden wird — dann wird man wohl noch öfter eine Vermehrung der zu unterscheidenden Begriffe und also auch eine Erweiterung des terminologischen Apparats nöthig finden. Denn Dank den geringen Schwierigkeiten, die die neuere Geometrie zum Theil am Anfange bietet (oder vielleicht auch nur zu bieten scheint) — einem Umstande, der leider auch die Einmischung von vielen Unberufenen veranlasst hat — ist man zu einem ungeheuren und nicht leicht zu beherrschenden Gestaltenreichthum vorgedrungen. Und dieser wird noch vermehrt werden müssen durch Ausartungen zahlreicher Figuren, die, wie in der Functionentheorie die singulären Stellen, den Charakter der verschiedenen Mannigfaltigkeiten bestimmen.

Gegenwärtig allerdings, wo noch vielfach eine — gewiss oftmals werthvolle — blosse Orientirung oder ein durch Vertuschen von Schwierigkeiten ermöglichtes Scheinverständniss als völlig genügend erachtet wird, können Versuche zu schärferer Fassung und gründlicherer Behandlung gewisser Probleme kaum auf viel Interesse und noch weniger auf Nacheiferung rechnen*). Wir haben uns gleichwohl redlich darum bemüht, durch sorgfältige Erklärung der Begriffe, durch genaue Bezeichnung der Voraussetzungen und, wo es nöthig schien, auch durch das Studium der bisher allzuoft im Dunkeln gehaltenen Grenzfälle, wirkliche Kenntniss des behandelten Stoffes zu erlangen und zu vermitteln. Dass es uns thatsächlich auch gelungen sein sollte, die bei Untersuchungen über Geometrie häufigen Selbsttäuschungen überall zu vermeiden, das sagen wir damit nicht, und wir wagen es auch nicht zu glauben. Doch wird ein Fortschritt hoffentlich zu erkennen sein. — Dass in Bezug auf die Terminologie hier und da des Guten zuviel gethan sein mag, wollen wir übrigens gerne zugeben. Zahlreich sind indessen die Kunstausdrücke jedenfalls nicht, die ohne sonderlichen Schaden hätten wegbleiben können. Das beigefügte alphabetische Inhaltsverzeichniss wird die Unbequemlichkeit wohl minder empfindlich machen. —

Möchte es uns gelungen sein, etwas zu sagen, das gesagt zu werden verdient. Und möchten Andere es der Mühe werth halten, die vorgetragenen Gedanken weiter zu entwickeln und von den Unvollkommenheiten zu befreien, deren Beseitigung wir, wie uns wohl bewusst ist, nicht ganz haben erreichen können. Zu besonderer Freude

*) Man beachte z. B. die Zufriedenheit, mit der Herr E. Kötter in seinem Referate über synthetische Geometrie (Leipzig 1901, S. 120) die üblichen Lösungen der Apollonischen Berührungsaufgabe bespricht. (Eben dieses Problem hatte der Verfasser als ein Beispiel ausgewählt, um daran das Unzulängliche gewisser herkömmlicher Methoden zu zeigen: Math. Ann. Bd. 49, 1897, S. 497—499, 539—541.)

aber würde es dem Verfasser gereichen, wenn es ihm vergönnt sein sollte, in jüngeren Fachgenossen die Ueberzeugung lebendig zu machen, dass man dem Stoffe der Geometrie noch viele neue Seiten wird abgewinnen können, und dass in der Mathematik überhaupt neben dem Studium einzelner Disciplinen, das nur allzuleicht den Charakter der Schulrichtung annehmen kann, ebensosehr eine Betrachtung des oftmals wunderbaren Zusammenhangs noth thut, den die einzelnen Forschungsgebiete unter einander haben. Wie beschränkt auch immer die Thätigkeit des Einzelnen bleiben möge, wir Alle werden den Blick auf das Ganze richten müssen, wenn das Ganze durch unsere Arbeit gefördert werden soll. —

Wo sonst verwandte Gedanken aufgetaucht sind und von welcher Seite der Verfasser bei seinem Unternehmen eine Anregung erfahren hat, das hat er, nach bestem Wissen, im Texte selbst dargelegt. (Vgl. S. 207, 208; 227, 228; 439, 440.) Hier sei dem dort Gesagten noch hinzugefügt, dass die unserem ersten Abschnitte zu Grunde liegende Uebertragung des Parallelogramms der Kräfte auf die Nicht-Euklidische Geometrie auch von Herrn A. P. Kotjelnikoff aufgefunden und, wie es scheint, ebenfalls zu weiteren Folgerungen verwerthet worden ist. Sein in russischer Sprache abgefasstes Werk (*Theorie der Vectoren, Kasan 1899*) ist nahezu gleichzeitig mit des Verfassers erster Mittheilung über diese Construction erschienen.

Einen sehr schätzbaren Beitrag zu der vorliegenden Schrift hat ein Zuhörer des Verfassers, Herr stud. W. Vogt geliefert. Die Figuren 43—45, deren zwei auf der beigegebenen Tafel vereinigt sind, und die einen besonderen Schmuck des Ganzen bilden, sind Reproductionen von solchen, die von ihm, mit dankenswerther Unterstützung des Curatoriums, für das Mathematische Seminar der Universität Greifswald gezeichnet worden sind. Auch die Figur 46 zu zeichnen hat Herr Vogt die Freundlichkeit gehabt.

Seinem Freunde Fr. Engel ist der Verfasser für das Interesse verpflichtet, mit dem er die besprochenen Untersuchungen zur Zeit ihrer Entstehung begleitet hat. Einige Ermunterung that noth angesichts der Aufnahme, die — im Grossen und Ganzen — selbst die Begriffsbildungen eines S. Lie, namentlich bei deutschen Geometern, gefunden haben.

Die Verlagsbuchhandlung hat das nicht genug zu dankende Entgegenkommen, mit dem sie alle Wünsche ihrer Autoren zu erfüllen bestrebt ist, auch dem Verfasser gegenüber an den Tag gelegt.

Greifswald, im October 1902.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Seite

Einleitung 1
§ 1. Das Linienkreuz. Die Bewegungen 4
§ 2. Collineationen und Correlationen, die mit einer Bewegung verbunden sind 12
§ 3. Die geometrische Addition der Stäbe 22
§ 4. Die geometrische Addition der Keile 30
§ 5. Fortsetzung: Formale Summen von Keilen 36
§ 6. Die lineare Superposition der Bewegungen 43
§ 7. Die geometrische Addition der Motoren 50
§ 8. Die geometrische Addition der Quirle 58
§ 9. Die correlative Superposition der Bewegungen 70
§ 10. Die geometrische Addition der Impulsoren 79
§ 11. Die stereometrische Addition der Motoren 85
§ 12. Fortsetzung dieses Gegenstandes 93
§ 13. Die stereometrische Superposition der Bewegungen 100
§ 14. Zusammenfassung. Vollständigkeit der entwickelten Theorie 108
§ 15. Dynamen und infinitesimale Bewegungen 116

Zweiter Abschnitt.

Einleitung 122
§ 16. Coordinaten. Lineare und bilineare Formen 125
§ 17. Maassfunctionen 140
§ 18. Gewinde, Vectoren, Stäbe 151
§ 19. Geometrische Summen von Stäben, Keilen und Quirlen 160
§ 20. Begleitende Stäbe, Keile und Quirle 168
§ 21. Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen 174
§ 22. Geometrische Summen von Motoren und Impulsoren 186
§ 23. Ein Uebertragungsprincip 195
§ 24. Anwendungen: Trigonometrie im Strahlenraum; Stereometrische Summen von Motoren 208
§ 25. Die stereometrische Superposition der Bewegungen 218

Dritter Abschnitt.

Einleitung 226
§ 26. Duale und radiale Projectivitäten 230
§ 27. Der Strahlenraum als Continuum 247
§ 28. Imaginäre Strahlen 283
§ 29. Classification der linearen Systeme von Gewinden 309

Seite
§ 30. Ein- und zweidimensionale Ketten 326
§ 31. Die dreidimensionalen Ketten und die regulären quadratischen Strahlencomplexe 349
§ 32. Abbildung des ersten natürlichen Strahlencontinuums auf eine Punktmannigfaltigkeit 367
§ 33. Die aplanare Kettencongruenz als Raumelement. Analogieen zwischen der Euklidischen und der radial-projectiven Geometrie 387
§ 34. Das Parallelenbüschel als Raumelement 402
§ 35. Verschiedenartige Ergänzungen 424
§ 36. Fernere Classification der linearen Systeme von Gewinden 444
§ 37. Aplanare Gewindebündel und Kettencongruenzen des ersten Typus . 461
§ 38. Fortsetzung: Einführung elliptischer Coordinaten und Functionen . . 492
§ 39. Specielle Gewindebündel und zweidimensionale Ketten 511
§ 40. Von der Beweglichkeit eines starren Körpers im Infinitesimalen . . . 535

Anhang.

Grundzüge einer neuen Methode der Kinematik 555

Verbesserungen und Zusätze 597
Alphabetisches Inhaltsverzeichniss 599

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Wo immer das Bedürfniss hervorgetreten ist, anschaulich die Regeln für die Zusammensetzung von Kräften aufzufassen, die an einem Punkte oder einem starren Körper angreifen, da hat man sich der Darstellung dieser Kräfte durch Stücke gerader Linien bedient. Man findet daher in Lehrbüchern der Mechanik einen eigentlich der Geometrie zuzurechnenden Abschnitt, der — nach der üblichen Ausdrucksweise — von der „geometrischen Addition" dieser Linientheile, oder, wie wir — nach einem Vorschlage H. Grassmann des Jüngeren — lieber sagen wollen, dieser *Stäbe* handelt*). Eine Ausnahmestellung nehmen in dieser von Poinsot und Möbius begründeten Theorie die Systeme von Kräften ein, die man als Kräftepaare zu bezeichnen pflegt, wiewohl sie nicht nothwendig gerade als Systeme von zwei Kräften gedacht werden müssen. Diese können als Grenzfälle einzelner Kräfte angesehen werden, weshalb man sie diesen auch schon unter dem Namen *Drehkräfte* angereiht hat. Sie haben einfachere Eigenschaften als Kräfte gewöhnlicher Art, die wir wohl, ohne ein Missverständniss befürchten zu müssen, jenen Drehkräften als *Zugkräfte* werden gegenüberstellen dürfen. Eine geometrische Figur nun, die sich der Figur des Stabes als Grenzfall unterordnete, und die zur Darstellung der Drehkräfte brauchbar wäre, giebt es nicht. Man muss daher verwickeltere Figuren von höherem Unbestimmtheitsgrade benutzen, die *Stäbepaare*; und diese können erst nachträglich wieder durch einfachere Gebilde ersetzt werden, die sogenannten *Vectoren*, Linienstücke, die nicht, wie die Stäbe, nur auf ihren geradlinigen Trägern, sondern überhaupt parallel zu sich selbst verschoben werden dürfen.

So ausserordentlich zweckmässig nun die besprochene Darstellung der an einem starren Körper wirkenden Kräfte durch geometrische

*) Vgl. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Aufl. Leipzig, 1879. E. Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Berlin, 1890. P. Appell, Traité de Mécanique rationelle. Paris 1893.

Figuren ohne allen Zweifel ist, und so thöricht es wäre, sie etwa durch eine andere *ersetzen* zu wollen, so liegt doch schwerlich ein zureichender Grund vor, warum man ausschliesslich nur dieses eine Mittel der Versinnlichung verwenden sollte. Allerdings wird Mancher überhaupt kein Bedürfniss nach einer zweiten Vorstellungsweise empfinden, so z. B. der Techniker, dem es auf die Leichtigkeit des Zeichnens ankommt. Indessen kann eine Erweiterung unserer Vorstellungen niemals schädlich sein, und Niemand kann im Voraus sagen, was für Folgerungen sich aus einer neuen Anschauung schliesslich werden ziehen lassen. Jedenfalls wird dem Geometer die Frage erlaubt sein, ob sich nicht vielleicht bei einer anders gearteten Beziehung von Kräften zu geometrischen Gestalten eine noch grössere Harmonie zwischen Begriff und Bild erreichen lässt, so dass die Unterordnung der Drehkräfte unter die Zugkräfte an den Figuren unmittelbar zur Erscheinung kommt.

Freilich müsste eine solche Zuordnung, die sich in mannigfacher Weise würde ersinnen lassen, noch weitere Eigenschaften haben, wenn sie auch nur ein theoretisches Interesse bieten sollte: Sie dürfte nicht allzuweit hergeholt sein und dürfte nicht zu gekünstelten Constructionen Anlass geben. Vor allem aber müsste, wie die Figur des Stabes, so auch die neue Figur mit der Kraft selbst invariant verknüpft sein, sie dürfte keine Beziehung enthalten zu einem Coordinatensystem.

Es giebt nun wirklich nicht nur ein Seitenstück zur Figur des Stabes, das diesen Anforderungen zu genügen scheint, sondern sogar deren zwei: Der Keil, die Figur zweier Ebenen, und der Quirl, die Figur eines Punktes und einer Ebene, beide können in der gewünschten Weise zur Darstellung der Zugkräfte wie der Drehkräfte benutzt werden, und ebenso auch zu deren Zusammensetzung: An Stelle des Parallelogramms der Stäbe (Kräfte) treten neue Figuren von nicht geringerer Einfachheit, das Keiltrapez (§ 4), sowie das Quirlvierflach und das Quirltrapez (§ 8), von denen die erste sogar in noch etwas weiterem Umfange anwendbar ist als das Stäbeparallelogramm.

Man kann aber noch weiter gehen.

Die der Drehkraft übergeordnete Zugkraft ist selbst wieder ein besonderer Fall des allgemeinen von sechs Constanten abhängigen Systems von Kräften, der *Dyname**). Diese Dyname wird geometrisch dargestellt durch ein vielgestaltiges Gebilde, eine sogenante *formale*

---

*) Des „Torsors“ englischer und französischer Mathematiker. Wir verwenden die ältere (auf Plücker zurückzuführende) Bezeichnung Dyname, und brauchen dann das Wort *Torsor* in einem anderen Sinne.

geometrische Summe*) von Stäben oder von Stäben und Stäbepaaren, und zwar am einfachsten durch die Summe eines Stabes und eines Stäbepaares, die beide den verschiedenen Bedürfnissen des Physikers und Geometers entsprechend durch weitere Forderungen noch näher bestimmt werden können. Wird sich nun dieser Begriff der formalen Summe, der im Grunde doch keine einheitliche Vorstellung von der Dyname giebt, nicht vermeiden lassen? *Wird man nicht auch der Dyname selbst eine geometrische Figur zuordnen können, von ähnlicher Einfachheit wie die Figur des Stabes? Und wird es dann nicht möglich sein, Dynamen in der Art constructiv zusammenzusetzen, wie man bisher Zugkräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte oder Drehkräfte zusammensetzen konnte?*

Auch diese weitergehenden Fragen lassen sich in bejahendem Sinne beantworten, und zwar wiederum auf mehrere verschiedene Arten. Wir werden drei Lösungen dieser natürlich nicht völlig bestimmten Aufgabe kennen lernen (§ 7, § 10, § 11). Die dabei zu benutzenden Figuren sind Paare gerader Linien, sie lassen also an Einfachheit wohl Nichts zu wünschen übrig; und auch die Constructionen, die die Zusammensetzung der Dynamen vermitteln, sind, wie wir zu glauben wagen, so einfach, als man es erwarten kann.

Nicht geringeres Interesse als die gemeinten Constructionen selbst haben vielleicht geometrische Sätze, die auf dem Wege zu ihnen sich darbieten, oder sich doch an sie anschliessen lassen. Wir werden namentlich dahin gelangen, den bekannten Zusammenhang zwischen Systemen von Kräften und infinitesimalen (unendlich kleinen) Bewegungen auf die Geometrie der endlichen Bewegungen auszudehnen, und zwar werden wir ebenfalls drei verschiedene Arten solchen Zusammenhanges kennen lernen (§ 6, § 9, § 13), von denen die erste und dritte als Erweiterungen des erwähnten bekannten Satzes angesehen werden können.

Der Verfasser ist zu den bezeichneten Ergebnissen ursprünglich auf dem Umwege über die *Nicht-Euklidische Geometrie* gekommen, die überhaupt (und zwar auf mehrere Arten) in ausgedehntem Maasse für die elementare wie auch für die algebraische und Differentialgeometrie des Euklidischen Raumes nutzbar gemacht werden kann. Aus methodischen Gründen, und weil wir möglichst allgemein verständlich zu sein wünschen, verwenden wir jedoch hier nur elementargeometrische Begriffe, abgesehen von einigen Zusätzen, die zum Verständniss des Ganzen nicht nöthig sind, und vom Leser überschlagen werden können.

*) Formelle Summe nach H. Grassmann; Heteraptische Summe nach E. Budde.

Wir recapituliren zunächst, in § 1, die elementarsten Sätze aus der Geometrie der Bewegung. Dieser Gegenstand wird sodann weiter behandelt in § 2, dessen Inhalt, abgesehen von den zum Theil veränderten Beweisen, einer älteren Abhandlung des Verfassers entnommen ist. In § 3 endlich stellen wir die Hauptsätze aus der Geometrie der Stäbe zusammen. Der mit diesen Dingen bekannte Leser möge diese einleitenden Paragraphen doch nicht ganz überschlagen, da in ihnen mehrere sonst nicht übliche Begriffe und Bezeichnungen erklärt werden, die weiterhin zur Verwendung kommen.

§ 1.

Das Linienkreuz. Die Bewegungen.

In der Geometrie der Bewegung schon tritt eine geometrische Figur auf, die für unsere Untersuchung eine principielle Bedeutung hat, und für die wir daher einen besonderen Namen in Vorschlag bringen, das Linienkreuz. Wir nennen *eigentliches Linienkreuz* den Inbegriff einer eigentlichen (im Endlichen verlaufenden) Geraden und der uneigentlichen (d. h. unendlich fernen) Geraden, in der sich alle zu der ersten Geraden senkrechten Ebenen durchdringen, eine Figur also, die von irgend einem Raumpunkte aus gesehen die Form eines Kreuzes mit rechtem Winkel darbietet. Die erste der beiden Geraden soll die *Hauptaxe*, die andere die *Nebenaxe* des Linienkreuzes heissen, jede eigentliche Gerade aber, die beide Axen trifft, oder also die Hauptaxe senkrecht schneidet, eine *Querlinie* des Kreuzes. Ein eigentliches Linienkreuz ist hiernach durch seine Hauptaxe allein schon bestimmt; ist dagegen nur die Nebenaxe durch ein Büschel paralleler Ebenen gegeben, so kann man die Hauptaxe noch willkürlich wählen innerhalb des Bündels der zu jenen Ebenen senkrechten Geraden. Ein solches durch seine Nebenaxe gegebenes Linienkreuz mit unbestimmter Hauptaxe soll ein *uneigentliches Linienkreuz* heissen, *Querlinie* dieses Kreuzes aber jede eigentliche Gerade, die seine Nebenaxe trifft, d. h. in einer Ebene des genannten Büschels verläuft. Ein uneigentliches Linienkreuz besteht also aus einer unbestimmten Geraden eines Parallelenbündels, verbunden mit einer bestimmten zu allen diesen Geraden orthogonalen uneigentlichen Geraden. Es hat ∞^3 Querlinien, während ein eigentliches Linienkreuz nur deren ∞^2 besitzt.

Linienkreuze, deren Hauptaxen parallel sind, oder also Linienkreuze, deren Nebenaxen zusammenfallen, sollen *parallel* genannt werden. Parallele und zugleich uneigentliche Linienkreuze sind also identisch.

Zwei Linienkreuze haben immer mindestens eine gemeinsame Quer-

linie. Sind sie eigentlich und nicht parallel, so haben sie nur eine einzige Querlinie gemein; in den übrigen Fällen, deren Beschreibung wir nicht für nöthig halten, giebt es unendlich viele gemeinsame Querlinien zweier Linienkreuze. Ferner geht durch jeden eigentlichen Punkt mindestens eine Querlinie eines gegebenen Linienkreuzes, und in jeder eigentlichen Ebene ist mindestens eine solche enthalten, ausgenommen in dem Falle, wo das Linienkreuz eigentlich und die Ebene zu dessen Hauptaxe parallel ist.

Irgend zwei von einander verschiedene eigentliche Gerade $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *bestimmen immer ein Linienkreuz (von dem sie Querlinien sind).*

Sind nämlich die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ nicht parallel, so sind sie Querlinien eines einzigen *eigentlichen* Linienkreuzes (und ausserdem eines einzigen uneigentlichen Linienkreuzes, das uns hier indessen nicht interessirt). Sind sie aber parallel, so sind sie Querlinien zunächt (von ∞^1 uneigentlichen und) von ∞^1 eigentlichen Linienkreuzen; und diese letzten sind alle (zu einander und) zu einem bestimmten *uneigentlichen* Linienkreuz parallel, dessen Nebenaxe die Schnittlinie zweier in $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf der Verbindungsebene von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ senkrecht errichteter Ebenen ist.

Nach diesen, wie man finden wird, für das Folgende nützlichen Erklärungen recapituliren wir kurz die weiterhin zu benutzenden Eigenschaften der Bewegungen.

Eine jede beliebige Bewegung (eines starren Körpers) kann bekanntlich aufgefasst werden als eine *Schraubung*, d. h. als eine Drehung um eine eigentliche Gerade, mit einem gewissen *Drehungswinkel* 2ϑ, verbunden mit einer Schiebung längs dieser Axe, wobei jeder Punkt parallel zur Axe um eine gewisse Strecke 2η, die *Schiebungsgrösse* der Schraubung, fortrückt. Schiebungsgrösse und Drehungswinkel sind sowohl positiver als negativer Werthe fähig; indem wir aber der Axe der Schraubung eine bestimmte Richtung beilegen, entscheiden wir über das Vorzeichen von 2η, und damit in bekannter Weise auch über den positiven Sinn einer Drehung um die Axe. Der Drehungswinkel 2ϑ ist also nach solcher Entscheidung mod. 2π bestimmt (modulo 2π, d. h. bis auf ein nicht näher anzugebendes ganzzahliges Vielfaches von 2π), der halbe Drehungswinkel ϑ ist mithin mod. π bestimmt.

Unter den ∞^6 Bewegungen sind die folgenden hervorzuheben, da sie in kinematischer Hinsicht eine Sonderstellung einnehmen:

1) Die ∞^5 *Drehungen*, gekennzeichnet durch die Bedingung $\eta = 0$. Jede Drehung, und nur eine Drehung, kann (auf ∞^1 Arten) dargestellt werden als Folge zweier Spiegelungen an Ebenen, die sich in einer

eigentlichen Geraden schneiden, und die den halben Drehungswinkel ϑ einschliessen. Sind φ, φ' zwei durch die Drehung S einander zugeordnete Ebenen, und ω eine geeignete unter den beiden winkelhalbirenden Ebenen von φ und φ' (vgl. § 2), so kann die Drehung mit $S = \{\varphi\}\{\omega\} = \{\omega\}\{\varphi'\}$ oder besser mit

$$S = \{\varphi, \omega\} = \{\omega, \varphi'\}$$

bezeichnet werden, wenn nämlich z. B. $\{\omega\}$ die Spiegelung an der Ebene ω, und $\{\varphi\}\{\omega\} = \{\varphi, \omega\}$ die Aufeinanderfolge der beiden Spiegelungen an den Ebenen φ, ω bedeutet. Die entgegengesetzte, mit S^{-1} zu bezeichnende Drehung ist dann gegeben durch

$$S^{-1} = \{\varphi', \omega\} = \{\omega, \varphi\}.$$

Wir werden, wie es auch sonst üblich ist, da wo Missverständnisse nicht entstehen können, das Wort Drehung gelegentlich auch in einem weiteren Sinne brauchen, und unter diesen Begriff die weiterhin (unter 4) aufzuführenden Schiebungen einbeziehen.

2) Die ∞^5 (vom Verfasser so genannten) *Umschraubungen*, gekennzeichnet durch die Congruenz $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. Es sind das die Bewegungen, die die uneigentlichen (unendlich fernen) Punkte „involutorisch" transformiren, d. h. durch eine Transformation von der Periode zwei. Sie können auch erklärt werden als die von der identischen Transformation (Nr. 5) verschiedenen Schraubungen, die alle Ebenen der Schraubenaxe in Ruhe lassen und die in diesen Ebenen enthaltenen Punktfelder umlegen. Eine jede Umschraubung ergiebt, zweimal hinter einander ausgeführt, eine Schiebung (Nr. 4); sie entsteht durch Zusammensetzung einer der (unter Nr. 3) sogleich zu erklärenden Umwendungen mit einer Schiebung längs der Umwendungsaxe. Eine Umschraubung kann ferner immer (und zwar auf ∞^1 Arten) dargestellt werden durch die Aufeinanderfolge einer Spiegelung $\{\xi\}$ an einem Punkte ξ, und einer Spiegelung $\{\omega\}$ an einer Ebene ω, oder durch die zuletzt genannte Spiegelung, und eine darauf folgende Spiegelung an einem Punkte ξ':

$$S = \{\xi, \omega\} = \{\omega, \xi'\}.$$

Die Punkte ξ, ξ' liegen dann auf der Axe der Umschraubung, und die Ebene ω steht auf der Sehne $\xi\xi'$ in deren Mitte senkrecht. Die Umschraubungshöhe 2η ist natürlich die Länge $\overline{\xi\xi'}$ der genannten Sehne. Umgekehrt ist die Folge einer Spiegelung an einem Punkt und einer Spiegelung an einer Ebene stets eine Umschraubung.

Die Umschraubungen nehmen, wie sich im Folgenden deutlich

zeigen wird, in der Geometrie der Bewegung eine ganz ebenso ausgezeichnete Stellung ein, wie die Drehungen*).

3) Die ∞^4 *involutorischen Bewegungen* oder *Umwendungen*, die Bewegungen, die die Periode zwei haben. Sie sind gekennzeichnet durch das gleichzeitige Bestehen der beiden unter 1) und 2) angeführten Relationen $\eta = 0$, $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. Eine Umwendung ist also die Folge zweier mit einander vertauschbarer Spiegelungen an zwei auf einander senkrechten Ebenen, oder auch an einem Punkt und an einer mit diesem Punkte vereinigt liegenden Ebene. Eine Umwendung kann endlich auch selbst als eine Spiegelung betrachtet werden, nämlich als die Spiegelung an der Umwendungsaxe; sie ist durch diese ihre Axe, also durch eine beliebig anzunehmende eigentliche Gerade, bereits völlig bestimmt.

4) Die ∞^3 *Schiebungen*, die aus der Mannigfaltigkeit aller (*reellen*) Bewegungen durch die einzige Congruenz $\vartheta \equiv 0 \bmod \pi$ abgeschieden werden können. Es sind das die Bewegungen, die alle uneigentlichen (unendlich fernen) Punkte einzeln in Ruhe lassen. Jede Schiebung ist Folge zweier Spiegelungen an Punkten, und umgekehrt. Als Schraubung aufgefasst hat eine von der identischen Bewegung (Nr. 5) verschiedene Schiebung eine Axe, die unbestimmt ist in dem durch die Richtung der Schiebung bezeichneten Bündel paralleler Geraden; als Drehung (s. oben) betrachet hat sie dagegen eine bestimmte unendlich ferne Axe, die uneigentliche Schnittlinie der Ebenen senkrecht zu der Richtung der Schiebung.

5) Die identische Transformation (Bewegung), die alle geometrischen Gebilde in Ruhe lässt.

Es geht hieraus hervor, dass mit jeder von der identischen Transformation verschiedenen Bewegung ein völlig bestimmtes Linienkreuz verbunden ist. Dieses wollen wir als Träger der Bewegung bezeichnen.

Ist nämlich die Bewegung keine Schiebung, so ist sie eine Schraubung um eine bestimmte Axe, und diese ist die Hauptaxe eines bestimmten eigentlichen Linienkreuzes. Ist die Bewegung aber eine Schiebung, so hat sie, als Schraubung aufgefasst, eine unbestimmte Axe, die als gleichfalls unbestimmte Hauptaxe eines einzigen uneigentlichen Linienkreuzes angesehen werden kann, desselben Linienkreuzes,

*) Dass dieser Umstand in bisherigen Bearbeitungen der Kinematik nicht hervortritt, liegt zum Theil daran, dass man sich meist auf die Betrachtung der infinitesimalen (unendlich kleinen) Bewegungen beschränkt hat, die natürlich niemals Umschraubungen sein können, zum Theil aber auch daran, dass die in Betracht kommenden Sätze nicht mit der gehörigen Präcision formulirt worden sind.

dessen Nebenaxe als Drehungsaxe der Schiebung auftritt, wenn man diese als Grenzfall einer Drehung betrachtet.

Da eine Schiebung, wie gesagt, auch als eine Schraubung um eine eigentliche Gerade betrachtet werden kann, so wird es unter Umständen zweckmässig sein, als *„Träger einer Schiebung im weiteren Sinne"* irgend ein eigentliches Linienkreuz gelten zu lassen, dessen Hauptaxe die Richtung der Schiebung hat.

Jede Bewegung kann nun, in mehrfacher Weise, durch die Aufeinanderfolge zweier der genannten besonderen Bewegungen erzeugt werden; und von diesen Erzeugungen ist die einfachste und wichtigste die durch zwei auf einanderfolgende Umwendungen.

Jede Bewegung, die keine Schiebung ist, kann auf ∞^2 *Arten als Folge zweier Umwendungen dargestellt werden, und jede von der identischen Transformation verschiedene Schiebung auf* ∞^3 *Arten.*

Die beiden Umwendungsaxen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *sind Querlinien des Trägers der Bewegung; sie schliessen den mod.* π *bestimmten halben Drehungswinkel* ϑ *ein, und ihr kürzester Abstand ist die halbe Schiebungsgrösse* η*).

Ist also die Bewegung eine Umschraubung oder insbesondere eine Umwendung, so kreuzen oder schneiden sich die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ unter rechtem Winkel; in jedem andern Falle ist der Winkel ϑ von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mod. π von $\frac{\pi}{2}$ verschieden. Ist die Bewegung eine Schiebung, so sind die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ unter einander parallel und senkrecht zur Richtung der Schiebung. In jedem Falle kann die Gerade $\mathfrak{X}$ oder auch $\mathfrak{Y}$ als Querlinie des Trägers der Bewegung willkürlich angenommen werden: Damit ist dann die Darstellung der Bewegung als Folge zweier Umwendungen vollkommen bestimmt. Stellen wir die Umwendung um die Gerade $\mathfrak{X}$ durch das Zeichen $\{\mathfrak{X}\}$ dar, und die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um Axen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ durch das Zeichen

$$\{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\} = \{\mathfrak{X}\}\{\mathfrak{Y}\},$$

so wird die Beziehung zwischen zwei Paaren von Umwendungen, die dieselbe Bewegung erzeugen, ausgedrückt durch die symbolische Gleichung

$$\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1\} = \{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2\}.$$

Die Umwendungen können, wie zuerst Halphen bemerkt hat, zur *Zusammensetzung* zweier beliebiger (endlicher) Bewegungen S, T be-

*) Vgl. hier und im Folgenden: H. Wiener, „Die Zusammensetzung zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen", Leipz. Ber. 1890, S. 13, und „Zur Theorie der Umwendungen", ebenda S. 71.

nutzt werden. Da nämlich zwei beliebige Linienkreuze mindestens eine gemeinsame Querlinie $\mathfrak{Y}$ haben, so kann man S und T immer in die Form setzen

$$S = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}, \quad T = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}.$$

$$ST = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}\}$$

— zu unterscheiden von $TS = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$ und von $T^{-1}S^{-1} = \{\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}\}$ — ist dann die aus S und T (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzte Bewegung. Träger dieser neuen Bewegung ST ist das nach dem obigen Satze (S. 5) zu den Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Z}$ gehörige Linienkreuz. Haben zwei Bewegungen denselben Träger (im *weiteren* Sinne des Wortes; s. oben), oder haben sie beide uneigentliche Träger, so sind sie *vertauschbar*, in Zeichen, es ist dann

$$ST = TS.$$

Es sind also je zwei Schiebungen vertauschbar, und ebenso Schraubungen um dieselbe Axe, insbesondere auch Drehungen um eine gegebene Axe und Schiebungen längs dieser Axe. Ausserdem sind noch vertauschbar Umwendungen um einander senkrecht schneidende Axen. Zwei solche Umwendungen ergeben zusammengesetzt wieder eine Umwendung, deren Axe die Axen der beiden ersten rechtwinklig schneidet.

Die Zusammensetzung der Paare von Umwendungen kann in sehr einfacher Art dazu benutzt werden, den oben angeführten Hauptsatz zu beweisen, dass jede Bewegung eine Schraubung ist. Wenn man nämlich von den Umwendungen ausgeht, so ergiebt sich sogleich, dass jede Folge beliebig vieler Umwendungen als Folge *zweier* Umwendungen dargestellt werden kann. Da jede solche Folge ersichtlich eine Schraubung ist, so hat man nur noch zu zeigen, dass jede Bewegung eine Folge von Umwendungen ist. Dies ist leicht einzusehen; man kann sogar sofort alle Folgen von *zwei* Umwendungen angeben, die hintereinander ausgeführt eine beliebig vorgelegte Bewegung erzeugen.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit einige auch bei anderen Untersuchungen nützliche Bezeichnungen einführen: Wir nennen *Speer* eine orientirte, mit bestimmter („positiver") Richtung ausgestattete Gerade. Speere sollen *parallel* heissen, wenn ihre Geraden es sind; wir nennen sie *syntaktisch*, wenn überdies die bezeichneten Richtungen übereinstimmen, *antitaktisch* im entgegengesetzten Falle. Antitaktische Speere, auf derselben Geraden gelegen, mögen *entgegengesetzt* genannt werden: Der eine geht aus dem anderen durch *Umkehrung*, nämlich durch einen Wechsel der positiven Richtung der Geraden hervor.

Irgend zwei nicht parallele Speere bestimmen zwei gerade Linien, die wir als *die eigentliche und die uneigentliche Winkelhalbirende der*

beiden Speere unterscheiden können. Diese Geraden stehen beide auf der gemeinsamen Normale der Geraden der beiden Speere in deren Mitte senkrecht, und die eigentliche Winkelhalbirende halbirt überdies den bis auf's Vorzeichen und mod. 2π bestimmten Winkel der beiden Speere, die uneigentliche aber den zugehörigen Nebenwinkel. Sind die beiden Speere syntaktisch (antitaktisch), so wird ihre uneigentliche (eigentliche) Winkelhalbirende in leicht anzugebender Weise unbestimmt. Ist $\mathfrak{X}^*$ eine eigentliche und $\mathfrak{X}^{**}$ eine uneigentliche Winkelhalbirende der Speere $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, so bringt die Umwendung $\{\mathfrak{X}^*\}$ den Speer $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{X}'$ zur Deckung, die Umwendung $\{\mathfrak{X}^{**}\}$ aber lässt aus $\mathfrak{X}$ den Speer hervorgehen, der dem Speer $\mathfrak{X}'$ entgegengesetzt ist; und es ist klar, dass keine anderen Umwendungen existiren, denen diese Eigenschaften zukommen. Ein besonderer Fall hiervon ist der Satz:

„Wenn eine Bewegung einen Speer umkehrt, so ist diese Bewegung eine Umwendung um eine Axe, die die Gerade des Speeres senkrecht schneidet."

Es sei nun vorgelegt eine Bewegung S, die die Gerade $\mathfrak{X}$ mit der Geraden $\mathfrak{X}'$, und die auf der ersten gelegene Reihe von Punkten $x_1, x_2, \ldots$ mit der Reihe der Punkte $x_1', x_2', \ldots$ von $\mathfrak{X}'$ zur Deckung bringt. Wird dann die Gerade $\mathfrak{X}$ durch den Process der Orientirung in einen Speer verwandelt, so wird damit auch die Gerade $\mathfrak{X}'$ orientirt und in einen bestimmten Speer verwandelt, sobald man festsetzt, dass die Längen $\overline{x_1 x_2}$ u. s. w. den entsprechenden Längen $\overline{x_1' x_2'}$ u. s. w. auch dem Vorzeichen nach gleich sein sollen. Man kann nun, nach Obigem, wenigstens eine Umwendung um eine Gerade $\mathfrak{D}$ angeben — eine uneigentliche Winkelhalbirende von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ — die den Speer $\mathfrak{X}$ mit dem $\mathfrak{X}'$ entgegengesetzten Speer zur Deckung bringt; dann aber ist, nach dem letzten Satze

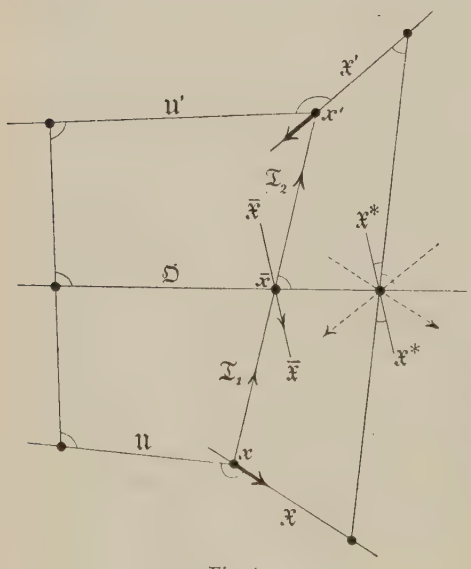


Fig. 1.

$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}'\}$$

wo $\{\mathfrak{U}\}$ und $\{\mathfrak{U}'\}$ Umwendungen um Axen bedeuten, die $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ senkrecht schneiden.

Dass man auf diese Art alle Darstellungen der Bewegung S als Folge zweier Umwendungen erhält, liegt auf der Hand. Die Bestimmung der benutzten Geraden $\mathfrak{D}$ erfolgt übrigens durch eine rationale Construction, die aus den Darlegungen des nächsten Paragraphen wird entnommen werden können.

Ist die Bewegung S schon als Folge zweier Umwendungen dargestellt, so findet man die eigentliche Winkelhalbirende $\mathfrak{X}^*$ zweier zusammengehöriger Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ im Allgemeinen so: Man construirt die Querlinie $\mathfrak{U}$ des Trägers von S, die auf $\mathfrak{X}$ senkrecht steht. Ist dann $S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\}$, also $\{\mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{U}\} S$, so ist $\mathfrak{D}$ die uneigentliche Winkelhalbirende von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$, und damit ist dann ohne Weiteres auch die eigentliche Winkelhalbirende $\mathfrak{X}^*$ gegeben, deren Lage natürlich unabhängig ist von der der Geraden $\mathfrak{X}$ willkürlich beigelegten Orientirung. Von einer Betrachtung gewisser Grenzfälle glauben wir der Kürze halber absehen zu dürfen. (Man vergleiche hierzu die beigegebene Figur 1.)

Eine bekannte Folgerung aus unseren Sätzen, die wir noch zu verwenden haben werden, ist:

„Wenn eine Bewegung einen eigentlichen Punkt in Ruhe lässt, so ist diese Bewegung eine Drehung um eine diesen Punkt enthaltende Axe."

Dagegen kann eine Bewegung, die eine eigentliche *Ebene* in Ruhe lässt, von zweierlei Beschaffenheit sein: Sie ist entweder eine Drehung um eine Axe senkrecht zu der gegebenen Ebene, im besonderen Fall auch eine Schiebung, oder sie ist eine Umschraubung um eine in der Ebene enthaltene Axe. Im letzten Falle wird die Ebene *umgelegt*, d. h. ein in ihr angenommener positiver Drehungssinn wird umgekehrt, im ersten nicht.

Hervorgehoben werden muss noch, dass durch die vorgetragene Zusammensetzung endlicher Bewegungen mit Hülfe von Umwendungen die Frage nach der Zusammensetzung infinitesimaler Bewegungen noch *nicht* erledigt ist. Denn die Figur zweier windschiefer Geraden, die einen „unendlich kleinen" Winkel einschliessen, und einen ebensolchen Abstand haben, wird nicht ohne Weiteres als Constructionselement verwendet werden dürfen. Man wird verlangen müssen, diese Figur durch andere Figuren zu ersetzen, die nicht die Vorstellung eines Grenzübergangs einschliessen, und mit deren Hülfe man infinitesimale Bewegungen durch solche Constructionen zusammenfügen kann, die im Endlichen verlaufen.

§ 2.

Collineationen und Correlationen, die mit einer Bewegung verbunden sind*).

Die für das Folgende grundlegenden Sätze, zu derer Ableitung wir uns jetzt wenden, sind nicht, wie der Hauptsatz des vorigen Paragraphen, allgemeingültig, sondern sie sind Ausnahmen unterworfen. Es wird für unsere Zwecke genügen, nur den sogenannten allgemeinen Fall zu besprechen; wir werden aber jedesmal genau angeben, worin dieser allgemeine Fall besteht.

Wir setzen zuerst voraus, dass die zu betrachtende Bewegung S keine Umschraubung ist.

Denken wir uns S wieder auf zwei Arten als Folge von Umwendungen dargestellt,

$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{O}\} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{U}'\},$$

und richten wir diese Darstellung so ein, dass die mit $\mathfrak{U}$ bezeichnete Gerade einen beliebig angenommenen eigentlichen Punt x enthält (s. Fig. 1), so können wir von diesem Punkt auf die Gerade $\mathfrak{O}$ eine Senkrechte fällen, mit dem Fusspunkt in $\bar{x}$, und wir können diese Senkrechte um sich selbst verlängern. Der gefundene Endpunkt x', das Spiegelbild von x in Bezug auf $\mathfrak{O}$, liegt dann auf der Geraden $\mathfrak{U}'$, und er geht aus x durch die Bewegung S hervor, was wir durch das Zeichen

$$x\{S\}x'$$

ausdrücken. Die Mitte $\bar{x}$ der Sehne xx' liegt nicht auf der Axe der Schraubung S, es sei denn, dass x selbst schon auf dieser Axe enthalten ist; denn andernfalls würden die Geraden $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}$ gegen die Voraussetzung einen rechten Winkel einschliessen. Nehmen wir statt eines der Punkte x, x' den Punkt x als willkürlich gegeben an, so können wir leicht wieder die zugehörigen Punkte x, x' finden: Man lege die mit $\mathfrak{O}$ bezeichnete Querlinie des Trägers S durch $\bar{x}$, errichte in $\bar{x}$ senkrecht auf $\mathfrak{O}$ eine Ebene, und bringe diese mit den zu $\mathfrak{O}$ gehörigen Umwendungsaxen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ zum Schnitt.

Jeder eigentliche Punkt $\bar{x}$ ist also Mitte einer einzigen Sehne xx'; die Zusammengehörigkeit der Punkte x, $\bar{x}$, x' definirt zwei Transformationen (Zuordnungen) $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ der Punkte des Raumes, deren erste x in $\bar{x}$, und deren zweite $\bar{x}$ in x' überführt, so dass

$$x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x', \quad x'\{\mathfrak{T}_2^{-1}\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_1^{-1}\}x.$$

---

*) S. des Verfassers Abhandlung „Von den Bewegungen und Umlegungen“, Math. Ann. Bd. 39 (1891) S. 441 u. ff.

Legen wir nun durch den Punkt x irgend eine Gerade $\bar{\mathfrak{X}}$, und bezeichnen wir mit $\bar{U}$ *die* Umschraubung um die Axe $\bar{\mathfrak{X}}$, die x mit x' zur Deckung bringt; dann kann nach einem im vorigen Paragraphen angeführten Satze

$$S = D\bar{U} = \bar{U}D'$$

gesetzt werden, wo D und D' Drehungen bedeuten um Axen, die durch x und x' gehen. Denn nachdem man den Punkt x durch $\bar{U}$ mit x' zur Deckung gebracht hat, kann man durch Drehung um eine durch x' gehende Axe $\mathfrak{X}'$ überhaupt jeden Punkt y mit dem ihm durch S zugeordneten Punkt y' zur Deckung bringen. Die Punkte der Axen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ der beiden Drehungen D und D' bleiben bei diesen Drehungen in Ruhe, sie nehmen also schon bei der Umschraubung $\bar{U}$ ihre Endlagen ein. Durchläuft daher der Punkt $\bar{x}$ eine Gerade $\bar{\mathfrak{X}}$, so durchlaufen die Punkte x und x' ebenfalls gerade Linien $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$, und zwar beschreiben sie auf diesen Geraden Punktreihen (x), (x'), die untereinander congruent und zu der Punktreihe $(\bar{x})$ *ähnlich* sind: Die Projection der Sehne xx' auf die Axe $\bar{\mathfrak{X}}$ hat ja eine constante Länge gleich der Schiebungsgrösse der Umschraubung $\bar{U}$. (Man vergleiche die Figur 1, die den besonderen Fall zur Anschauung bringt, in dem die $\bar{x}$ enthaltende Querlinie $\mathfrak{D}$ des Trägers von S auf der Geraden $\bar{\mathfrak{X}}$ senkrecht steht.)

Eine Transformation der Punkte des Raumes, die aus jeder geraden Punktreihe wieder eine solche hervorgehen lässt, nennt man eine *Collineation*, oder eine collineare Transformation*); wenn überdies aus jeder Punktreihe eine zu ihr ähnliche Punktreihe hervorgeht (so dass die uneigentlichen Punkte nur untereinander vertauscht werden), so heisst die Collineation *affin* oder *eine Affinität*. Wir haben also den Satz begründet:

Die Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ sind collinear, und überdies affin.

Zerlegt man die Bewegung S auf alle möglichen Arten

in eine Drehung und eine nachfolgende Umschraubung, so entspricht der Drehungsaxe $\mathfrak{X}$ die Umschraubungsaxe $\bar{\mathfrak{X}}$ in der Transformation $\mathfrak{T}_1$:	*in eine Umschraubung und eine nachfolgende Drehung, so entspricht der Umschraubungsaxe $\bar{\mathfrak{X}}$ die Drehungsaxe $\mathfrak{X}'$ in der Transformation $\mathfrak{T}_2$:*

$$\mathfrak{X}\{\mathfrak{T}_1\}\bar{\mathfrak{X}}\{\mathfrak{T}_2\}\mathfrak{X}'$$

Die Drehungs- oder Umschraubungsaxe kann in jedem Falle (als eigentliche Gerade) beliebig angenommen werden; damit ist dann die Zerlegung bestimmt.

---

*) Wir erklären diese Ausdrücke, da wir Werth darauf legen, alle vorkommenden Sätze elementar-geometrisch zu begründen, und uns also *nicht* auf die der projectiven Geometrie angehörigen allgemeineren Theorien zu stützen.

Eine wichtige Ergänzung dieses Satzes enthält die folgende naheliegende Bemerkung:

Die Affinitäten $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ *sind vertauschbar, sie erzeugen in beiderlei Reihenfolgen ausgeführt die Bewegung* S*:*

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = S = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1.$$

Um die Richtigkeit dieser symbolischen Gleichung einzusehen, braucht man nur die durch die Forderung

$$x'\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}'\{\mathfrak{T}_2\}x''$$

bestimmten Punkte $\bar{x}'$, x'' zu betrachten; da offenbar $\bar{x}$ durch S in $\bar{x}'$ übergeht, so hat man

$$\bar{x}\{S\}\bar{x}', \quad \bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x'\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}',$$

woraus die Behauptung folgt.

Betrachten wir das Paar zugeordneter Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ als gegeben, so gehört zu diesen stets eine bestimmte eigentliche Winkelhalbirende $\mathfrak{X}^*$: diese ist zu der jetzt von uns betrachteten Geraden $\bar{\mathfrak{X}}$ parallel. (S. Fig. 1.)

Wir untersuchen nun weiter eine Ebene u und die ihr durch S zugeordnete Ebene u', zwei Ebenen also, die in der Beziehung stehen

$$u\{S\}u'.$$

Denken wir uns die erste Ebene *orientirt*, d. h. denken wir uns etwa ein in ihr gelegenes Dreieck mit einem bestimmten Umlaufssinn versehen (womit zugleich einer jeden Normale der Ebene eine bestimmte Richtung zugeordnet wird), so ist damit auch die zweite Ebene orientirt, durch den entsprechenden Umlaufssinn des entsprechenden Dreiecks. Die, wenn u und u' nicht gerade parallel sind, völlig bestimmten beiden *Winkelhalbirenden* (winkelhalbirenden Ebenen) zweier solcher orientirter Ebenen zeigen nun ein verschiedenes Verhalten: Projiciren wir die beiden betrachteten Dreiecke orthogonal auf die eine Winkelhalbirende $\underline{u}$, so entstehen Dreiecke von gleichem Umlaufssinn, projiciren wir sie auf die andere Winkelhalbirende $\underline{\underline{u}}$, so entstehen Dreiecke von entgegengesetztem Umlaufssinn. Wir können also die Ebenen $\underline{u}$ und $\underline{\underline{u}}$ allgemein als *eigentliche* und *uneigentliche Winkelhalbirende der orientirten Ebenen* u, u' unterscheiden. Wenn nun die Ebenen u, u', und also auch die in ihnen gelegenen Punktfelder, wie wir angenommen haben, durch ein Paar entgegengesetzter Bewegungen S und S^{-1} einander zugeordnet sind, so lassen sich diese beiden Winkelhalbirenden rational trennen. Zerlegt man nämlich S in eine Drehung und eine mit dieser vertauschbare Schiebung (§ 1), so erkennt man

sofort, dass die uneigentliche Winkelhalbirende $\underline{u}$ immer parallel ist zur Axe der Schraubung S; $\underline{u}$ ist dann die Ebene, die in der Schnittlinie von u und u' auf der Ebene $\underline{u}$ senkrecht steht. Da wir angenommen haben, dass S keine Umschraubung ist, so kann es nicht vorkommen, dass die orientirten Ebenen u, u' *antitaktisch* sind, d. h. parallel sind und zu entgegengesetzten Orientirungen gehören. Ihre eigentliche Winkelhalbirende $\underline{u}$ ist daher immer völlig bestimmt: Denn wenn die Ebenen u und u' in dem soeben durch seinen Gegensatz erklärten Sinn *syntaktisch* sein sollten, so ist als eigentliche Winkelhalbirende natürlich die Ebene anzusehen, deren Punkte von beiden Ebenen u, u' entgegengesetzt gleiche Entfernungen haben.

Eine in der Ebene $\underline{u}$ beliebig angenommene eigentliche Gerade $\underline{\mathfrak{X}}$ ist nun offenbar Axe einer einzigen Drehung D, die u mit u' im umgekehrten Sinne zur Deckung bringt, so also, dass ein beliebig angenommener Drehungssinn von u in den Drehungssinn von u' übergeht, der entgegengesetzt ist dem durch S bestimmten Drehungssinn von u'. Um dann S als Folge zweier Transformationen darzustellen, deren eine die gefundene Drehung D ist, hat man entweder vor D eine Umschraubung um eine in u gelegene Axe $\mathfrak{X}$, oder nach D eine Umschraubung um eine Axe $\mathfrak{X}'$ in u' auszuführen. (Vgl. S. 11). Nach dem angeführten Satz über die Axen solcher Drehungen und Umschraubungen folgt jetzt:

Jede eigentliche Ebene $\underline{u}$ ist eigentliche Winkelhalbirende eines einzigen Paars zugeordneter Ebenen u, u'.

Die Zuordnung zwischen den Ebenen u, $\underline{u}$, u' wird herbeigeführt durch die bereits definirten Transformationen $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$, derart, dass

$$u\{\mathfrak{T}_2\}\underline{u}\{\mathfrak{T}_1\}u'.$$

Man achte darauf, dass die Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ hier in anderer Reihenfolge auftreten, als in der zu ihrer Definition benutzten Formel

$$x\{\mathfrak{T}_1\}x\{\mathfrak{T}_2\}x'.$$

Dreht sich die Ebene $\underline{u}$ um die beliebig angenommene Gerade $\underline{\mathfrak{X}}$, so drehen sich die Ebenen u und u' um die vermöge

$$\mathfrak{X}\{\mathfrak{T}_2\}\underline{\mathfrak{X}}\{\mathfrak{T}_1\}\mathfrak{X}'$$

bestimmten Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$. Ist $\underline{\mathfrak{X}}$ insbesondere identisch mit einer Querlinie $\mathfrak{O}$ des Trägers der Bewegung S, so fallen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ mit den zu $\mathfrak{O}$ gehörigen, durch die Forderung

$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{O}\} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{U}'\}$$

bestimmten Querlinien $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ zusammen.

Die letzte Bemerkung führt zu einer sehr einfachen *Construction der beiden Ebenen u, u', die eine gegebene Ebene $\underline{u}$ zur eigentlichen Winkelhalbirenden haben*, einer Construction, die allerdings nur dann anwendbar ist, wenn $\underline{u}$ Querlinien des Trägers von S enthält: „Man suche eine solche Querlinie $\mathfrak{D}$ auf, und bestimme den uneigentlichen Punkt der Ebene $\underline{u}$, in dem sich die zu $\mathfrak{D}$ senkrechten Geraden schneiden. Verbindet man sodann diesen uneigentlichen Punkt mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ durch Ebenen, so sind diese die gesuchten Ebenen u, u'.“

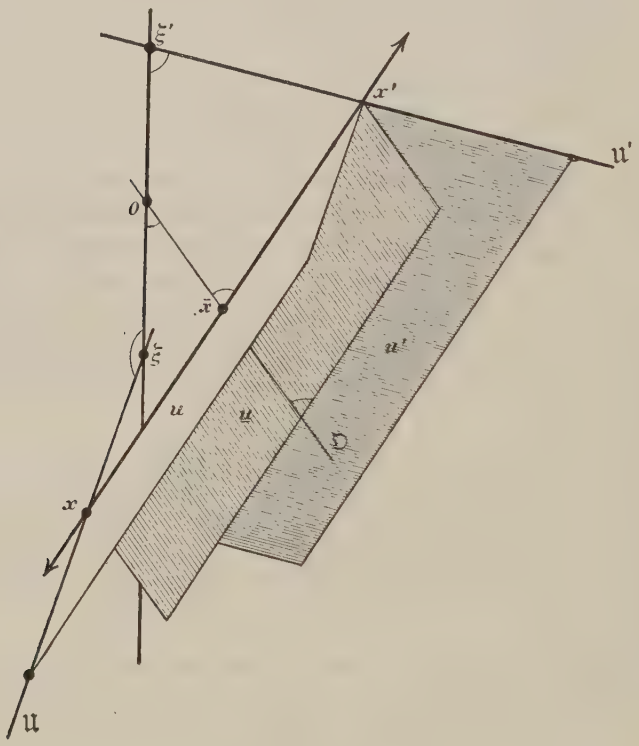


Fig. 2.

In der That, nehmen wir an, dass S keine Schiebung ist, und dass die Ebene u auf der Schraubungsaxe von S nicht senkrecht steht, so giebt es in $\underline{u}$ eine einzige Querlinie $\mathfrak{D}$ des Trägers von S (s. Fig. 2), und die Ebene $\underline{u}$ schneidet die zugehörigen Querlinien $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ in zwei eigentlichen Punkten x, x', deren Verbindungslinie auf $\mathfrak{D}$ senkrecht steht und von $\mathfrak{D}$ in $\bar{x}$ halbirt wird. Nennen wir dann u, u' die beiden Ebenen, die die Sehne xx' mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ verbinden, so kommt bei der Umwendung $\{\mathfrak{D}\}$ die Ebene u, als Verbindungsebene von $\mathfrak{U}$ und

x' mit der Ebene u', der Verbindungsebene von $\mathfrak{U}'$ und x zur Deckung; bei der nachfolgenden Umwendung $\{\mathfrak{U}'\}$ kommt dann schliesslich jeder Punkt mit dem ihm durch S zugeordneten Punkt zur Deckung, u' aber bleibt in Ruhe, oder wird vielmehr umgekehrt. u und u' stehen also in der Beziehung $u\{S\}u'$, und u ist die eigentliche Winkelhalbirende dieser beiden Ebenen.

Dass der Satz in der ausgesprochenen Form auch in den beiden bei der Beweisführung ausgeschlossenen Fällen gültig bleibt, liegt auf der Hand.

Wir machen nunmehr eine andere Voraussetzung, nämlich die, dass die Bewegung S keine Drehung, und insbesondere auch keine Schiebung ist.

Wir betrachten wieder eine Sehne xx', und legen durch deren Mitte $\bar{x}$ eine Ebene $\bar{\bar{u}}$ senkrecht zu ihr; wir nennen diese Ebene kurz *die Normalebene der Sehne xx'*. Wird nun in $\bar{\bar{u}}$ eine Gerade $\bar{\bar{\mathfrak{X}}}$ beliebig angenommen, so ist diese die Axe einer einzigen Drehung, die den Punkt x mit x' zur Deckung bringt. Die Bewegung S entsteht dann, wenn man entweder vor dieser Drehung eine andere um eine Axe $\mathfrak{X}$ ausführt, die den Punkt x enthält oder nachher eine geeignete Drehung um eine durch x' gehende Axe $\mathfrak{X}'$. Wir behaupten nun:

„Durchläuft die Gerade $\bar{\bar{\mathfrak{X}}}$ das Geradenfeld $\bar{\bar{u}}$, so durchlaufen die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ die Geradenbündel x, x'."

In der That, wird eine Gerade $\mathfrak{X}$ des Bündels x beliebig angenommen, so ist damit auch die zugeordnete Gerade $\mathfrak{X}'$ gegeben. Es seien nun y und y' zwei andere zugeordnete Punkte von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$, und es sei $\bar{\mathfrak{X}}$ die Schnittlinie der Ebene $\bar{\bar{u}}$ mit der Normalebene v der Sehne yy'. Es leuchtet zunächst ein, dass diese Schnittlinie immer eine völlig bestimmte eigentliche oder uneigentliche Gerade ist. Würden nämlich $\bar{\bar{u}}$ und $\bar{v}$ zusammenfallen, so würden x und y bei der Spiegelung an $\bar{\bar{u}} = \bar{v}$ in x' und y' übergehen; S wäre dann die Folge der Spiegelung an $\bar{\bar{u}}$ und einer Spiegelung an einer anderen Ebene, die durch x' und y' ginge; S wäre also eine Drehung, gegen die Voraussetzung.

Nun muss bei *der* Drehung um $\bar{\mathfrak{X}}$, die x mit x' zur Deckung bringt, auch y mit y' zur Deckung kommen. Denn ist $\bar{\mathfrak{X}}$ eine eigentliche Gerade, und sind z_1, z_2 zwei auf dieser angenommene Punkte, so sind alle Kanten des Tetraeders xyz_1z_2 an Länge gleich den entsprechenden Kanten des Tetraeders $x'y'z_1z_2$. Beide Tetraeder sind also entweder congruent oder symmetrisch; symmetrisch aber können sie nicht sein, da sie dann durch die Spiegelung an der Ebene $\bar{\bar{u}}$ ineinander übergehen müssten (was nach Obigem ausgeschlossen ist).

Also kann man x und y durch eine Drehung um $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ mit x' und y' zur Deckung bringen. Dass der hiermit bewiesene Satz auch auf den ausgeschlossenen Grenzfall ausgedehnt werden kann, ist leicht zu sehen.

Wir betrachten nunmehr die gegenseitige Abhängigkeit der Punkte x, x' und der Ebene $\overline{\overline{u}}$.

Wir bemerken zuerst, dass wir statt der Sehne xx' auch deren Normalebene $\overline{\overline{u}}$ hätten willkürlich geben können: Es muss nur angenommen werden, dass diese Ebene zur Axe der Schraubung S nicht parallel ist. Man kann dann sofort die zugehörigen eigentlichen Punkte x, x' finden: Man bestimme eine Querlinie $\mathfrak{D}$ des Trägers von S, die in $\overline{\overline{u}}$ verläuft; die durch die zugehörigen Geraden $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ (s. oben) senkrecht zu $\overline{\overline{u}}$ gelegten Ebenen schneiden dann $\mathfrak{D}$ in $\overline{x}$, und damit sind dann die auf $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ gelegenen Punkte x, x' unmittelbar gegeben. (Vgl. Fig. 3.)

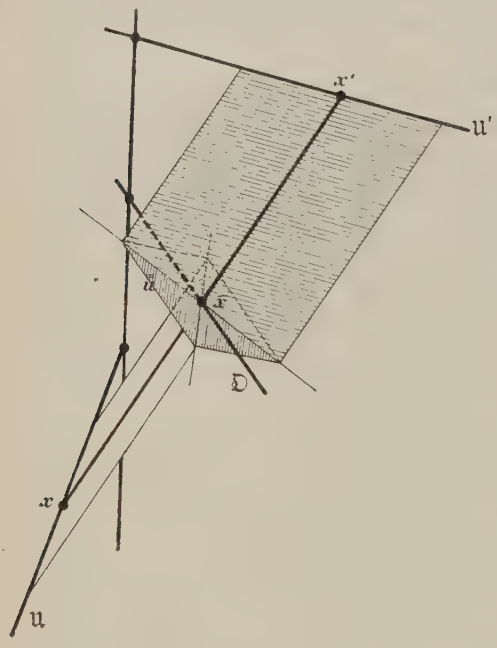


Fig. 3.

Wir haben also bis jetzt Folgendes bewiesen:

Jede eigentliche (uneigentliche) Gerade $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ ist Axe einer völlig bestimmten Drehung (Schiebung), die zusammen mit einer vorgehenden oder nachfolgenden Drehung (woraus im besonderen Falle eine Schiebung hervorgehen kann) um eine Axe $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{X}'$ die Bewegung S erzeugt. Es ist also mit der Bewegung S eine gewisse Zuordnung oder Transformation T der geraden Linien des Raumes verbunden, die in doppelter Weise durch die Beziehung zwischen den betrachteten Geraden $\mathfrak{X}$, $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$, $\mathfrak{X}'$ erklärt werden kann:

$$\mathfrak{X}\{T\}\overline{\overline{\mathfrak{X}}}\{T\}\mathfrak{X}'.$$

Dreht sich die Gerade $\mathfrak{X}$ (oder auch $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$) um einen eigentlichen Punkt x, so beschreibt die zugeordnete Gerade $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ ($\mathfrak{X}'$) eine Ebene $\overline{\overline{u}}$, die nicht parallel ist zur Axe der Schraubung S; durchläuft die gegebene Gerade, die nach Belieben mit $\mathfrak{X}$ oder mit $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ identificirt werden kann, das

Strahlenfeld einer solchen Ebene $\overline{\overline{u}}$, so dreht sich die entsprechende Gerade $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}$ oder $\mathfrak{x}'$ wieder um einen eigentlichen Punkt, den zu der Ebene $\overline{\overline{u}}$ gehörigen Punkt x'. (In derselben Weise wird auch, wie sich zeigen lässt, einem uneigentlichen Punkt x eine Ebene $\overline{\overline{u}}$ parallel zur Axe von S, und dieser Ebene wieder ein uneigentlicher Punkt x' zugeordnet.) Die Transformation T der Geraden des Raumes kann also auch aufgefasst werden als eine Zuordnung zwischen Punkten x und Ebenen $\overline{\overline{u}}$, oder auch als eine Zuordnung zwischen Ebenen $\overline{\overline{u}}$ und Punkten x'.

Man nennt eine derartige Zuordnung von Punkten, Geraden und Ebenen des Raumes zu Ebenen, Geraden und Punkten eine dualistische (auch reciproke) Transformation, besser eine *correlative Transformation oder Correlation.* Wir können daher unser Ergebniss so ausdrücken:

Jede beliebige Ebene $\overline{\overline{u}}$, die nicht zur Axe der Schraubung S parallel ist, ist Normalebene einer einzigen Sehne xx', deren Endpunkte eigentliche Punkte sind.

Dem Punkt x entspricht die Ebene $\overline{\overline{u}}$ in einer gewissen Correlation T, und der Ebene $\overline{\overline{u}}$ der Punkt x' in eben dieser Correlation T, die daher, zweimal hintereinander angewendet, die Bewegung S erzeugt:

$$x\{T\}\overline{\overline{u}}\{T\}x',$$
$$S = T^2.$$

Jede beliebige eigentliche (uneigentliche) Gerade $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}$ ist Axe einer völlig bestimmten Drehung (Schiebung), die zusammen mit einer vorhergehenden Drehung um eine Axe $\mathfrak{x}$, oder einer nachfolgenden Drehung um eine Axe $\mathfrak{x}'$ (die beide, wenn $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}$ parallel ist zur Axe von S, in Schiebungen übergehen) die Bewegung S erzeugt.

Die Geraden $\mathfrak{x}$, $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}$, $\mathfrak{x}'$ werden einander durch die Correlation T zugeordnet:

$$\mathfrak{x}\{T\}\overline{\overline{\mathfrak{x}}}\{T\}\mathfrak{x}'.$$

Wie man zu gegebener Ebene $\overline{\overline{u}}$ die Punkte x, x' finden kann, haben wir oben gesehen (Fig. 3). Daraus ergiebt sich unmittelbar die Construction der Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, die zu einer Geraden $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}$ gehören. In dem besonderen Falle, wo diese Construction illusorisch wird, erhält man eine einfachere Construction.

Wir setzen nunmehr drittens voraus, dass die Bewegung S weder eine Umschraubung, noch eine Drehung (Schiebung) ist.

Unter dieser engeren Voraussetzung existiren die affinen Collineationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und die Correlation T gleichzeitig. Wir können

also jetzt diese Transformationen zu neuen Transformationen der Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes zusammensetzen. Unter den so entstehenden Transformationen, die theils Collineationen, theils Correlationen sind, befindet sich insbesondere auch die Zuordnung zwischen der Mitte $\bar{x}$ und der Normalebene $\bar{\bar{u}}$ einer Sehne xx'. Die Zuordnung, die aus dem eigentlichen Punkte $\bar{x}$ die eigentliche Ebene $\bar{\bar{u}}$ hervorgehen lässt, ist nun zunächst eine Correlation

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_1^{-1} T = T \mathfrak{T}_2^{-1};$$

sie ist aber eine Correlation von besonderer Art, da die irgend einem Punkte $\bar{x}$ vermöge $\mathfrak{W}$ zugeordnete Ebene $\bar{\bar{u}}$ stets den Punkt $\bar{x}$ selbst enthält. Eine derartige Correlation hat die wichtige Eigenschaft, zweimal hintereinander angewendet zur identischen Transformation zu führen, sie ist, wie wir sagen, *involutorisch*. Lassen wir nämlich einen Punkt $\bar{y}$ eine den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Gerade $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\bar{x}}}$ der Ebene $\bar{\bar{u}}$ durchlaufen, so wird sich die durch $\bar{y}\{\mathfrak{W}\}\bar{v}$ bestimmte Ebene $\bar{v}$ um eine Gerade drehen, die in der Ebene $\bar{\bar{u}}$ liegt, und dabei wird diese Ebene fortwährend durch den Punkt $\bar{y}$ gehen; d. h. die Ebene $\bar{v}$ dreht sich um die Gerade $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\bar{x}}}$ selbst. Mit anderen Worten: Wenn der Punkt $\bar{y}$ die Ebene $\bar{\bar{u}}$ durchläuft, so dreht sich die zugehörige Ebene $\bar{v}$ um den Punkt $\bar{x}$. Dass dies eintreten muss, kann man in unserem besonderen Falle auch so einsehen: Die Gerade $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\bar{x}}}$ ist die Axe einer völlig bestimmten Umwendung, die zusammen mit einer vorhergehenden oder nachfolgenden Drehung die Bewegung S erzeugt; durchläuft daher der Punkt $\bar{y}$ die Umwendungsaxe, so wird sich die Normalebene $\bar{v}$ der zugehörigen Sehne yy' um eben diese Axe drehen.

Die Zuordnung $\mathfrak{W}$ ist also identisch mit der ihr entgegengesetzten Transformation $\mathfrak{W}^{-1}$, eine Beziehung, die man, bei Bezeichnung der identischen Transformation mit 1, durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{W}^2 = 1$$

auszudrücken pflegt; zugleich ergiebt sich für $\mathfrak{W}$ eine neue Darstellung durch T, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$:

$$\mathfrak{W} = T^{-1}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 T^{-1}.$$

Eine Correlation der hier betrachteten Art nennt man ein *Nullsystem*, die Ebene $\bar{\bar{u}}$, die einem gegebenen Punkt $\bar{x}$ entspricht, dessen *Nullebene*, und den Punkt $\bar{x}$, der einer Ebene $\bar{\bar{u}}$ zugeordnet wird, den *Nullpunkt* dieser Ebene $\bar{\bar{u}}$. Die ∞^3 Geraden, die bei der Transformation des Nullsystems sich selbst zugeordnet werden, also in unserem Falle die Umwendungsaxen $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\bar{x}}}$, heissen *Leitlinien* des Nullsystems; ihre Gesammtheit bildet einen sogenannten *linearen Liniencomplex*, oder,

nach Herrn R. Sturm's Ausdruck, ein *Gewinde* (Strahlengewinde). Wir können also sagen:

Die Zuordnung zwischen den Mitten $\bar{x}$ und den Normalebenen $\bar{u}$ der Sehnen xx' ist die eines Nullsystems

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_1^{-1} T = T^{-1}\mathfrak{T}_1 = T\mathfrak{T}_2^{-1} = \mathfrak{T}_2 T^{-1};$$

das zugehörige Gewinde ist der Ort aller Axen von Umwendungen, die zusammen mit einer vorhergehenden oder nachfolgenden Drehung die Bewegung S erzeugen.

Wie man zu gegebenem Punkt $\bar{x}$ die Nullebene $\bar{\bar{u}}$ oder zu gegebener Ebene $\bar{\bar{u}}$ den Nullpunkt $\bar{x}$ zu construiren hat, ist nach dem Vorhergehenden klar. Fällt der Punkt $\bar{x}$ auf die Axe der Schraubung S, so steht die Ebene $\bar{\bar{u}}$ auf eben dieser Axe senkrecht, und umgekehrt. Leicht erkennt man, dass es nur eine einzige Gerade giebt, der durch das Nullsystem die unendlich ferne Schnittlinie ihrer Normalebenen zugeordnet wird. Nennen wir diese, wie üblich, die *Hauptaxe* des Nullsystems, so folgt:

Die Axe der Schraubung S ist die Hauptaxe des zugehörigen durch die Zuordnung

$$\ldots . \bar{x}\{\mathfrak{W}\}\bar{\bar{u}}\{\mathfrak{W}\}\bar{x} \ldots .$$

bestimmten Nullsystems $\mathfrak{W}$.

Ein besonderer Fall der betrachteten Zerlegung von S in eine Umwendung und eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung ist die Darstellung der Bewegung als Folge zweier Umwendungen $\{\mathfrak{X}\}$, $\{\mathfrak{Y}\}$. Die Querlinien des Trägers von S (nicht aber i. A. auch deren Punkte und Ebenen) haben also die Eigenschaft, durch die beiden Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, und daher auch durch T in gleicher Weise vertauscht zu werden.

Hervorzuheben ist noch, dass das Nullsystem $\mathfrak{W}$ in gleicher Weise zu ∞^1 verschiedenen Bewegungen gehört, während jede der Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T nur mit einer einzigen Bewegung S verbunden ist. In der That, lässt man die Axe der Schraubung S unverändert, und ändert man die dann für S charakteristischen Grössen η (s. § 1) und $\operatorname{tg}\vartheta$ in gleichem Verhältniss, so ändert sich das Nullsystem $\mathfrak{W}$ offenbar nicht. Dass man ein ganz beliebiges Nullsystem annehmen und dann nachträglich immer ∞^1 Bewegungen finden kann, zu denen es als Nullsystem $\mathfrak{W}$ gehört, ist ein weitergehender Satz, dessen übrigens keinerlei Schwierigkeit bietender Beweis, wie der allgemeine Begriff des Nullsystems selbst, projective Geometrie voraussetzt; wir werden diesen Satz in den folgenden Ueberlegungen nicht verwenden.

Unter den betrachteten ∞^1 Bewegungen, die zu demselben Null-

system $\mathfrak{W}$ führen, findet sich eine sogenannte *infinitesimale Transformation*, eine solche, bei der, wie man zu sagen pflegt, jeder Punkt um ein „unendlich kleines Stück" fortrückt, und jede Ebene um einen „unendlich kleinen Winkel" gedreht wird. Eine solche Transformation ist bestimmt, wenn ihr Träger, mit Orientirung seiner Hauptaxe (der Schraubenaxe der Bewegung), sowie die halbe Schiebungsgrösse $d\eta' = \eta dt$ und der halbe Drehungswinkel $d\vartheta' = \mathrm{tg}\vartheta . dt$ gegeben sind. Auf diese infinitesimalen Bewegungen finden die abgeleiteten Sätze ebenfalls Anwendung; insbesondere ergiebt sich der bekannte Satz:

„Wenn S eine infinitesimale Bewegung, nicht aber eine Drehung oder Schiebung ist, so entsprechen die Ebenen $\overline{\overline{u}}$, die in den Punkten $\overline{x}$ des Raumes senkrecht auf den vermöge S ihnen zugehörigen Fortschreitungsrichtungen errichtet werden, diesen Punkten in der Correlation eines Nullsystems $\mathfrak{W}$. Die Geraden, deren Punkte senkrecht zu ihnen verschoben werden, erfüllen das zugehörige Gewinde." —

Wir brechen hier diese Betrachtungen über die Geometrie der Bewegung vorläufig ab, um sie erst nach Entwickelung mehrerer neuer Begriffe wieder aufzunehmen. Wegen einer längeren Reihe weiterer Sätze, die sich hier anschliessen liessen, sei auf die Eingangs erwähnte Abhandlung verwiesen. Man findet dort auch die hier ausgeschlossenen Grenzfälle behandelt.

§ 3.

Die geometrische Addition der Stäbe.

Wir recapituliren nunmehr in Kürze, soweit es für unseren Zweck nöthig ist, die bekannten Sätze, die in Lehrbüchern der Mechanik als Regeln für die Zusammensetzung an einem starren Körper angreifender Kräfte vorgetragen zu werden pflegen. Wir werden aber, da es sich um *geometrische* Dinge handelt, nach dem Beispiele anderer Autoren unsere — übrigens von der üblichen mehrfach abweichende — Terminologie dem entsprechend wählen; wir werden also nicht von Kräften sprechen, sondern von Linienstücken, oder „Stäben".

Wir bezeichnen einen *Stab* mit dem „Anfangspunkte" ξ und dem „Endpunkte" η durch das Symbol $\mathfrak{S}_\xi^\eta$. Den Abstand des Punktes η vom Punkte ξ nennen wir die *Länge* des Stabes, und wir bezeichnen diese Grösse durch das Symbol $\overline{\xi\eta}$. Wir betrachten sie — abweichend von dem in der Mechanik üblichen Verfahren — als positiver wie negativer Werthe fähig; derart, dass erst durch Orientirung der *Geraden* des Stabes, oder durch deren Verwandlung in einen Speer (§ 1) die Grösse $\overline{\xi\eta}$ einen völlig bestimmten Werth erhält, und zwar den posi-

tiven Werth, wenn die Richtung von ξ nach η hin als die positive ausgezeichnet wird. Zwei Stäbe gelten als *gleich*, wenn sie auf derselben Geraden liegen, und wenn der eine aus dem anderen durch Verschiebung längs dieser Geraden hervorgeht. Da die Gerade selbst und auch eine zugehörige Orientirung hierbei nicht geändert wird, so schreiben wir gleichen Stäben gleiche Längen zu, wiewohl wir diese Längen einzeln nur als bis auf das Vorzeichen bestimmt betrachten. Endlich brauchen wir noch einen weiteren Kunstausdruck: Die Gerade, auf der der Stab liegt, ist Hauptaxe eines einzigen eigentlichen Linienkreuzes, und dieses — nicht aber die Gerade des Stabes selbst — wollen wir den *Träger* des Stabes nennen*).

Dem Begriffe des Stabes nahe verwandt ist der des *Vectors*, den wir durch das Symbol $\mathfrak{V}_{\xi}^{\eta}$ bezeichnen. Dieser ist ebenfalls ein Linienstück, mit einem „Anfangspunkte“ ξ und einem „Endpunkte“ η; aber zwei Vectoren werden überhaupt dann einander *gleich* gesetzt, wenn der eine aus dem anderen durch irgend eine Schiebung (also nicht nur durch eine Schiebung längs der Geraden $\xi\eta$) hervorgeht.

Der Begriff der *Länge* eines Vectors ist ebenso zu fassen wie der Begriff der Länge eines Stabes, abweichend aber der Begriff des Trägers. Irgend eine der Geraden, die das Punktepaar ξ, η des Vectors $\mathfrak{V}_{\xi}^{\eta}$ enthalten können, ist Hauptaxe eines bestimmten uneigentlichen Linienkreuzes (§ 1), und dieses werden wir in der Regel als *Träger des Vectors* bezeichnen. Daneben werden wir öfter in die Lage kommen, von einem „gemeinsamen Träger“ eines Stabes und eines Vectors zu reden. Das Wort „Träger“ ist dann, mit Bezug auf den Vector, in einem umfassenderen Sinne genommen: Als *„Träger eines Vectors im weiteren Sinne“* betrachten wir jedes eigentliche Linienkreuz, auf dessen Hauptaxe die zugehörigen Punkte ξ, η liegen können. Wenn also bei Zusammenstellung eines Stabes und eines Vectors Anfangs- und Endpunkt beider auf der nämlichen Geraden liegen, oder wenn diese Lage durch geeignete Verschiebung des Vectors erreicht werden kann, so reden wir von einem *gemeinsamen Träger* der beiden Gebilde.

Die Zusammensetzung oder *geometrische Addition* mehrerer Stäbe mit gemeinsamem Anfangspunkt o im Endlichen erfolgt durch die bekannte Construction des *Stäbeparallelogrammes*; sie wird symbolisch

*) In seiner ersten Veröffentlichung hatte der Verfasser als Träger eines Stabes dessen Gerade bezeichnet, wie es auch in der ebenen Geometrie wirklich zweckmässig ist. Entsprechend waren die später einzuführenden Begriffe des Trägers eines Keiles oder Motors etwas anders gefasst, als hier.

dargestellt durch das gewöhnliche Zeichen + der Addition. Sie befolgt das in der Formel

$$\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\eta + \mathfrak{S}_o^\xi$$

ausgedrückte *commutative Gesetz*, und ebenso das sogenannte *associative Gesetz*, das in der Formel

$$(\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta) + \mathfrak{S}_o^\zeta = \mathfrak{S}_o^\xi + (\mathfrak{S}_o^\eta + \mathfrak{S}_o^\zeta)$$

seinen Ausdruck findet, und das bewirkt, dass man in der Bezeichnung einer solchen „geometrischen" Summe die Klammern weglassen darf. Die genannte geometrische Addition der Stäbe ist ferner mit der *geometrischen Multiplication eines Stabes mit einer (positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen) Zahl* c durch das *distributive Gesetz* verbunden: Es ist

$$c \cdot (\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta) = c \cdot \mathfrak{S}_o^\xi + c \cdot \mathfrak{S}_o^\eta,$$

wenn z. B. $c \cdot \mathfrak{S}_o^\xi$ einen Stab mit demselben Träger, und also auf derselben Geraden wie $\mathfrak{S}_o^\xi$, aber von der c-fachen Länge bedeutet. Ein jeder Stab, dessen Anfangspunkt mit seinem Eckpunkte zusammenfällt, wird gleich Null gesetzt,

$$\mathfrak{S}_\xi^\xi = 0,$$

alle solchen Stäbe werden also als einander *gleich* betrachtet, auch wenn sie verschiedene Träger haben: Träger des *Stabes Null* ist ein völlig unbestimmtes Linienkreuz. Eine besonders wichtige Folgerung dieser Bestimmungen wird ausgedrückt durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{S}_\xi^\eta + \mathfrak{S}_\eta^\xi = 0.$$

Einfachere Eigenschaften noch hat die *geometrische Addition der Vectoren*, auf die diese Begriffe übertragen werden können: Sie erfolgt am schnellsten durch die Construction des *Vectorendreiecks*, die in der symbolischen Identität

$$\mathfrak{V}_\xi^\eta + \mathfrak{V}_\eta^\zeta = \mathfrak{V}_\xi^\zeta$$

ihren Ausdruck findet, und die, bei Addition von mehr als zwei Vectoren, zur Entstehung des sogenannten *Vectorenpolygons* Anlass giebt. Die geometrische Summe von beliebig vielen Vectoren ist danach immer wieder ein Vector, oder sie ist gleich Null; jeder Vector kann als Summe von Vielfachen dreier *linear-unabhängiger* Vectoren dargestellt werden, d. h. solcher Vectoren, deren Gerade nicht zu einer Ebene parallel sind.

Stäbe auf Geraden, die einander nicht schneiden, können auf Grund einer besonderen Definition doch immer zu einer sogenannten *formalen geometrischen Summe* vereinigt werden. Eine solche Summe ändert

sich nicht, wenn man zu ihren einzelnen Bestandtheilen Stäbe geometrisch addirt, die wie $\mathfrak{S}_\xi^\eta$ und $\mathfrak{S}_\eta^\xi$ die Summe Null haben. Stäbesummen gelten als gleich, wenn sie, unter Verwendung der Parallelogrammconstruction, auf diese Art in einander übergeführt werden können. Die formale geometrische Addition der Stäbe befolgt ebenfalls die als commutatives, associatives und distributives Gesetz bezeichneten Regeln (s. oben).

Eine geometrische Summe beliebig vieler Stäbe, in endlicher Zahl, kann dargestellt werden entweder (a) *als Summe zweier von Null verschiedener Stäbe, deren Gerade einander kreuzen, oder* (b) *als ein einzelner Stab, oder* (c) *als ein „Stäbepaar", als eine Summe zweier gleichlanger Stäbe auf antitaktischen Speeren (s. S. 9); oder endlich* (d), *die Summe hat den Werth Null.*

Der Fall (c) kann angesehen werden als ein Grenzfall von (b). Denn wenn das Punktepaar ξ', η' aus ξ, η durch eine Schiebung hervorgegangen ist, so kann man sich z. B. vorstellen, dass die geometrische Summe

$$\mathfrak{S}_\xi^\eta - \mathfrak{S}_{\xi'}^{\eta'} = \mathfrak{S}_\xi^\eta + \mathfrak{S}_{\eta'}^{\xi'}$$

aus der Summe zweier Stäbe $\mathfrak{S}_\xi^\eta$ und $\mathfrak{S}_{\eta_1}^{\xi_1}$ entstanden ist, deren Gerade parallel, deren Längen $\overline{\xi\eta}$ und $\overline{\eta_1\xi_1}$ aber nicht entgegengesetzt gleich sind. Eine solche Summe ist aber gleich einem einzelnen Stabe. Lässt man die beiden Längen $\overline{\xi\eta}$ und $\overline{\xi_1\eta_1}$ einander gleich werden, so rückt die Gerade dieses Stabes ins Unendliche, und seine Länge nähert sich der Null, ohne dass jedoch im Grenzfalle die Summe selbst gleich Null gesetzt werden dürfte.

Mit jedem Stäbepaar ist ein völlig bestimmter Vector verbunden, und umgekehrt.

Man lege der Ebene, in der die Stäbe des Paares

$$\mathfrak{S}_{\xi_1}^{\eta_1} + \mathfrak{S}_{\xi_2}^{\eta_2}$$

enthalten sind, einen beliebigen Drehungssinn bei, man orientire die Ebene. Damit wird dann auch jede Normale dieser Ebene orientirt. Das Parallelogramm $\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2$, in der angegebenen Reihenfolge der Punkte ξ, η umlaufen, hat dann einen völlig bestimmten positiven oder negativen Flächeninhalt, wenn man, wie üblich, festsetzt, dass ein im positiven Sinne umlaufenes Flächenstück einen positiven Inhalt haben soll. Dieser Flächeninhalt bleibt ungeändert, wenn man den Abstand der Geraden und die gemeinsame Länge der beiden Stäbe in reciproken Verhältnissen ändert, ferner auch, wenn man die ganze

Figur in ihrer Ebene beliebig dreht, oder wenn man sie parallel zu sich selbst verschiebt. Der genannte Flächeninhalt wird *Moment des Stäbepaares* genannt, das bei allen diesen Aenderungen wohl seine Lage und Gestalt, nicht aber seinen Werth als geometrische Summe zweier Stäbe ändert. Der zu dem Stäbepaare gehörige Vector $\mathfrak{V}_\xi^\eta$ ist nun dadurch definirt, dass seine Richtung (nämlich die von ξ nach η hin) die Richtung des Speeres ist, der als Normale zu der Ebene des Stäbepaares gehört (s. Fig. 4), und dass seine Länge, in eben dieser Richtung gemessen, gleich dem Moment des Stäbepaares ist. Diese Zuordnung zwischen Stäbepaar und Vector ist unabhängig von dem Drehungssinn, den man der Ebene des Stäbepaares beigelegt hat: Kehrt man diesen Drehungssinn um, so wechselt das Moment des Stäbepaares sein Vorzeichen, und gleichzeitig wird die positive Richtung der Normale umgekehrt, auf der der Vector $\mathfrak{V}_\xi^\eta$ liegt. Man erhält also statt dieses Vectors einen neuen Vector $\mathfrak{V}_{\xi'}^{\eta'}$, der auf dem entgegengesetzten Speere liegt, und — auf diesem neuen Speere gemessen — eine der Länge des ersten Vectors entgegengesetzte Länge hat; d. h. man erhält wieder denselben Vector.

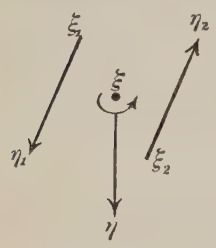


Fig. 4.

Verstehen wir unter dem *Träger eines Stäbepaares*, im engeren Sinne, das uneigentliche Linienkreuz, dessen Nebenaxe die unendlich ferne Gerade seiner Ebene ist, und im weiteren Sinne irgend ein eigentliches Linienkreuz, das eben diese Gerade als Nebenaxe hat, so können wir nunmehr kurz sagen:

Stäbepaar und zugehöriger Vector haben denselben Träger. Das Moment des Stäbepaares ist gleich der Länge des Vectors.

Auf Grund dieser Bestimmungen gilt dann der bekannte Satz:

Stäbepaare werden geometrisch addirt, indem man die zugehörigen Vectoren geometrisch addirt.

Ein Stäbepaar wird mit einer Zahl c geometrisch multiplicirt, indem man den zugehörigen Vector mit eben dieser Zahl geometrisch multiplicirt. (Und umgekehrt.)

Kann in dem mit (a) bezeichneten allgemeinen Falle eine geometrische Summe von Stäben als Summe von zwei und nicht weniger Stäben dargestellt werden, so sind die Geraden dieser Stäbe einander polar zugeordnet in Bezug auf ein mit der Summe von Stäben verbundenes *Nullsystem* (§ 2); d. h. lässt man die Gerade des einen Stabes durch einen bestimmten Punkt gehen, so liegt die des anderen in einer bestimmten Ebene, die eben diesen Punkt enthält. Jede von beiden Geraden kann beliebig angenommen werden, doch so, dass sie *nicht*

Leitlinie des genannten Nullsystems ist: Damit ist dann die Darstellung der Summe von Stäben als Summe zweier Stäbe völlig bestimmt. Man beweist diese Sätze sehr einfach mit Hülfe der Parallelogrammconstruction, indem man die Summe zweier Stäbe durch Addition entgegengesetzt gleicher Stäbe, deren gemeinsame Gerade die Geraden der ersten beiden Stäbe schneidet, in andere Formen überführt; und in der That hat Möbius auf eben diesem Wege den Begriff des Nullsystems und dessen wichtigste Eigenschaften elementar-geometrisch abgeleitet.

Lässt man die angenommene Gerade ins Unendliche rücken, so ergeben sich ∞^2 Darstellungen der Stäbesumme als Summe eines einzelnen Stabes und eines Stäbepaares. Die einzelne unter diesen Darstellungen, die auch im Falle (b) vorhanden sind, kann durch die Forderung bestimmt werden, dass die Gerade des Stabes einen willkürlich vorzuschreibenden eigentlichen Punkt enthalten soll. In der That kann jeder Stab offenbar dargestellt werden als Summe eines gleich langen und gleich gerichteten Stabes, der durch einen gegebenen Punkt o geht, und eines Stäbepaares, dessen Ebene die Verbindungsebene der Geraden beider Stäbe ist. Jede geometrische Summe von Stäben kann daher dargestellt werden als Summe eines Stabes, dessen Gerade durch den Punkt o geht (und der in den Fällen c und d verschwindet) und eines Stäbepaares (das ebenfalls verschwinden kann).

Die eben betrachtete vieldeutige Darstellung einer Summe von Stäben ist von besonderer Wichtigkeit für die Mechanik, in der man den o genannten Punkt mit dem Schwerpunkte des untersuchten starren Körpers zu identificiren pflegt. Für uns kommt aber mehr noch eine andere Darstellung in Betracht, die nur auf eine einzige Weise herbeigeführt werden kann, die „Normalform".

Eine jede nicht verschwindende geometrische Summe von Stäben kann auf eine einzige Weise in die Normalform gebracht, nämlich als Summe $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ *eines Stabes* $\mathfrak{S}'$ *und eines Stäbepaares* $\mathfrak{S}''$ *dargestellt werden, die beide denselben Träger haben.*

Da dieser Satz für unsere ganze Untersuchung grundlegend ist, so recapituliren wir kurz den einfachen Beweis. Die Summe von Stäben sei zunächst in die Form $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$ gesetzt, wo $\mathfrak{S}_1$ einen Stab bedeutet, der durch den beliebig angenommenen Punkt o geht, $\mathfrak{S}_2$ aber ein Stäbepaar. $\mathfrak{V}_2$ sei der zu diesem Stäbepaare gehörige Vector. Man zerlege diesen Vector in der Richtung des Stabes $\mathfrak{S}_1$ und senkrecht dazu, $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}_2' + \mathfrak{V}_2''$, und bezeichne mit $\mathfrak{S}_2'$ und $\mathfrak{S}_2''$ die zu $\mathfrak{V}_2'$ und $\mathfrak{V}_2''$ gehörigen Stäbepaare. Dann ist $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2' + \mathfrak{S}_2''$ und $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2'') + \mathfrak{S}_2'$. $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2''$ aber ist ein neuer Stab, dessen Ge-

rade auf der Ebene des Stäbepaares $\mathfrak{S}_2'$ senkrecht steht. Der Stab $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2''$ und das Stäbepaar $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}_2'$ haben also denselben Träger, wenn dieses Wort, mit Bezug auf das Stäbepaar, im weiteren Sinne genommen wird (s. oben). Dass nur eine solche Darstellung $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ vorhanden ist, sieht man unmittelbar. Verschwindet $\mathfrak{S}''$ oder $\mathfrak{S}'$, so ergeben sich als Normalform der Summe von Stäben die schon oben unter (b) und (c) genannten besonderen Darstellungsarten. — Nunmehr können wir definiren:

Träger einer geometrischen Summe von Stäben heisst der gemeinsame Träger des Stabes $\mathfrak{S}'$ und des Stäbepaares $\mathfrak{S}''$ der auf die Normalform $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ gebrachten Summe.

Der Träger einer Summe von Stäben ist also in den Fällen (a) und (b) ein eigentliches Linienkreuz, dessen Hauptaxe die Gerade des Stabes $\mathfrak{S}'$ ist, im Falle (a), wie man leicht erkennt, zugleich Hauptaxe des mit der Summe von Stäben verknüpften Nullsystems (s. oben; vgl. auch S. 21); im Falle (c) ist der Träger im engeren Sinne ein uneigentliches Linienkreuz, im weiteren Sinne irgend eines der ∞^2 zu diesem parallelen eigentlichen Linienkreuze. Die Einführung dieses Begriffs des Linienkreuzes, das eine Summe von Stäben und daneben auch den zugehörigen (mit dem Stäbepaare $\mathfrak{S}''$ verbundenen) Vector trägt, wird sich als nützlich für unsere Untersuchung erweisen: Sie ermöglicht es, zusammengehörige Sätze in einen einzigen Ausdruck zu fassen, die andernfalls mehrere Formulirungen nöthig machen würden, jedenfalls nur schwerfälliger würden ausgedrückt werden können. Eine solche Zusammenfassung ist bereits der folgende Satz, auf den wir uns weiterhin zu stützen haben werden:

Ist eine Gerade $\mathfrak{D}$ Querlinie der Träger zweier geometrischer Summen $\mathfrak{S}_1' + \mathfrak{S}_1''$ und $\mathfrak{S}_2' + \mathfrak{S}_2''$ von Stäben, so ist sie auch Querlinie des Trägers einer jeden Summe von Stäben, die in der Form

$$c_1(\mathfrak{S}_1' + \mathfrak{S}_1'') + c_2(\mathfrak{S}_2' + \mathfrak{S}_2'')$$

dargestellt werden kann.

In der That, sei o ein beliebig auf $\mathfrak{D}$ angenommener eigentlicher Punkt, so kann man jede der beiden gegebenen Summen, und folglich auch das angeschriebene Aggregat, als Summe eines Stabes und eines Stäbepaares derart darstellen, dass die Gerade des Stabes in o auf $\mathfrak{D}$ senkrecht steht, und die Ebene des Stäbepaares durch $\mathfrak{D}$ geht. Jede solche Summe hat aber, nach einer schon oben angestellten Betrachtung, auch umgekehrt wieder die Gerade $\mathfrak{D}$ als Querlinie ihres Trägers.

Besteht zwischen mehreren, nunmehr durch einzelne Zeichen $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}_\beta$, ... darzustellenden Summen von Stäben eine lineare Relation

$$c_\alpha \cdot \mathfrak{S}_\alpha + c_\beta \cdot \mathfrak{S}_\beta + \cdots = 0,$$

so heissen diese Summen *linear-abhängig*, andernfalls *linear-unabhängig*. Jede geometrische Summe von Stäben kann als Summe von geometrischen Vielfachen von irgend *sechs* linear-unabhängigen Summen von Stäben dargestellt werden. Sechs Summen dieser Art sind z. B., wie schon Möbius bemerkt hat, sechs Stäbe auf den Kanten eines beliebigen Tetraeders. Ein Grenzfall dieser Figur sind drei Stäbe und drei Stäbepaare auf den Axen und in den Ebenen eines Coordinatenkreuzes, wie sie bei der in der analytischen Mechanik üblichen Zerlegung der Kräfte angewendet werden.

Einige weitere Hülfssätze, die sich auf die Geometrie der Stäbe und Vectoren beziehen, werden wir später an den Stellen anführen, wo wir ihrer bedürfen werden.

Der Leser, der bis hierher aufmerksam gefolgt ist, wird vielleicht bemerkt haben, dass zwischen der Geometrie der Bewegung und der Geometrie der Stäbe und Vectoren gewisse Analogieen stattfinden. Die Bewegung hängt wie die Figur einer Summe von Stäben von sechs Constanten ab. In beiden Theorieen tritt das eigentliche und uneigentliche Linienkreuz mit seinen Querlinien als „Träger" der betrachteten Figuren, und ebenso das Nullsystem auf. Endlich ist es kein Zufall, dass der Satz von der Zerlegung einer Bewegung in eine Drehung und eine mit dieser vertauschbare Schiebung sich in eine Form setzen lässt, die sehr ähnlich ist dem Satze über die Normalform einer Summe von Stäben:

„Jede von der identischen Transformation verschiedene Bewegung lässt sich auf eine einzige Weise als Folge einer Drehung und einer Schiebung (oder einer Schiebung und einer Drehung) darstellen, die einen gemeinsamen Träger haben (der dann zugleich der Träger der Bewegung selbst ist)."

Wir werden nun, nach Entwickelung weiterer Hülfsmittel, die Natur dieses der Aufmerksamkeit der Mathematiker bis jetzt anscheinend entgangenen Zusammenhanges zwischen der Geometrie der Stäbe und der Geometrie der *endlichen* Bewegungen zu ergründen suchen. Hier können wir darüber nur soviel sagen, dass nicht etwa die Zusammensetzung von Bewegungen und die geometrische Addition von Stäbesummen in Parallele gesetzt werden können; denn die letzte Operation befolgt das commutative Gesetz, die erste nicht.

Indem wir uns nunmehr auf ein neues Gebiet begeben, werden wir etwas langsamer vorgehen müssen, als bisher.

§ 4.

Die geometrische Addition der Keile durch das Keiltrapez*).

Wir stellen nunmehr dem Begriff des Stabes einen neuen Begriff gegenüber, den des Keiles.

Wir verstehen unter einem *Keil* $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$ den Inbegriff zweier eigentlicher Ebenen φ, φ', *die nicht aufeinander senkrecht stehen*, aber sonst keiner Beschränkung unterworfen sein sollen, und die als „Anfangsebene" φ und „Endebene" φ' des Keils bestimmt geordnet sind. Nehmen wir diese Ebenen überdies als von einander verschieden an, so haben sie eine bestimmte im Endlichen oder auch unendlich fern gelegene Schnittlinie, die *Gerade* des Keiles, und diese ist, wenn sie eine eigentliche (uneigentliche) Gerade ist, die Hauptaxe (Nebenaxe) eines völlig bestimmten eigentlichen (uneigentlichen) Linienkreuzes, das wir den *Träger des Keiles* $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$ nennen wollen. Daneben werden wir als *„Träger"* eines Keiles mit parallelen Begrenzungsebenen *„im weiteren Sinne"* auch jedes eigentliche Linienkreuz ansehen, dessen Hauptaxe auf diesen Ebenen φ, φ' senkrecht steht. (Man vergleiche die entsprechenden Definitionen in § 1 und § 3.)

Zwei Keile $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$ und $\mathfrak{K}_{\psi}^{\psi'}$ setzen wir einander *gleich*, und wir schreiben symbolisch

$$\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'} = \mathfrak{K}_{\psi}^{\psi'}, \quad \text{wenn} \quad \{\varphi, \varphi'\} = \{\psi, \psi'\},$$

oder, was dasselbe ist, wir setzen sie einander gleich, wenn sie denselben Träger haben, und wenn ausserdem der eine Keil aus dem anderen durch eine Drehung um diesen Träger hervorgeht. Unter einer „Drehung um ein eigentliches (uneigentliches) Linienkreuz" ist dabei natürlich eine Drehung um die Hauptaxe (eine Schiebung in der Richtung der unbestimmten Hauptaxe) dieses Linienkreuzes zu verstehen. Die abgesehen vom Vorzeichen bestimmte und nach Voraussetzung endliche Grösse $\operatorname{tg}(\varphi, \varphi')$ nennen wir die *Oeffnung des Keiles*. Den Winkel (φ, φ') können wir, wenn wir wollen, auf das Innere des Intervalls von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ beschränken, doch werden wir im Folgenden nicht den Winkel (φ, φ') selbst, sondern nur die Function $\operatorname{tg}(\varphi, \varphi')$ zu benutzen haben.

Ist die Oeffnung von Null verschieden, so nennen wir den Keil *eigentlich*, andernfalls *uneigentlich*. Den Grenzfall jedoch, in dem die

*) S. die Abhandlung des Verfassers: Eine neue Darstellung der Kräfte der Mechanik durch geometrische Figuren, Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, 9. Jan. 1899 (S. 29 u. ff).

Anfangs- und Endebene eines Keiles zusammenfallen, wollen wir ebensowohl als „eigentlichen“ wie auch als „uneigentlichen“ Keil betrachten.

Wir untersuchen nun vorläufig nur solche Keile, deren Oeffnung von Null verschieden ist, also eigentliche Keile. Stellen wir in gleicher Weise, wie bisher, eine Abhängigkeit her zwischen der Richtung, in der man eine Gerade durchlaufen mag, und dem Sinne einer Drehung um die Gerade, und beachten wir, dass mit der Richtung zugleich auch der Drehungssinn umgekehrt wird, so folgt, dass die Länge eines Stabes und die Oeffnung eines zu demselben Träger gehörigen Keiles in einem völlig bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, wiewohl diese beiden Grössen einzeln genommen nur abgesehen von ihren Vorzeichen bestimmt sind.

I. *Wir können also jedem Stab einen zu demselben Träger gehörigen eigentlichen Keil eindeutig zuordnen, und umgekehrt jedem eigentlichen Keil einen Stab, indem wir festsetzen, dass die Länge des Stabes und die Oeffnung des Keiles einander gleich sein sollen.*

Da Stäbe, deren Gerade in einem im Endlichen gelegenen Punkte o sich schneiden, als geometrische Summen immer wieder solche Stäbe liefern, so folgt bereits, dass es einen Sinn hat, von einer das sogenannte associative und commutative Gesetz befolgenden „geometrischen Addition“ der zu diesen Stäben gehörigen Keile zu reden: Unter der „Summe“ zweier oder mehrerer Keile, die ihre Geraden durch o schicken, wird der Keil verstanden werden können, der zur Summe der zugehörigen Stäbe gehört. *Diese geometrische Summe zweier Keile lässt sich nun aber auch construiren, ohne dass man die ihnen entsprechenden Stäbe benutzt.* Wir können daher unsere Darstellung anders einrichten, indem wir die gemeinte Construction selbst als *Definition* der „Summe“ zweier Keile hinstellen. Dies wollen wir thun, indem wir vorläufig noch die (alsbald wieder aufzuhebende) weitere Beschränkung hinzufügen, dass die Träger der beiden zu betrachtenden Keile von einander verschieden sein sollen. Der aufzustellenden Definition stellen wir zur Vergleichung die Parallelogrammconstruction für die Addition der Stäbe gegenüber. Dabei vermeiden wir, um die Analogie beider Constructionen besser hervortreten zu lassen, mit Absicht den Gebrauch des Wortes „parallel“. Wir nehmen an, dass die zu betrachtenden Keile $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ und $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ dieselbe Anfangsebene ω haben, womit, nach obiger Definition der Gleichheit von Keilen, eine Beschränkung nicht eingeführt wird. $\mathfrak{S}_o^\xi$ und $\mathfrak{S}_o^\eta$ seien die zugehörigen Stäbe mit dem gemeinsamen Anfangspunkte in o.

Man bringe die (nach Voraussetzung von einander verschiedenen) Geraden der Stäbe $\mathfrak{S}_o^\xi$ und $\mathfrak{S}_o^\eta$ mit der unendlich fernen Ebene zum Schnitt in ξ' und η'; man verbinde hierauf ξ mit η' und η mit ξ' durch gerade Linien, und bezeichne deren Schnittpunkt mit ζ.

Dann wird der Stab $\mathfrak{S}_o^\zeta$ die geometrische Summe der Stäbe $\mathfrak{S}_o^\xi$ und $\mathfrak{S}_o^\eta$ genannt, und es wird diese Beziehung durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\zeta$$

ausgedrückt.

1. *Man lege die Ebenen φ' und ψ' senkrecht zur Ebene ω durch die (nach Voraussetzung von einander verschiedenen) Geraden der Keile $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ und $\mathfrak{K}_\omega^\psi$; man bringe hierauf φ mit ψ' und ψ mit φ' zum Schnitt, und bezeichne die Verbindungsebene der Schnittlinien mit χ.*

Dann werde der Keil $\mathfrak{K}_\omega^\chi$ die geometrische Summe der Keile $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ und $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ genannt, und es werde diese Beziehung durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{K}_\omega^\varphi + \mathfrak{K}_\omega^\psi = \mathfrak{K}_\omega^\chi$$

ausgedrückt.

Die Figur der Construction links hatten wir das *Stäbeparallelogramm* genannt, nach Analogie des üblichen Ausdrucks „Parallelogramm der Kräfte“. Es ist bequem, auch für die andere Figur ein besonderes Wort zu haben: Wir werden diese als das *Keiltrapez* bezeichnen.

Statt für den Summenbegriff rechts das associative Gesetz besonders nachzuweisen, können wir sogleich noch einen Schritt weiter gehen, indem wir — zunächst für zwei Stäbe, deren von einander verschiedene Gerade sich *im Endlichen* schneiden — den folgenden Satz begründen:

„Stäbe auf einander schneidenden Geraden werden geometrisch „addirt, indem man die mit ihnen verbundenen *(eigentlichen)* Keile „geometrisch addirt, und umgekehrt.“

Da dieser Satz für unsere Untersuchung grundlegend ist, so halten wir es nicht für überflüssig, ihn auf mehrere verschiedene Arten zu beweisen.

Erster Beweis. Wir gehen von der durch die Gleichung $\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\zeta$ dargestellten Parallelogrammconstruction aus. Wir betrachten etwa — was uns frei steht — die Richtungen $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ als positiv und construiren dann, nach der unter I angegebenen Regel, die Ebenen φ und ψ, derart, dass

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\omega, \varphi) = \overline{o\xi}, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\omega, \psi) = \overline{o\eta}$$

wird. (Man vergleiche die beigegebene Figur 5, in der die genannten Ebenen durch ihre Schnittlinien mit einer zu $o\zeta$ senkrechten Ebene begrenzt erscheinen.) Nun construiren wir die Ebenen φ', ψ' durch

$o\xi$ und $o\eta$ senkrecht auf ω, sodann deren (in der Figur mit $o\xi_1$ und $o\eta_1$ bezeichnete) Schnittlinien mit ψ und φ, endlich die beiden Ebenen χ' und χ'', die diese Schnittlinien mit der Geraden $o\xi$ verbinden. $\gamma' = (\omega, \chi')$ und $\gamma'' = (\omega, \chi'')$ seien die beiden Winkel, die diese Ebenen mit ω bilden. Die Behauptung ist dann, dass

$$\operatorname{tg}\gamma' = \overline{o\xi} = \operatorname{tg}\gamma''.$$

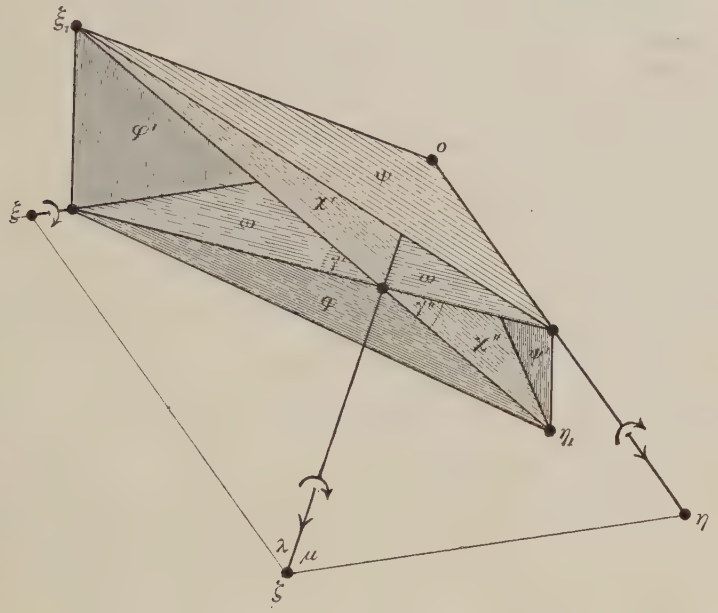


Fig. 5.

Diese Gleichungen bestehen aber in der That. Nehmen wir nämlich in den Ebenen ω, φ', ψ' geeignete Drehungsrichtungen als positiv an, und setzen wir dann noch zur Abkürzung

$$\lambda = \angle\, \xi o \eta, \quad \mu = \angle\, \xi o \xi,$$

so wird

$$\operatorname{tg}\xi\, o\, \xi_1 = \sin\mu \cdot \operatorname{tg}\gamma' = \sin(\lambda + \mu) \cdot \operatorname{tg}\beta$$
$$\operatorname{tg}\eta o \eta_1 = \sin\lambda \cdot \operatorname{tg}\gamma'' = \sin(\lambda + \mu) \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

hieraus aber ergeben sich die behaupteten Gleichungen, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$\overline{o\xi} : \overline{o\eta} : \overline{o\zeta} = \sin\lambda : \sin\mu : \sin(\lambda + \mu).$$

Hätten wir die eingeführten willkürlichen Bestimmungen anders gewählt, so würden zwar die benutzten Hülfsgleichungen ihre Form etwas geändert haben, das Eliminationsresultat aber würde dasselbe geblieben sein.

Zweiter Beweis. Wir umgeben den Punkt o mit einer Kugel vom Radius Eins und construiren die zu den Geraden $o\xi$, $o\eta$, $o\zeta$ gehörigen Hauptkreise, die Schnittlinien der zu diesen Geraden senkrechten Ebenen durch o mit der Kugel. Dann ist, wenn die Richtungen von o nach ξ, η, ζ wieder als die positiven betrachtet werden, auch für jeden dieser Hauptkreise ein positiver Umlaufssinn festgesetzt. Wir verschieben nun das Parallelogramm $o\xi\zeta\eta$ parallel zu sich selbst und senkrecht zu seiner Ebene ω derart, dass die Ecke o in einen der Schnittpunkte o' der construirten Hauptkreise zu liegen kommt, und drehen es hierauf um einen rechten Winkel, so dass in seiner neuen Lage $o'\xi_1\zeta_1\eta_1$ die Richtungen von o' nach ξ_1, η_1, ζ_1 in die positiven Richtungen der Tangenten der genannten Hauptkreise fallen. (Vgl. Fig. 6, in der der Deutlichkeit wegen die Diagonale $o'\zeta_1$ ausgelassen ist.) Jetzt übertragen wir durch Projection aus dem Kugelmittelpunkte o die Parallelogrammconstruction auf die Kugelfläche. Dann entsteht zunächst eine *„geometrische Addition sphärischer Stäbe“:*

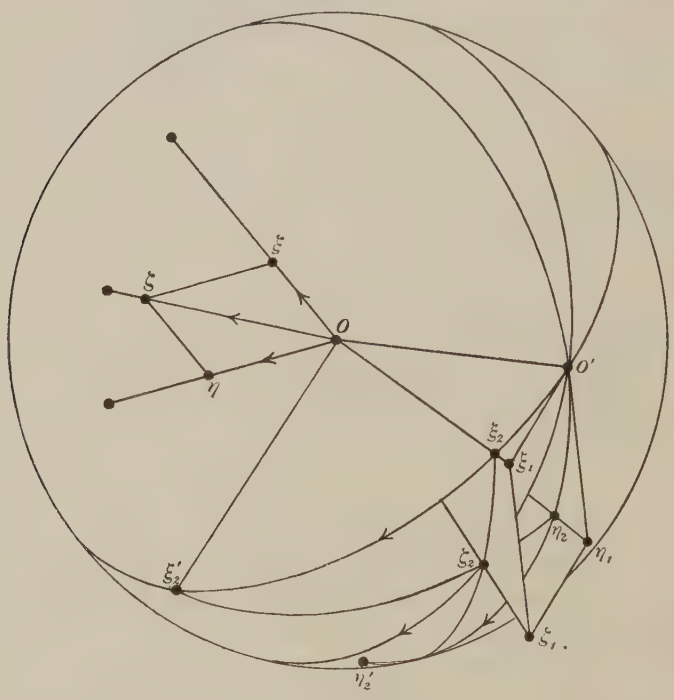


Fig. 6.

Wir verstehen unter einem *„sphärischen Stabe“* s_ξ^η einen Hauptkreisbogen mit dem „Anfangspunkt“ ξ und dem „Endpunkt“ η, der auf seinem Hauptkreise beliebig verschoben werden darf; und wir be-

trachten zwei solche sphärische Stäbe auch dann als „gleich", wenn der eine aus dem anderen dadurch hervorgeht, dass man einen der Punkte ξ, η durch den diametral gegenüberliegenden Punkt der Kugel ersetzt. Die *Länge* eines solchen Stabes, der sphärische Abstand (ξ, η) ist also eine mod. π bestimmte Grösse, von der wir annehmen wollen, dass sie mod. π von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist. Die Grösse $\operatorname{tg}(\xi, \eta)$, die *Oeffnung* des sphärischen Stabes, wird nach dieser unserer Voraussetzung eine endliche Grösse sein.

Unter der *geometrischen Summe* $s_{o'}^{\xi_2} + s_{o'}^{\eta_2} = s_{o'}^{\zeta_2}$ wird nunmehr ein sphärischer Stab zu verstehen sein, der so construirt wird: Man suche auf den Hauptkreisen durch o' und ξ_2, η_2 die Punktepaare ξ_2', ξ_2'' und η_2', η_2'', die von o' um einen Quadranten abstehen; verbinde das erste Punktepaar mit η_2 durch einen Hauptkreis und ebenso das zweite mit ξ_2 (s. die Figur), und suche endlich die Schnittpunkte dieser beiden letzten Hauptkreise. ζ_2 ist dann irgend einer dieser Schnittpunkte*).

Nunmehr suche man zu dieser Construction, die wir mit dem Namen des *sphärischen Stäbevierecks* belegen können, die correlativ (dualistisch) entsprechende Construction, indem man jeden der Punkte o', ξ_2, ξ_2', η_2, η_2', ζ durch den Hauptkreis ersetzt, der als Aequator der Kugel betrachtet, seinen Pol in diesem Punkte hat. Aus der geometrischen Addition der sphärischen Stäbe geht jetzt hervor eine *„geometrische Addition sphärischer Keile"* durch das *sphärische Keiltrapez*, wobei ein „sphärischer Keil" nunmehr eine durch zwei einander nicht rechtwinklig schneidende Hauptkreise begrenzte Figur auf der Kugelfläche ist, wie wohl nicht im Einzelnen ausgeführt zu werden braucht. Dann stehen die aus den genannten Punkten der Reihe nach hervorgehenden Hauptkreise ω, φ, φ', ψ, ψ', χ, oder vielmehr die sie ausschneidenden Ebenen, augenscheinlich in eben der Beziehung zu einander und zu den Stäben $\mathfrak{S}_o^{\xi}$, $\mathfrak{S}_o^{\eta}$, $\mathfrak{S}_o^{\zeta}$, die in unserem Satze behauptet wird: Die Ebenen ω, φ, φ' z. B. gehen durch o, ξ; es ist $\operatorname{tg}(\omega, \varphi) = \overline{o\xi}$; φ' ist senkrecht auf ω; χ endlich verbindet den Schnittstrahl von φ' und ψ mit dem Schnittstrahl von φ und ψ'.

Die Benutzung der Kugelfläche ist offenbar für diesen Beweis nicht wesentlich; sie verleiht ihm aber grössere Anschaulichkeit.

---

*) Diese geometrische Addition sphärischer Stäbe ist nicht zu verwechseln mit der von Hamilton so genannten Addition von Hauptkreisbogen auf einer Kugel. Diese letzte, die mit der Zusammensetzung der Umwendungen im Strahlenbündel identisch ist, befolgt *nicht* das commutative Gesetz; sie wird daher, wie schon H. Hankel hervorgehoben hat, besser überhaupt nicht als Addition bezeichnet.

Dieser zweite Beweis dürfte trotz seiner grösseren Länge im Allgemeinen vor dem ersten und ebenso vor dem sogleich anzuführenden dritten Beweis den Vorzug verdienen, weil er die Wurzel der formalen Analogie bloslegt, die zwischen den Constructionen des Stäbeparallelogramms und des Keiltrapezes besteht. Er kann aber nicht wie der erste (und dritte) Beweis auf den nachher zu betrachtenden Grenzfall ausgedehnt werden, in dem der mit o bezeichnete Punkt ins Unendliche rückt. Am einfachsten ist wohl der nun folgende dritte Beweis, der ebenso wie der zweite keinerlei Rechnung erfordert.

Dritter Beweis. Man bezeichne mit ω die Ebene der drei Stäbe $\mathfrak{S}_o^\xi$ $\mathfrak{S}_o^\eta$, $\mathfrak{S}_o^\zeta$, die in der Beziehung $\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\zeta$ stehen, und construire dann die Ebenen φ, ψ, χ so, dass

$$\operatorname{tg}(\omega, \varphi) = \overline{o\xi}, \quad \operatorname{tg}(\omega, \psi) = \overline{o\eta}, \quad \operatorname{tg}(\omega, \chi) = \overline{o\zeta}.$$

Man errichte sodann in irgend einem Punkte $\bar{o}$ von ω eine Senkrechte und nenne x', y', z' deren Schnittpunkte mit φ, ψ, χ. Dann ist die Länge des Stabes $\mathfrak{S}_o^{x'}$ z. B. gleich der Fläche des Parallelogramms, das durch den Punkt $\bar{o}$ und den Stab $\mathfrak{S}_o^\xi$ bestimmt wird. Nach einem bekannten elementaren Satze folgt nun, dass zwischen den durch $\bar{o}$ und x', y', z' bestimmten Stäben die Beziehung besteht

$$\mathfrak{S}_o^{x'} + \mathfrak{S}_o^{y'} = \mathfrak{S}_o^{z'}.$$

Lässt man den Punkt $\bar{o}$ in die Schnittlinie von ω und φ rücken, so fallen $\bar{o}$ und x', und also auch y' und z' zusammen: Die Ebene χ verbindet also die Schnittlinien der Ebenen φ' und ψ, φ und ψ'.

Wir werden den diesem Beweis zu Grunde liegenden Gedanken später noch bedeutend verallgemeinern (§ 6).

§ 5.

Fortsetzung: Formale Summen von Keilen.

Nachdem wir nunmehr unseren Lehrsatz begründet haben, zeigt sich, wie die Definition I. vervollständigt werden muss, wenn man zu einem geschlossenen und dann von selbst mit der Addition der Stäbe parallel laufenden System von Operationen gelangen will.

Zunächst ist jetzt der Grenzfall in Betracht zu ziehen, in dem die beiden Begrenzungsebenen zusammenfallen. Ein derartiger, wie schon erwähnt, „eigentlicher“ oder „uneigentlicher“ Keil $\mathfrak{K}_\omega^\omega$ hat einen unbestimmten Träger. Wir werden alle solche Keile als einander „gleich“ erachten müssen; und da nach unserer Definition der geometrischen Summe zweier Keile, deren Gerade den Punkt o enthalten,

$$\mathfrak{K}_\omega^\varphi + \mathfrak{K}_\omega^\omega = \mathfrak{K}_\omega^\varphi$$

ist, so werden wir die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{K}_\omega^\omega = 0$$

anzusetzen haben. Dieser formalen Bestimmung sind dann noch die folgenden wirkliche Constructionen enthaltenden Definitionen hinzuzufügen:

2. *Unter der geometrischen Summe zweier eigentlicher Keile* $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ *und* $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ *mit gemeinsamem Träger ist der Keil* $\mathfrak{K}_\omega^\chi$ *desselben Trägers zu verstehen, dessen Oeffnung gleich der Summe der Oeffnungen von* $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ *und* $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ *ist.*

Hieraus folgt

$$\mathfrak{K}_\omega^\varphi + \mathfrak{K}_\varphi^\omega = 0.$$

3. *Wenn c eine positive oder negative Zahl bedeutet, so ist unter dem c-fachen eines eigentlichen Keiles* $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$, *oder unter dem geometrischen Product des Keiles und der Zahl c der Keil desselben Trägers zu verstehen, dessen Oeffnung gleich der c-fachen Oeffnung von* $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ *ist:*

$$\mathfrak{K}_\omega^\psi = c \cdot \mathfrak{K}_\omega^\varphi, \quad \textit{wenn} \quad \operatorname{tg}(\omega, \psi) = c \cdot \operatorname{tg}(\omega, \varphi).$$

Hiermit sind die eingeführten Beschränkungen so weit aufgehoben, dass der auf S. 32 ausgesprochene Satz nunmehr völlig allgemein gilt für beliebig viele Stäbe und Keile, deren Gerade alle denselben im Endlichen gelegenen Punkt o enthalten. Es folgt also, dass die bis jetzt nur für diesen Fall definirte „geometrische Addition" der Keile nicht nur das *commutative*, sondern auch das *associative Gesetz* erfüllt, und dass sie mit der unter 3. definirten Multiplication eines Keiles mit einer Zahl durch das *distributive Gesetz* verbunden ist. (Vgl. S. 24.)

Nunmehr erweitern wir unsere Definition 1., *indem wir bestimmen, dass sie auch dann noch gültig bleiben soll, wenn die Geraden der Keile* $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ *und* $\mathfrak{K}_\omega^\psi$ *sich in einem uneigentlichen Punkte schneiden, und dass sie ferner auch dann gelten soll, wenn einer der beiden gegebenen Keile selbst uneigentlich ist.*

Es werden also jetzt Keile von der Oeffnung Null in die Betrachtung eingeführt, solche, die von parallelen, aber nicht zusammenfallenden Ebenen begrenzt sind. Unter der Ebene φ', die in der Geraden eines solchen uneigentlichen Keiles $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ auf der Ebene ω senkrecht errichtet ist, wird natürlich die unendlich ferne Ebene zu verstehen sein.

Wir werden also nun überhaupt Keile betrachten, deren Gerade einen bestimmten der unendlich fernen Ebene angehörigen Punkt o enthalten, und wir werden unsere Begriffsbildungen so zu ergänzen

trachten, dass auch für diesen Fall noch ein geschlossenes, als „geometrische Addition der Keile“ zu bezeichnendes System von Constructionen entsteht, das sich dem bereits betrachteten System als Grenzfall anschliesst. Dazu ist nöthig die Aufstellung von zwei neuen Definitionen: Wir müssen erstens sagen, was unter der „geometrischen Summe“ von zwei Keilen von der Oeffnung Null verstanden werden soll, deren Gerade den unendlich fernen Punkt o enthalten, zweitens, was das c-fache eines solchen Keiles bedeuten soll.

Wir bemerken nun, dass mit jedem uneigentlichen Keil $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ *ein Vector* $\mathfrak{V}_{\xi}^{\xi'}$ *desselben Trägers verbunden ist, der auch umgekehrt wieder diesen Keil eindeutig bestimmt:*

Die mit ξ und ξ' bezeichneten Punkte sind die Schnittpunkte von φ und φ' mit irgend einer zu beiden Ebenen senkrechten Geraden. Die Länge des zu dem Keile $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ gehörigen Vectors, d. i. den Abstand der Ebenen φ, φ', nennen wir *die Sperrung des uneigentlichen Keiles* $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$. Das Vorzeichen dieser Grösse ist natürlich abhängig von der der Geraden des Vectors willkürlich beizulegenden Richtung. Nunmehr können wir die fraglichen Definitionen wie folgt fassen:

4. *Unter der geometrischen Summe zweier uneigentlicher Keile* $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ *und* $\mathfrak{K}_\psi^{\psi'}$ *soll der Keil* $\mathfrak{K}_\chi^{\chi'}$ *verstanden werden, der mit der geometrischen Summe der beiden Vectoren verbunden ist, die zu den Keilen* $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ *und* $\mathfrak{K}_\psi^{\psi'}$ *gehören.*

Keile von verschwindender Oeffnung, oder, was dasselbe ist, Keile, deren Träger uneigentliche Linienkreuze sind, werden also „geometrisch addirt“, indem man die zugehörigen Vectoren geometrisch addirt.

5. *Unter dem geometrischen Product eines uneigentlichen Keiles* $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ *mit einer Zahl c ist der Keil desselben Trägers zu verstehen, dessen Sperrung gleich der c-fachen Sperrung des Keiles* $\mathfrak{K}_\varphi^{\varphi'}$ *ist.*

(Man vergleiche die Definition 3.) Es wird also ein solcher Keil mit einer Zahl geometrisch multiplicirt, indem man den zugehörigen Vector mit dieser Zahl geometrisch multiplicirt.

Beide Definitionen 4. und 5. beziehen sich, wie gesagt, zunächst nur auf Keile, deren Gerade durch den uneigentlichen Punkt o laufen; wir werden aber diese Beschänkung alsbald fallen lassen, und wir haben sie daher in die Definition selbst nicht mit aufgenommen.

Nunmehr können wir irgend zwei eigentliche oder uneigentliche Keile, deren Gerade den unendlich fernen Punkt o enthalten, „geometrisch addiren“; wir erhalten immer einen neuen Keil der gleichen Eigenschaft. Dass aber auch diese Operation den Namen einer geo-

metrischen Addition verdient, dass sie nämlich das associative und commutative Gesetz erfüllt, das bleibt noch zu beweisen. Diesen Beweis erbringen wir, indem wir zeigen, dass — mutatis mutandis — der Zusammenhang zwischen Summen von Stäben und Summen von Keilen auch in dem jetzt behandelten Fall erhalten bleibt. Um das zu können, müssen wir zuvor die unter I. festgesetzte Zuordnung erweitern, indem wir auch hier den Uebergang zu uneigentlichen Keilen durchführen. Dabei geht aus dem Stab, der dem Keile zugeordnet ist, ein Stäbepaar, d. h. ein Paar von Stäben von numerisch gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung hervor. (Man vergleiche die Figur 7, und mache sich den Grenzübergang deutlich, durch den sie aus der Figur 5, S. 33 entsteht.) Wir erinnern nun daran, dass auch zu jedem solchen Stäbepaar ein Vector gehört: Drehungssinn und Moment des Stäbepaares bestimmen Richtung und Länge dieses senkrecht zur Ebene des Stäbepaares gelegten Vectors (vgl. S. 25). So ergiebt sich denn fast unmittelbar:

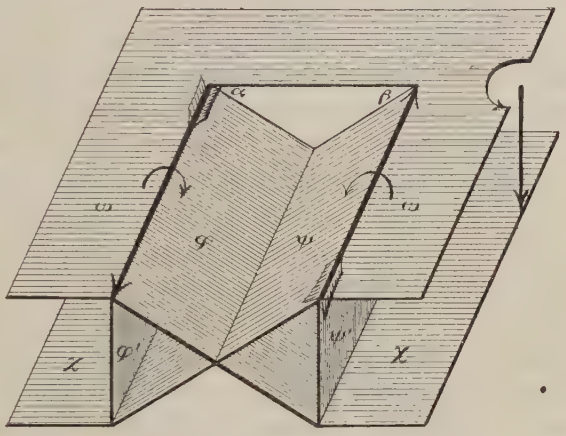


Fig. 7.

II. *Als Grenzfall der unter* I. *beschriebenen Zuordnung zwischen Stäben und eigentlichen Keilen besteht eine Zuordnung zwischen Stäbepaaren und uneigentlichen Keilen. Diese letzte Zuordnung ist unmittelbar dadurch bestimmt, dass zu Stäbepaar und Keil der nämliche Vector gehört.*

Die dreierlei Figuren: Vector, Stäbepaar und Keil von der Oeffnung Null bestimmen also einander wechselweise, derart, dass jede einzelne von ihnen die beiden anderen eindeutig festlegt. Die Länge des Vectors misst das Moment des Stäbepaares und zugleich die Sperrung des uneigentlichen Keiles (vgl. Fig. 7). Dabei hängt das Vorzeichen der genannten drei untereinander gleichen Grössen ab von der Richtung, die man der Geraden des Vectors nach Belieben beilegen kann. *Träger der dreierlei Gebilde ist ein und dasselbe uneigentliche Linien-*

kreuz. Dem Satz des § 4 aber können wir jetzt die folgende erweiterte Fassung geben:

III. *Stäbe oder Stäbepaare mit einander schneidenden oder auch zusammenfallenden Geraden werden geometrisch addirt, indem man die mit ihnen verbundenen Keile geometrisch addirt, und umgekehrt.*

Unter der Geraden eines Stäbepaares ist natürlich die unendlich ferne Gerade seiner Ebene zu verstehen, die Nebenaxe seines Trägers, *die* uneigentliche Gerade, die beim Grenzübergang von einem Stab zu dem Stäbepaar aus der Geraden des Stabes hervorgeht.

Wir haben also nunmehr ein geschlossenes, als „geometrische Addition der Keile" zu bezeichnendes System von Operationen, die als Summe beliebig vieler Keile immer wieder einen neuen eindeutig bestimmten und von der Anordnung und Zusammenfassung der Summanden unabhängigen Keil, oder aber die Null hervorgehen lassen, jedesmal wenn die Geraden aller gegebenen Keile denselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt enthalten, oder auch — wie man sogleich erkennt — wenn sie in derselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Ebene enthalten sind. Vorausgesetzt ist dabei, dass alle Keile mit zusammenfallenden Ebenen als einander gleich erachtet und „gleich Null" gesetzt werden.

Nunmehr haben wir nur noch einen letzten Schritt zu thun, indem wir den Begriff der *„formalen Summe"* solcher Keile bilden, deren Gerade einander *nicht* schneiden. Es wird, wie bei den Summen von Stäben, durch eine besondere Definition bestimmt, dass eine solche Summe sich nicht ändern soll, wen man irgend zwei einander entgegengesetzt gleiche Keile zu ihr hinzufügt; dass also zwei solche Summen, die auf diese Weise, unter Verwendung der Constructionen des Keiltrapezes (Nr. 1) und des Vectorendreiecks (Nr. 4) in einander übergeführt werden können, als *gleich* gelten sollen. Dann folgt ohne Weiteres, dass auch dieser erweiterte Summenbegriff zulässig und eine geometrische Addition im üblichen Sinne ist, mit associativem und commutativem Gesetz, und mit der Multiplication durch eine Zahl verbunden durch das distributive Gesetz; denn es versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst, dass jede solche Summe zu einer völlig bestimmten (formalen) Summe von Stäben gehört; für die Stäbesummen aber ist die genannte Eigenschaft bekannt. (S. § 3.)

Dem in § 3 angeführten Satz, der von der Reduction einer Summe von Stäben auf die Normalform handelt, kann nun ein ganz ähnlicher Satz gegenübergestellt werden, der sich auf die Reduction einer Summe

von Keilen auf eine ebenfalls als *Normalform* zu bezeichnende besondere Gestalt bezieht:

IV. *Die geometrische Summe beliebig vieler Keile (in endlicher Zahl) kann entweder (a) als Summe von zwei und nicht weniger Keilen dargestellt werden; oder (b) als ein einziger eigentlicher Keil; oder (c) als ein einziger uneigentlicher Keil. Oder endlich (d), die Summe ist gleich Null.*

Im Falle (a) lässt sich die Summe insbesondere immer und nur auf eine Weise so darstellen, dass beide Keile denselben Träger haben (im weiteren Sinne des Wortes; s. oben).

Mit anderen Worten: Im Falle (*a*) lässt sich die Summe von Keilen immer und nur auf eine Weise auf die Normalform

$$\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'} + \mathfrak{K}_{\psi}^{\psi'}$$

bringen, in der die Summanden die folgenden Eigenschaften haben: Die Ebenen φ, φ' schneiden sich unter einem von Null und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel, die Ebenen ψ, ψ' sind parallel und senkrecht zur Schnittlinie von φ, φ'. Beim Uebergang zum Grenzfalle (*b*) verschwindet in dieser Summe der zweite Summand, beim Uebergang zu (*c*) der erste.

Der gemeinsame Träger des eigentlichen Keils $\mathfrak{K}'$ und des uneigentlichen Keils $\mathfrak{K}''$, oder wenn nur einer von diesen von Null verschieden ist, der Träger eben dieses Keiles, heisst *Träger der geometrischen Summe von Keilen.* Dieser Träger ist also ein bestimmtes eigentliches oder uneigentliches Linienkreuz, oder — im Falle (*c*) — „im weiteren Sinne“ ein in gewissem Grade unbestimmtes eigentliches Linienkreuz: Man vergleiche die in § 3 gegebene entsprechende Definition des Trägers einer Summe von Stäben. (S. 23, 28.)

Natürlich kann auch die Construction, die zu unserer Normalform führt, bewerkstelligt werden, ohne dass man die geometrische Addition der Stäbe irgendwie benutzt. Man kann zunächst jeden Keil $\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi}$ als geometrische Summe zweier Keile $\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi_1}$ und $\mathfrak{K}_{\omega}^{\psi}$ darstellen, von denen der zweite uneigentlich ist, während die Gerade des ersten durch einen gegebenen Punkt o geht. (Vgl. Fig. 8.) Handelt es sich sodann darum, die geometrische Summe zweier Keile $\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi}$ und $\mathfrak{K}_{\omega'}^{\psi}$, von denen der zweite uneigentlich ist, auf die Normalform zu bringen, so zerlege man

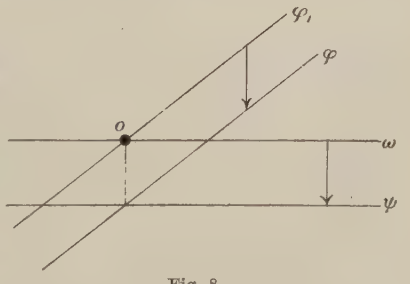


Fig. 8.

den Vector $\mathfrak{V}_o^\xi$ von $\mathfrak{K}_{\omega'}^{\psi}$ nach der Richtung der Geraden von $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ und senkrecht dazu, $\mathfrak{V}_o^\zeta = \mathfrak{V}_o^\xi + \mathfrak{V}_o^\eta$. (Vgl. Fig. 9.) Nimmt man dann als Anfangsebene ω des Keiles $\mathfrak{K}_\omega^\varphi$ die zu dem Vector $\mathfrak{V}_o^\eta$ senkrechte Ebene seiner Geraden, und lässt man die Ebene φ' aus φ durch Verschiebung längs dieses Vectors hervorgehen, so ist die vorgelegte Summe gleich dem Keil $\mathfrak{K}_\omega^{\varphi'}$, vermehrt um den zu dem Vector $\mathfrak{V}_o^\xi$ gehörigen Keil.

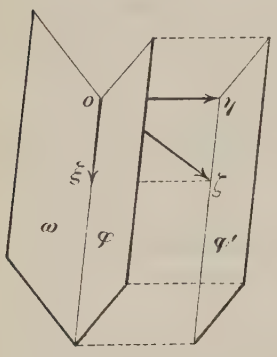


Fig. 9.

Ein in § 3 hervorgehobener Satz kann nunmehr so ausgedrückt werden:

„Ist eine Gerade $\mathfrak{D}$ Querlinie des Trägers zweier geometrischer Summen $\Sigma\mathfrak{K}_1^{(i)}$ und $\Sigma\mathfrak{K}_2^{(i)}$ von Keilen, so ist sie auch Querlinie des Trägers einer jeden Summe der Form

$$c_1 \cdot \Sigma\mathfrak{K}_1^{(i)} + c_2 \cdot \Sigma\mathfrak{K}_2^{(i)} .“$$

Endlich ist klar, wie der Begriff „linear-unabhängiger“ Summen von Keilen zu fassen ist.

Wir erwähnen noch eine sehr nahe liegende Construction, und zwar deshalb, weil sie auch in der Form verwandt ist der auf dem Gebrauche des Parallelepipeds beruhenden Construction, vermöge deren man drei linear-unabhängige Stäbe mit gemeinsamem Anfangspunkt zusammensetzen kann:

„Sind drei Keile $\mathfrak{K}_\omega^{\varphi_1}$, $\mathfrak{K}_\omega^{\varphi_2}$, $\mathfrak{K}_\omega^{\varphi_3}$ mit gemeinsamer Anfangsebene linear-unabhängig, so wird die Endebene φ ihrer geometrischen Summe

$$\mathfrak{K}_\omega^\varphi = \mathfrak{K}_\omega^{\varphi_1} + \mathfrak{K}_\omega^{\varphi_2} + \mathfrak{K}_\omega^{\varphi_3}$$

so gefunden: Man errichte in den Schnittpunkten $\omega, \varphi_2, \varphi_3$; $\omega, \varphi_3, \varphi_1$; $\omega, \varphi_1, \varphi_2$ Senkrechte auf der Ebene ω, und bringe diese der Reihe nach mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zum Schnitt. Die Verbindungsebene der Schnittpunkte ist die Ebene φ.“

Wir haben nunmehr unser nächstes Ziel erreicht. Wir haben nachgewiesen, dass parallel mit der geometrischen Addition der Stäbe und mit dieser invariant verknüpft ein zweites System geometrischer Constructionen läuft, das, im Grossen und Ganzen, von dem ersten völlig verschieden ist: Nur das *Vectorendreieck* ist ein beiden Systemen gemeinsames Constructionselement, an Stelle des *Stäbeparallelogramms* aber tritt das *Keiltrapez*.

Uebrigens können wir bemerken, dass wir die Geometrie der Keile noch folgerichtiger hätten ausbilden können, freilich nicht ohne Beeinträchtigung ihrer Einfachheit. Man kann nämlich auch dem Vector,

der als ein Stab von erhöhter Beweglichkeit aufgefasst werden kann, in der Geometrie der Keile eine analoge Figur gegenüberstellen. Diese, die man etwa als *Vectorkeil* würde bezeichnen können, unterscheidet sich von dem *eigentlichen* Keil dadurch, dass sie beliebig parallel verschoben werden darf. Die geometrische Addition dieser Vectorkeile, die ebenfalls durch das Keiltrapez erfolgt, und offenbar nicht wesentlich verschieden ist von der im § 4 betrachteten geometrischen Addition sphärischer Keile, ist äquivalent der geometrischen Addition der Vectoren. —

Nunmehr gehen wir dazu über, unsere Untersuchung mit der in § 1 und § 2 vorgeführten Theorie in Verbindung zu bringen.

§ 6.

Die lineare Superposition der Bewegungen.

Unsere ferneren Betrachtungen stützen sich auf mehrere Hülfssätze, die wir nun zunächst entwickeln wollen.

Es sei gegeben ein Stab $\mathfrak{S}$, und der mit diesem verbundene Keil $\mathfrak{K}$.

Wir nehmen nun zuerst einen eigentlichen Punkt $\bar{x}$ willkürlich an und legen durch den Punkt $\bar{x}$ einen Stab, der dem Stabe $\mathfrak{S}$ parallel, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Beide Stäbe bilden, zu einer Summe vereinigt, ein Stäbepaar, und diesem ist, nach § 2, ein bestimmter Vector zugeordnet, dessen Gerade senkrecht steht auf der Ebene ω, die den Punkt $\bar{x}$ mit der Geraden des Stabes $\mathfrak{S}$ verbindet. Dieser Vector aber stimmt wiederum an Länge und Richtung überein mit einem Stabe

$$\mathfrak{S}_x^{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}_x^{x'} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x'},$$

dessen Gerade durch den Punkt $\bar{x}$ geht, und dessen End- oder Anfangspunkt daher in diesen Punkt $\bar{x}$ verlegt werden kann, wie wir es in unserer Formel angedeutet haben. Die in dieser Construction auftretenden, mit x und x' bezeichneten Punkte können nun sehr einfach construirt werden mit Hülfe des Keiles $\mathfrak{K}$. Stellen wir nämlich diesen in doppelter Form dar, einmal so, dass die Ebene ω durch $\bar{x}$ und die

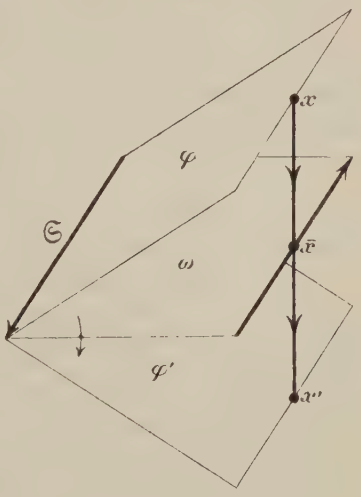


Fig. 10.

Gerade des Keiles die Endebene, und dann so, dass diese selbe Ebene ω die Anfangsebene des Keiles wird, setzen wir also etwa

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\varphi}^{\omega} = \mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi'},$$

so werden die Punkte x, x' offenbar gefunden, wenn man eine in $\bar{x}$ auf ω errichtete Senkrechte mit den Ebenen φ und φ' zum Schnitt bringt. (Siehe die Figur 10.)

Wir wollen nun sagen, dass der so construirte Stab $\mathfrak{S}_x^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x'}$ *zum Punkte* $\bar{x}$ *gehört und den Keil* $\mathfrak{K}$ *begleitet.*

Aus diesem Begriff ergiebt sich nun sofort der umfassendere *Begriff der begleitenden Stäbe einer geometrischen Summe von Keilen.* Construirt man nämlich zu jedem Summanden den begleitenden Stab, und bildet man die geometrische Summe aller dieser Stäbe, so ist klar, dass man einen neuen *zum Punkte* $\bar{x}$ *gehörigen* Stab erhält, der unabhängig ist von der Anordnung der Summanden: Diesen Stab werden wir also den begleitenden Stab der Summe nennen können.

Werden Keile, oder Summen von solchen, geometrisch addirt, so werden auch die sie begleitenden, zum selben Punkt $\bar{x}$ *gehörigen Stäbe geometrisch addirt.*

Entsprechendes kann natürlich auch von der geometrischen Multiplication einer Summe von Keilen mit einer Zahl c ausgesagt werden.

Wir führen nun eine verwandte Construction aus, indem wir von einer gegebenen eigentlichen Ebene $\underline{u}$ ausgehen.

Wir projiciren den angenommenen zu dem Keil $\mathfrak{K}$ gehörigen Stab $\mathfrak{S}$ orthogonal auf die Ebene $\underline{u}$, wodurch ein neuer Stab entsteht, dessen Gerade in dieser Ebene liegt. Der zu diesem Stab gehörige Keil, der in der doppelten Form

$$\mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}'}$$

dargestellt werden kann, soll dann *der zur Ebene* $\underline{u}$ *gehörige den Keil* $\mathfrak{K}$ *begleitende Keil* heissen.

Da zwischen den Projectionen von irgend welchen Stäben auf eine Ebene (ausser anderen) eben dieselben linearen Relationen bestehen müssen, wie zwischen diesen Stäben selbst, so ergiebt sich, dass auch jeder uneigentliche Keil, und ferner jede *geometrische Summe* von Keilen einen *begleitenden* Keil hat, der „zu einer gegebenen Ebene $\underline{u}$ gehört“; nämlich die geometrische Summe aller begleitenden Keile der Summanden, die ja, nach § 5, immer wieder ein einzelner Keil ist.

Werden also Keile, oder Summen von solchen, geometrisch addirt, so werden auch die sie begleitenden, zur selben Ebene $\underline{u}$ *gehörigen Keile geometrisch addirt.*

Es ist für das Folgende nothwendig, dass wir uns deutlich machen, wie der zu $\underline{u}$ gehörige einen einzelnen Keil $\mathfrak{K}$ begleitende Keil gefunden werden kann, ohne dass man den zugehörigen Stab oder das zugehörige Stäbepaar $\mathfrak{S}$ bei der Construction benutzt.

Wir nehmen *zuerst* an, dass die Gerade des Keiles $\mathfrak{K}$ eigentlich und nicht parallel ist zu der Ebene $\underline{u}$. Dann giebt es wenigstens eine in $\underline{u}$ enthaltene Querlinie $\mathfrak{D}$ des Trägers von $\mathfrak{K}$. Stellt man nun den Keil $\mathfrak{K}$ in der doppelten Form

$$\mathfrak{K}_{\varphi}^{\omega} = \mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi'}$$

dar, so dass die Ebene ω durch $\mathfrak{D}$ geht, so werden die mit φ und φ' bezeichneten Ebenen von einer durch $\mathfrak{D}$ normal zur Geraden von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ gelegten Ebene in zwei Geraden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ geschnitten. Construirt man dann in $\underline{u}$ *die* Senkrechte auf $\mathfrak{D}$, die die Gerade von $\mathfrak{K}$ trifft, und verbindet man diese Senkrechte mit den Geraden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ durch Ebenen u, u', so ist der Keil

$$\mathfrak{K}_{u}^{\underline{u}} = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u'}$$

der gesuchte. Es ist nämlich, wenn

$$l = \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}(\mathfrak{U}, \mathfrak{D}) = \operatorname{tg}(\mathfrak{D}, \mathfrak{U}')$$

die Länge des Stabes $\mathfrak{S}$,

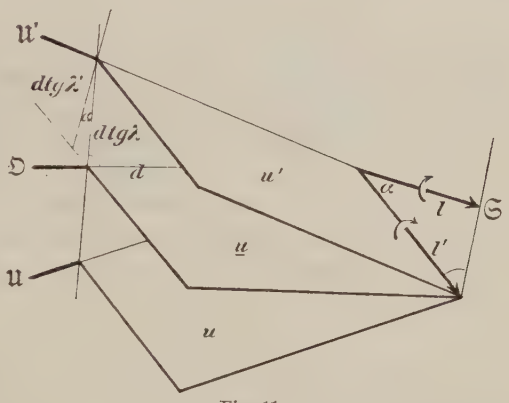


Fig. 11.

und $l' = l \cdot \cos\alpha$ deren Projection auf die Ebene $\underline{u}$ bezeichnet, und wenn ferner

$$\operatorname{tg}\lambda' = \operatorname{tg}(u, \underline{u}) = \operatorname{tg}(\underline{u}, u')$$

gesetzt wird, zufolge unserer Construction

$$\operatorname{tg}\lambda' = \operatorname{tg}\lambda \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha = l'.$$

(Man vergleiche die beigegebene Figur 11.)

Wenn *zweitens* der Keil $\mathfrak{K}$ noch als eigentlich, seine Gerade aber parallel zur Ebene $\underline{u}$ angenommen wird, so wird der begleitende Keil dadurch gefunden, dass man den Keil $\mathfrak{K}$ senkrecht zur Ebene $\underline{u}$ verschiebt, bis seine Gerade in diese Ebene hineinfällt.

Wenn *drittens* die Oeffnung des Keiles $\mathfrak{K}$ verschwindet, so gehört der begleitende Keil zu dem Vector, der durch Projection des Vectors von $\mathfrak{K}$ auf die Normale der Ebene $\underline{u}$ entsteht.

Die gefundene Construction lässt sich, im ersten oder zweiten Falle, noch etwas einfacher darstellen. Drehen wir nämlich, im ersten (dem allgemeinen) Falle die Figur der Geraden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{U}'$ um einen rechten Winkel um die Gerade von $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{S}$ (Fig. 11), so werden nach Ausführung dieser Operation die Ebenen φ, ω, φ' der Reihe nach auf u, $\underline{u}$, u' senkrecht stehen. Es ergiebt sich also folgende Construction, die dann auch im zweiten Falle noch anwendbar bleibt:

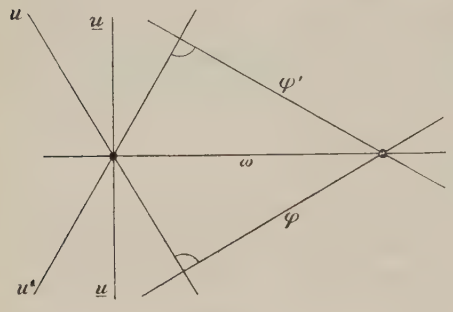


Fig. 11b.

Um den zu $\underline{u}$ gehörigen den eigentlichen Keil $\mathfrak{R}$ begleitenden Keil zu finden, stelle man $\mathfrak{R}$ in der Form $\mathfrak{R}_{\varphi}^{\omega} = \mathfrak{R}_{\omega}^{\varphi'}$ dar, so dass $\omega \perp \underline{u}$. Sind dann u, u' die auf φ und φ' senkrechten Ebenen des Büschels $(\omega, \underline{u})$, so ist $\mathfrak{R}_{u}^{\underline{u}} = \mathfrak{R}_{\underline{u}}^{u'}$ der gesuchte Keil.

(Man vergleiche die schematische Figur 11b.)

Wir werden nunmehr nachweisen, dass die betrachteten durch eine Summe $\Sigma\mathfrak{R}$ von Keilen vermittelten Zuordnungen zwischen Punkten x, $\bar{x}$, x' und Ebenen u, $\underline{u}$, u' identisch sind mit den in § 2 untersuchten Zuordnungen

$$x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x', \quad u\{\mathfrak{T}_2\}\underline{u}\{\mathfrak{T}_1\}u',$$

die durch eine Bewegung bestimmt werden. Diese Bewegung S ist in beiden Fällen dieselbe. Sie wird gefunden, indem man die vorgelegte Summe von Keilen auf die Normalform

$$\mathfrak{R}' + \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_{\varphi}^{\omega} + \mathfrak{R}_{\psi}^{\bar{\omega}} = \mathfrak{R}_{\omega}^{\varphi'} + \mathfrak{R}_{\bar{\omega}}^{\psi'}$$

bringt, und dann die Spiegelungen an den Ebenen φ, ω; ψ, $\bar{\omega}$ oder ω, φ'; $\bar{\omega}$, ψ' hintereinander ausführt:

$$S = \{\varphi, \omega\}\{\psi, \bar{\omega}\} = \{\psi, \bar{\omega}\}\{\varphi, \omega\},$$

$$S = \{\omega, \varphi'\}\{\bar{\omega}, \psi'\} = \{\bar{\omega}, \psi'\}\{\omega, \varphi'\}.$$

Bestimmt man also die Bewegung S demgemäss, so ist immer

$$x\{S\}x', \quad u\{S\}u',$$

wie auch der Punkt $\bar{x}$ und die Ebene $\underline{u}$ gewählt sein mögen, mit deren Hülfe man, durch Vermittelung des die Summe $\Sigma\mathfrak{R}$ begleitenden Stabes und Keiles

$$\mathfrak{S}_{x}^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x'}, \quad \mathfrak{R}_{u}^{\underline{u}} = \mathfrak{R}_{\underline{u}}^{u'}$$

die Punkte x, x' und die Ebenen u, u' definirt hat.

Dass der Satz links richtig ist, zeigt die Figur 12. Zerlegt man die gegebene Summe von Keilen, wie vorgeschrieben, so wird damit auch der begleitende Stab als Summe zweier Stäbe

$$\mathfrak{S}_{x_1}^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x_1'}, \quad \mathfrak{S}_{x_2}^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x_2'}$$

dargestellt. Die Geraden dieser Stäbe stehen aufeinander senkrecht. Jetzt aber ist die Zuordnung zwischen den Punkten x_1 und x_1' vermittelt durch eine Drehung S', deren Axe parallel ist zur Geraden $x_2 x_2'$, und die Zuordnung zwischen x_2 und x_2' ebenso durch eine Schiebung S'' in der Richtung dieser Axe. Die Drehung und die Schiebung sind vertauschbar; die Drehung S' wird erzeugt durch die Spiegelungen $\{\varphi\}, \{\omega\}$ oder $\{\omega\}, \{\varphi'\}$, die Spiegelungen an den Begrenzungsebenen des Keiles $\mathfrak{K}'$ (deren Spuren in der Figur angegeben sind); ebenso die Schiebung S'' durch die Spiegelungen an den Begrenzungsebenen des Keiles $\mathfrak{K}''$; setzt man schliesslich Drehung und Schiebung zusammen, so entsteht genau dieselbe Zuordnung zwischen den Punkten x, x', die durch die Summe $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ von Keilen vermittelt wird.

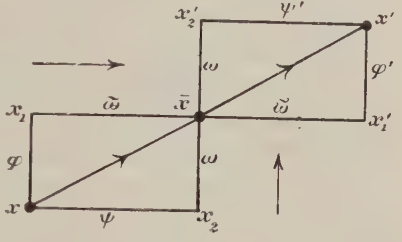


Fig. 12.

Aehnlich beweist man die andere Hälfte des aufgestellten Satzes.

Wir construiren einzeln die beiden Keile $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, die beide zu der Ebene $\underline{u}$ gehören, und von denen der erste den Keil $\mathfrak{K}'$, der zweite den Keil $\mathfrak{K}''$ begleitet. Die Construction beider Keile haben wir vorhin angegeben (man vergleiche die Figur 11 und den zugehörigen Text). Die Construction der Ebenen u_1 und u_1', die zusammen mit $\underline{u}$ den Keil $\mathfrak{K}_1$ begrenzen können, ist nun vollkommen identisch mit der in § 2 angegebenen Construction, vermöge deren wir dort die zwei durch S' einander zugeordneten Ebenen bestimmt hatten, deren eigentliche Winkelhalbirende die Ebene $\underline{u}$ ist. (Man vergleiche die Figur 11 mit der Figur 2, S. 16, die derart specialisirt zu denken ist, dass die Geraden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}'$ einander schneiden.) Ist ferner $\mathfrak{V}''$ der zu dem Keil $\mathfrak{K}''$ gehörige Vector, so ist der zu dem begleitenden Keil $\mathfrak{K}_2$ gehörige Vector $\mathfrak{V}_2$ die Projection von $\mathfrak{V}''$ auf die Normale der Ebene $\underline{u}$ (s. S. 45). Um also die Summe $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$ zu bilden, hat man die Endebene u_1' des Keiles $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u_1'}$ längs des Vectors $\mathfrak{V}_2$ parallel zu verschieben (vgl. die Figur 9, S. 42, und den zugehörigen Text): Wird auf diese Art die Ebene u' erhalten, so ist

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u'}.$$

Statt nun aber die Ebene u_1' um den Vector $\mathfrak{V}_2$ zu verschieben, kann man sie auch um den Vector $\mathfrak{V}''$ selbst verschieben: Denn zerlegt man $\mathfrak{V}''$ in der Richtung der Normale von $\underline{u}$ und senkrecht dazu, so fällt die zweite Componente von $\mathfrak{V}''$ in die Ebene u_1' selbst hinein (man vergleiche die Figur 11; $\mathfrak{V}''$ ist auf der Geraden des zu $\mathfrak{K}'$ gehörigen Stabes zu denken), eine Verschiebung längs dieser zweiten Componente ändert die Ebene u_1' also nicht. Bei einer Verschiebung der Ebene u_1' um $\mathfrak{V}''$ aber geht diese Ebene gerade in die Ebene u' über, die durch die zu $S = S'S''$ gehörige affine Transformation $\mathfrak{T}_1$ der Ebene $\underline{u}$ zugeordnet wird. (Man vergleiche nochmals die Figur 2, S. 16. Die Ebenen u_1 und u_1' sind durch o gehend und parallel zu den Ebenen u, u' zu denken, ebenso sind die zu der Drehung S' gehörigen Umwendungsaxen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}_1'$ parallel zu $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}'$ und sie gehen durch o. Die Ebene u' z. B. geht dann aus u_1' hervor, wenn man die Ebene u_1 längs des Vectors $\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}_o^{\vec{s}'}$ parallel verschiebt, womit dann auch $\mathfrak{U}_1'$ in $\mathfrak{U}'$ übergeht.)

Hiermit haben wir unseren Satz bewiesen. Erinnern wir uns noch, dass nach der Definition des Keiles der Winkel $(\varphi, \omega) = (\omega, \varphi')$ stets von einem Rechten verschieden ist, so sehen wir:

V. *Mit jeder geometrischen Summe von Keilen ist eine Bewegung S verbunden, die keine Umschraubung ist, und umgekehrt.*

Die Summe von Keilen und die Bewegung haben denselben Träger. Zerlegt man S in eine Drehung S' und eine mit dieser vertauschbare Schiebung S'', $S = S'S''$, und bringt man andrerseits die Summe von Keilen auf die Normalform, $\Sigma\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$, so ist die Tangente $\operatorname{tg}\vartheta$ des halben Drehungswinkels von S oder S' die Oeffnung des eigentlichen Keiles $\mathfrak{K}'$ und die halbe Schiebungsgrösse η von S oder S'' ist die Sperrung des uneigentlichen Keiles $\mathfrak{K}''$.

Es gehört also insbesondere zu jedem eigentlichen Keil eine Drehung, zu jedem uneigentlichen eine Schiebung, und zum Keil Null die identische Bewegung.

Wir werden, um für diese Verhältnisse einen einfachen Ausdruck zu haben, sagen, *die Bewegung S und die geometrische Summe von Keilen seien einander associirt.* Wir können dann den oben bewiesenen Satz so ausdrücken:

Ist $\mathfrak{S}_x^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_x^{x'}$ ein begleitender Stab und $\mathfrak{K}_u^u = \mathfrak{K}_u^{u'}$ ein begleitender Keil einer geometrischen Summe von Keilen, so wird dem Punkte x der Punkt x' und der Ebene u die Ebene u' durch die der Summe associirte Bewegung S zugeordnet:

$$x\{S\}x', \quad u\{S\}u'.$$

Wir betrachten nun gleichzeitig verschiedene Summen von Keilen, die nunmehr durch einfache Buchstaben $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen, und die ihnen associirten Bewegungen $S_1, S_2, \ldots$. Bilden wir dann die Summe $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots$, so gehört zu dieser eine neue Bewegung S. Da der nahe liegende Ausdruck „geometrische Addition von Bewegungen" leicht zu Missverständnissen würde Anlass geben können, so wollen wir zur Bezeichnung dieser Abhängigkeit der Bewegung S von den Bewegungen $S_1, S_2, \ldots$ ein anderes Wort wählen: wir nennen die Operation, die zur Construction von S führt, *lineare Superposition* der Bewegungen $S_1, S_2, \ldots$. Das Beiwort „linear" wird zugefügt zum Unterschiede von anderen Arten der Superposition, die später einzuführen sein werden; es soll andeuten, dass diese Art der Superposition in einer nahen Beziehung steht zur Theorie der *collinearen* Transformationen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$.

Zur Erklärung dieser linearen Superposition dienen uns also die folgenden durch das Vorhergehende als richtig nachgewiesenen Sätze:

6a. *Ist der Punkt o Mitte der Sehnen $\xi\xi'$ und $\eta\eta'$ in Bezug auf zwei gegebene Bewegungen, die nicht Umschraubungen sind, und werden die Punkte ζ, ζ' mit Hülfe des Stäbeparallelogramms nach der Vorschrift*

$$\mathfrak{S}_o^{\zeta} = \mathfrak{S}_o^{\xi} + \mathfrak{S}_o^{\eta}$$
$$\mathfrak{S}_o^{\zeta'} = \mathfrak{S}_o^{\xi'} + \mathfrak{S}_o^{\eta'}$$

construirt, so ist $\zeta\zeta'$ Sehne einer bestimmten dritten Bewegung, die wieder keine Umschraubung ist (und zwar ist der Punkt o natürlich die Mitte auch dieser Sehne).

6b. *Ist die Ebene ω eigentliche Winkelhalbirende der Ebenenpaare φ, φ' und ψ, ψ' mit Bezug auf zwei gegebene Bewegungen, die nicht Umschraubungen sind, und werden die Ebenen χ, χ' mit Hülfe des Keiltrapezes (oder Vectorendreiecks) construirt nach der Vorschrift*

$$\mathfrak{K}_\omega^{\chi} = \mathfrak{K}_\omega^{\varphi} + \mathfrak{K}_\omega^{\psi}$$
$$\mathfrak{K}_\omega^{\chi'} = \mathfrak{K}_\omega^{\varphi'} + \mathfrak{K}_\omega^{\psi'}$$

so entspricht der Ebene χ die Ebene χ' in einer bestimmten dritten Bewegung (und ω ist die eigentliche Winkelhalbirende dieser beiden Ebenen).

Die construirte dritte Bewegung ist beidemal dieselbe. Wir sagen, sie sei aus den beiden ersten durch „lineare Superposition" entstanden.

Diese Definition ist nun noch zu ergänzen durch eine weitere, die der „geometrischen Multiplication einer Summe von Keilen oder Stäben mit einer Zahl c" entspricht:

7. *Wenn zwei Bewegungen S und S', die nicht Umschraubungen sind, denselben Träger haben, und wenn zwischen ihren halben*

Drehungswinkeln ϑ, ϑ' und Schiebungsgrössen η η' die Beziehungen stattfinden:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = c \cdot \operatorname{tg}\vartheta, \qquad \eta' = c \cdot \eta,$$

so sagen wir, die Bewegung S' sei aus der Bewegung S durch „lineare Streckung" im Verhältniss $c : 1$ hervorgegangen.

Die lineare Streckung hat, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, die Wirkung, dass alle Sehnen xx' unter Erhaltung ihrer Mitten im Verhältniss $c : 1$ vergrössert werden, und ebenso die Oeffnungen aller Keile $\mathfrak{K}_u^u = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u'}$, die durch ein Paar zugeordneter Ebenen u, u' und deren eigentliche Winkelhalbirende $\underline{u}$ bestimmt sind.

Nach diesen Erklärungen können wir das Ergebniss unserer Untersuchungen sehr einfach ausdrücken:

VI. *Summen von Keilen werden geometrisch addirt, indem man die ihnen associirten Bewegungen linear superponirt, und umgekehrt.*

Eine Summe von Keilen wird mit einer Zahl c geometrisch multiplicirt, indem man die ihr associirte Bewegung einer linearen Streckung im Verhältniss $c : 1$ unterwirft.

Eine selbstverständliche, aber für unsere Untersuchung wichtige Folgerung ist nunmehr der Satz:

„Ist eine Gerade $\mathfrak{D}$ Querlinie der Träger zweier Bewegungen, so „ist sie auch Querlinie der Träger aller der ∞^2 Bewegungen, die „durch lineare Streckungen und nachfolgende lineare Superposition „aus diesen abgeleitet werden können."

Natürlich hätten wir, mit demselben oder sogar wohl mit noch besserem Rechte, wie von einer „linearen Superposition" der Bewegungen, von einer solchen der affinen Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ reden können. Wir brauchen diese Ausdrucksweise aber nicht, da wir ohnehin schon eine ziemlich verwickelte Terminologie einführen mussten, und diese nicht ohne wirkliche Noth noch verwickelter machen wollen.

§ 7.

Die geometrische Addition der Motoren.

Die geometrische Addition der Summen von Keilen oder Stäben, und die lineare Superposition von Bewegungen, die wir im vorigen Paragraphen untersucht haben, lässt sich nun in sehr einfacher Weise ausführen mit Hülfe einer Figur, die aus zwei geraden Linien besteht.

Bemerken wir, dass von den Spiegelungen, durch die wir die einer Summe von Keilen associirte Bewegung S dargestellt hatten,

die Spiegelungen an den Ebenen $\varphi, \omega, \varphi'$ vertauschbar sind mit denen an den Ebenen ψ, ϖ, ψ', so folgt, dass wir die Bewegung S auch so darstellen können:

$$S = \{\varphi, \psi\}\{\omega, \varpi\} = \{\omega, \varpi\}\{\varphi', \psi'\}.$$

Nun sind aber die in Klammern gesetzten Ausdrücke Umwendungen — dieselben, die wir schon betrachtet und mit $\{\mathfrak{U}\}$, $\{\mathfrak{O}\}$, $\{\mathfrak{U}'\}$ bezeichnet hatten: Es ist

$$\{\mathfrak{U}\} = \{\varphi, \psi\}, \quad \{\mathfrak{O}\} = \{\omega, \varpi\}, \quad \{\mathfrak{U}'\} = \{\varphi', \psi'\},$$
$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{O}\} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{U}'\},$$

wenn unter $\mathfrak{U}, \mathfrak{O}, \mathfrak{U}'$ die Schnittlinien der Ebenen φ, ψ; ω, ϖ; φ', ψ' verstanden werden.

Die Figur der Geraden $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{O}$ oder $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}'$ ist nun nicht ein beliebiges Paar von eigentlichen Geraden; sie ist vielmehr, wie aus unseren Darlegungen sich ergiebt, an die Beschränkung gebunden, dass die beiden Geraden des Paares sich nicht rechtwinklig kreuzen oder schneiden dürfen. Wir werden nunmehr für diese besondere Figur ein eigenes Wort einführen:

Wir nennen allgemein *Motor* (mōtor) die Figur zweier in eine bestimmte Reihenfolge gesetzter eigentlicher gerader Linien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, die der einzigen Bedingung unterworfen sind, sich *nicht rechtwinklig* zu schneiden oder zu kreuzen. Wir stellen diesen Motor durch das Symbol $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ dar.

Ist *ang* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ der bis auf das Vorzeichen und mod. π bestimmte Winkel, den die „Anfangslinie“ $\mathfrak{X}$ und die „Endlinie“ $\mathfrak{Y}$ des Motors einschliessen, so nennen wir die nach Voraussetzung endliche Grösse *tg ang* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (tangens anguli) die *Oeffnung* des Motors. Als *Länge*, *dist* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ des Motors bezeichnen wir ferner die kürzeste Entfernung der Endlinie $\mathfrak{Y}$ von der Anfangslinie $\mathfrak{X}$ des Motors. Oeffnung und Länge eines Motors sind hiernach beide nur bis auf's Vorzeichen bestimmt; da aber die positive Richtung einer Geraden auch den positiven Drehungssinn um die Gerade angiebt und umgekehrt, so ist mit der Entscheidung über das Vorzeichen der einen von diesen Grössen auch das Vorzeichen der anderen bestimmt. Schneiden sich die beiden Geraden $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ im Endlichen, ist also die Länge des Motors gleich Null, so nennen wir den Motor einen *Rotor* (rōtor, kurz für rotator), und wir brauchen ebenso den Ausdruck *Translator*, wenn die Geraden $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ parallel sind, wenn also die Oeffnung des Motors verschwindet*).

*) Die Ausdrücke *Rotor* und *Motor* kommen bei Clifford vor. Sie bedeuten bei ihm infinitesimale Drehungen und Bewegungen; Rotor bezeichnet daneben

Der Begriff des Motors umfasst also die Begriffe Rotor und Translator; der Translator aber ist ein Grenzfall des Rotors, wiewohl er im Gegensatz zu diesem eine von Null verschiedene Länge hat. Geht man von einem Rotor zu einem Translator continuirlich über, so springt in der Grenze die Länge dieses Motors von Null auf einen endlichen Werth.

Nun ergiebt sich aus der untersuchten Beziehung von Motoren zu Summen $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ von Keilen und zu endlichen Bewegungen (§ 6) sofort ein Aequivalenzbegriff für Motoren:

Wir setzen zwei Motoren $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{Y}_1}$ *und* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2}^{\mathfrak{Y}_2}$ *einander gleich, wenn die Umwendungen um* $\mathfrak{X}_1$ *und* $\mathfrak{Y}_1$, *nach einander ausgeführt, dieselbe Bewegung ergeben, wie die Umwendungen um* $\mathfrak{X}_2$ *und* $\mathfrak{Y}_2$; *in Zeichen, wir setzen:*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{Y}_1} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2}^{\mathfrak{Y}_2}, \quad \textit{wenn} \quad \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1\} = \{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2\}.$$

Danach werden insbesondere alle die Motoren (Translatoren) einander „gleich" sein, deren Anfangs- und Endlinien zusammenfallen. Es wird sich zweckmässig erweisen, diese besonderen Motoren *„gleich Null"* zu setzen, und für sie das Zeichen der Null zu benutzen:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}} = 0.$$

Hieran schliessen wir den Begriff des „Trägers" eines Motors. Ist die Oeffnung des Motors $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ von Null verschieden, so haben die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ eine völlig bestimmte gemeinsame Normale; das eigentliche Linienkreuz, dessen Hauptaxe diese Normale ist, nennen wir dann den *Träger des Motors* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$. Ist aber der Motor ein (von Null verschiedener) Translator, sind also die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ parallel, so giebt es ∞^1 gemeinsame Normalen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, und diese sind Hauptaxen eines einzigen uneigentlichen Linienkreuzes, das wir den *Träger des Translators* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ nennen (S. § 1, S. 5). Als *„Träger eines Translators im weiteren Sinne"* bezeichnen wir daneben jedes eigentliche Linienkreuz, dessen Hauptaxe zu den gemeinsamen Normalen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ parallel ist. Als „Träger des Motors Null" ist natürlich jedes beliebige Linienkreuz anzusehen.

Haupt- und Nebenaxe des Trägers eines Motors können kürzer *Haupt- und Nebenaxe des Motors* selbst genannt werden. Hauptaxe

(unzweckmässiger Weise, wie uns scheint) noch einen anderen, unserem „Stab" verwandten, übrigens nicht klar definirten Begriff. Da für infinitesimale Bewegungen, auch in der englischen Sprache, besondere Worte nicht erforderlich sind, so glauben wir die Clifford'schen Ausdrücke in einem neuen Sinne benutzen zu dürfen, um so eher, als Clifford selbst in einem ähnlichen Fall ganz ebenso zu Werke gegangen ist.

eines Motors $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$, der nicht Translator ist, ist also die gemeinsame Normale von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$.

Anfangs- und Endlinie eines beliebigen Motors sind *Querlinien* seines Trägers; und jede beliebige dieser Querlinien kann sowohl als Anfangs- wie als Endlinie des Motors auftreten.

Ein Motor von nicht verschwindender Oeffnung ändert sich nicht, wenn man ihn um seine Hauptaxe beliebig schraubt; ein Translator ändert sich nicht bei einer Schraubung um eine Axe, die die Richtung seiner unbestimmten Hauptaxe hat. Es giebt hiernach ∞^6 von Translatoren verschiedene Motoren, darunter ∞^5 Rotoren, und jeder von diesen kann auf ∞^2 Arten durch ein Paar gerader Linien dargestellt werden; es giebt aber nur ∞^3 von Null verschiedene Translatoren, und jeder von diesen kann auf ∞^3 Arten durch ein Paar von Parallelen dargestellt werden. Die unendlich fernen Punkte dieser Parallelen erfüllen die Nebenaxe des Translators. Dazu kommt noch der Motor Null, der auf ∞^4 Arten durch ein Paar zusammenfallender Geraden dargestellt werden kann.

Nach diesen Erklärungen ist nun selbstverständlich der Satz:

VII. *Jeder geometrischen Summe von Keilen kann man einen völlig bestimmten Motor desselben Trägers zuordnen, den „der Summe associirten" Motor, und umgekehrt.*

Ist die Summe von Keilen, und zugleich die zugehörige Summe von Stäben auf die Normalform gebracht,

$$\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'', \quad \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'',$$

so ist die Oeffnung des associirten Motors gleich der Oeffnung des eigentlichen Keiles $\mathfrak{K}'$ und gleich der Länge des Stabes $\mathfrak{S}'$. Ferner ist die Länge des associirten Motors gleich der Sperrung des uneigentlichen Keiles $\mathfrak{K}''$ und gleich dem Moment des Stäbepaares $\mathfrak{S}''$.

Verschwindet in den genannten Summen das zweite Glied (*b*), so reducirt sich der Motor auf einen Rotor, verschwindet das erste (*c*), so reducirt er sich auf einen Translator. In beiden Fällen kann man annehmen, dass die Anfangslinie $\mathfrak{X}$ und die Endlinie $\mathfrak{Y}$ des Rotors oder Translators in der Anfangs- und Endebene des ihm associirten Keiles verlaufen, derart, dass die Verbindungsebene von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf den genannten beiden Ebenen senkrecht steht.

Im Falle (*c*) gehört zu dem Stäbepaar $\mathfrak{S}''$ und dem Keil $\mathfrak{K}''$ ein bestimmter Vector $\mathfrak{V}_{\xi}^{\eta}$ (II); derselbe Vector gehört dann auch zu dem zu $\mathfrak{K}''$ associirten Translator: Die Punkte ξ, η werden unmittelbar gefunden, wenn man die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ in irgend einer ihrer Lagen

mit einer ihrer gemeinsamen Normalen zum Schnitt bringt. Wir hätten daher die Gleichheit zweier Translatoren auch so erklären können:

Zwei Translatoren sind gleich, wenn zu beiden derselbe Vector gehört. —

Wir wenden uns nun zurück zu der in § 6 angestellten Betrachtung.

Es seien vorgelegt zwei verschiedene geometrische Summen von Keilen und die Summe dieser beiden Summen; sind dann die Bewegungen $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{X}\}$ und $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{Y}\}$ den beiden Summanden associirt, so kann, nach dem letzten Satze des § 6, die der Summe associirte Bewegung in der Form $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{Z}\}$ dargestellt werden. Die drei den genannten Summen associirten Motoren sind dann aber $\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{M}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$. Um also den letzten Motor zu finden, braucht man nur die Gerade $\mathfrak{Z}$ zu construiren. Diese Construction ergiebt sich aber in doppelter Gestalt durch Specialisirung der beiden Constructionen 6a) und 6b): Man braucht nur anzunehmen, dass der mit o bezeichnete Punkt die Gerade $\mathfrak{D}$ durchläuft, und dass die Ebene ω sich um die Gerade $\mathfrak{D}$ dreht. Wie dann die Punkte ξ, ξ', η, η' und die Ebenen φ, φ', ψ, ψ' zu finden sind, haben wir früher schon gesehen (s. § 2). So kommen wir zu der folgenden Construction:

7. *Es seien vorgelegt zwei Motoren* $\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{D}}$ *und* $\mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{D}}$ *mit gemeinsamer Anfangslinie, drei Gerade* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *also, deren erste die beiden anderen nicht rechtwinklig schneidet oder kreuzt.*

a) *Man schneide diese Geraden mit einer zu* $\mathfrak{D}$ *senkrechten Ebene in Punkten* o, ξ, η, *und construire dann einen Punkt* ζ *mit Hülfe des Stäbeparallelogramms:*

$$\mathfrak{S}^{\xi}_{o} + \mathfrak{S}^{\eta}_{o} = \mathfrak{S}^{\zeta}_{o}.$$

b) *Man verbinde diese Geraden mit einer zu* $\mathfrak{D}$ *senkrechten Richtung durch Ebenen* ω, φ, ψ, *und construire dann eine Ebene* χ *mit Hülfe des Keiltrapezes (des Vectorendreiecks):*

$$\mathfrak{K}^{\varphi}_{\omega} + \mathfrak{K}^{\psi}_{\omega} = \mathfrak{K}^{\chi}_{\omega}.$$

Dann ist der Ort des Punktes ζ *und der Ebene* χ *eine und dieselbe eigentliche Gerade* $\mathfrak{Z}$, *die die Gerade* $\mathfrak{D}$ *ebenfalls nicht rechtwinklig kreuzt oder schneidet, und also mit* $\mathfrak{D}$ *zusammen einen Motor* $\mathfrak{M}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$ *definirt.*

Wir nennen diesen Motor die geometrische Summe der Motoren $\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{D}}$, *und wir drücken diese Beziehung durch die symbolische Gleichung*

$$\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{D}} + \mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$$

aus.

Um die Identität der Ergebnisse beider Constructionen zu erkennen, braucht man übrigens nicht die allgemeinen Sätze 6a) und 6b) gleichzeitig heranzuziehen: Hat man etwa die Construction 7a) aus dem Satze 6a) abgeleitet, so ergiebt sich sofort auch die andere Construction 7b). Man vergleiche die beiden Figuren 13 und 14. Die erste zeigt einige der Parallelogramme, die zur Construction der Geraden $\mathfrak{Z}$ führen. (Zwei — im Allgemeinen — unter diesen Parallelogrammen, die übrigens nicht nothwendig reell sind, haben den Flächeninhalt Null.) Die Figur 14 zeigt dieselben vier Geraden, orthogonal projicirt in einer Lage, in der die Gerade $\mathfrak{O}$ zur Ebene der Tafel parallel ist; die Spurlinien der mit ω, φ, ψ, χ bezeichneten Ebenen fallen dann mit den Projectionen von $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zusammen, wenn ω senkrecht zur Ebene der Tafel angenommen wird. Man erkennt also ohne Weiteres, dass auch die Construction 7b) zu derselben Geraden $\mathfrak{Z}$ führt.

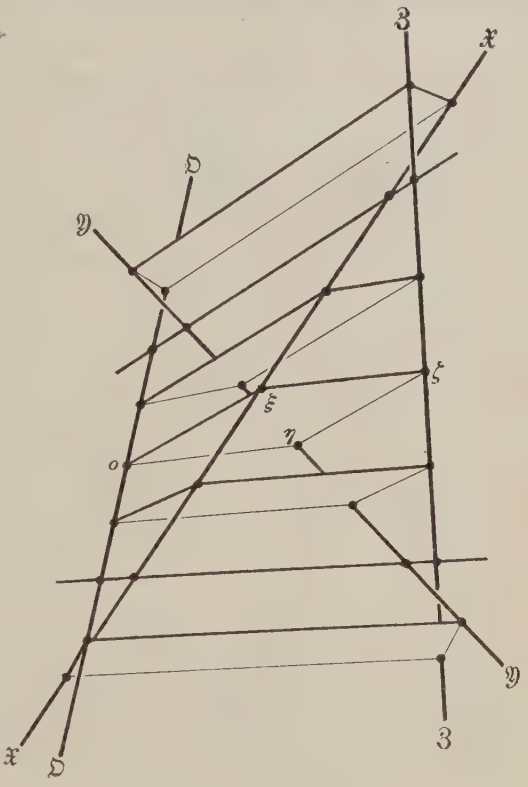


Fig. 13.

Ausnahmefälle, in denen die Constructionen unter 7a) und 7b) illusorisch würden, giebt es nicht; es sei denn, dass man von einer Ausnahme reden will, wenn die zu construirenden Parallelogramme sämmtlich die Fläche Null haben, oder wenn an Stelle des Keiltrapezes das Vectorendreieck gesetzt werden muss. Wir haben daher zur Ergänzung unserer Definition 7) nur eine weitere Definition aufzustellen:

8. *Ein Motor eines gegebenen Trägers wird mit einer Zahl c geometrisch multiplicirt, indem man seine Oeffnung und seine Länge mit dieser Zahl multiplicirt.*

Führt man diese Operation z. B. an dem Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{x}}$ in der Weise

aus, dass man die Anfangslinie $\mathfrak{D}$ festhält, so werden alle die mit $o\xi$ bezeichneten Strecken im Verhältniss $c : 1$ vergrössert. Die Endlinie des Motors beschreibt dabei eine Linienfläche, und zwar, wenn $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ weder ein Rotor, noch ein Translator ist, ein sogenanntes *orthogonales Paraboloid*, dieselbe Fläche, die auch von den Geraden $o\xi$ erfüllt wird. Die gemeinsame Hauptaxe aller der so erhaltenen, durch das Symbol

$$c \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$$

darzustellenden Motoren gehört dieser zweiten Schaar von erzeugenden Geraden des Paraboloids an; sie schneidet die Gerade $\mathfrak{D}$ unter rechtem Winkel (im Scheitel dieser Fläche). Projicirt man sämmtliche Erzeugende der Fläche auf die Verbindungsebene dieser beiden Geraden (die Tangentialebene im Scheitel), so entstehen zwei zu einander orthogonale Büschel von Parallelen. Noch einfachere Verhältnisse treten natürlich ein, wenn der Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ insbesondere ein Rotor oder Translator ist.

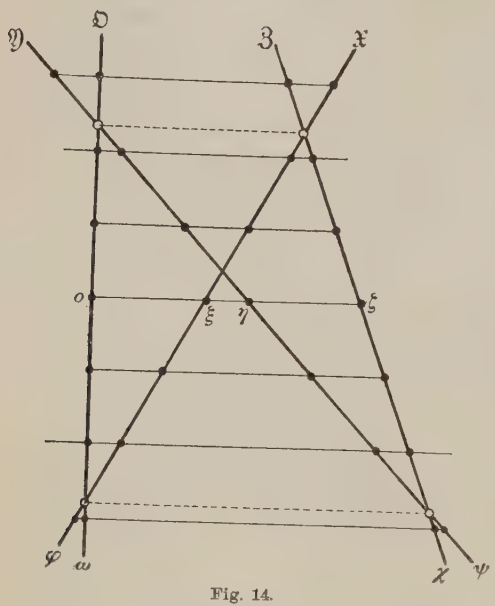


Fig. 14.

Der oben bewiesene Satz kann nunmehr so ausgedrückt werden:

VIII. *Summen von Keilen werden geometrisch addirt, indem man die ihnen associirten Motoren geometrisch addirt, und umgekehrt. Dieselbe Beziehung besteht ferner zwischen den beiden als „geometrische Multiplication von Keilsummen und Motoren mit Zahlen" bezeichneten Operationen.*

Besonders einfach gestaltet sich die Construction 7, wenn die geometrisch zu addirenden Motoren beide Rotoren sind, deren Hauptaxen einander nicht schneiden. Man errichte dann in den Schnittpunkten von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Ebenen senkrecht auf $\mathfrak{D}$ und bringe diese mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ zum Schnitt: Die Verbindungslinie der Schnittpunkte ist die Gerade $\mathfrak{Z}$. Umgekehrt ergeben sich aus dieser Construction alle Zerlegungen eines Motors $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{Z}}$ in zwei Rotoren.

Nehmen wir an, dass die Motoren $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}$ nicht

Translatoren sind, und dass ihre Hauptaxen nicht in einer Ebene liegen, so ergiebt sich (wie übrigens auch unter noch etwas allgemeineren Voraussetzungen) als Ort der Hauptaxen aller Motoren der Form

$$c_1 \cdot \mathfrak{M}_1 + c_2 \cdot \mathfrak{M}_2$$

eine geradlinige Fläche, das sogenannte *Cylindroid*. Diese erweist sich, nach § 2, sofort als der Ort der Hauptaxen aller der Nullsysteme, die zu den Bewegungen gehören, die den genannten Motoren oder den zugehörigen Summen von Keilen associirt sind. Dieselbe Fläche enthält übrigens die Hauptaxen nicht nur der bezeichneten (zweistufigen) linearen Mannigfaltigkeit von Motoren, sondern sie gehört in gleicher Weise zu ∞^1 solchen Mannigfaltigkeiten. In der That, zerlegt man jeden der beiden Motoren $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ in Rotor und Translator mit gemeinsamem Träger $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i' + \mathfrak{M}_i''$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{M}_i'''$ einen Translator desselben Trägers, dessen Sperrung gleich der Oeffnung des Rotors $\mathfrak{M}_i'$ ist, dessen Vector also parallel und an Länge gleich ist dem Stab, der mit dem Rotor $\mathfrak{M}_i'$ verbunden ist, so ist klar, dass für jeden Werth von λ der Motor

$$c_1 \cdot (\mathfrak{M}_1 + \lambda \cdot \mathfrak{M}_1''') + c_2 \cdot (\mathfrak{M}_2 + \lambda \cdot \mathfrak{M}_2''')$$

dieselbe Hauptaxe hat, wie der Motor

$$c_1 \cdot \mathfrak{M}_1 + c_2 \cdot \mathfrak{M}_2 .$$

Denn es leuchtet ein, dass jede lineare Relation zwischen geometrischen Summen von Stäben richtig bleibt, wenn man jeden einzelnen Stab durch einen ihm parallelen und an Länge gleichen Vector ersetzt.

Wir erwähnen noch beiläufig eine einfache Erzeugungsweise des Cylindroids, die, soviel uns bekannt, bis jetzt nicht mit der mechanischen Bedeutung dieser Fläche in Verbindung gebracht worden ist, übrigens aber von uns, wie das Cylindroid überhaupt, weiterhin nicht benutzt werden wird. Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}} = c_1 \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}} + c_2 \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}},$$

so ist der Ort der Geraden $\mathfrak{Z}$, bei veränderlichen Werthen von c_1 und c_2, ein *Liniennetz*, nämlich der Ort aller Geraden, die zwei windschiefe (reelle oder conjugirt-imaginäre) gerade Linien schneiden. Es sind das die sogenannten Leitlinien des Netzes; sie gehören dem Cylindroid selbst an, und haben als gemeinsame Normale dessen „Axe“ $\mathfrak{D}$. Das Cylindroid ist nun der Ort der gemeinsamen Normalen dieser Axe und der übrigen Geraden des Netzes. Die Geraden der Fläche sind, als Leitlinien je eines solchen das Cylindroid erzeugenden Netzes, in bestimmter Weise gepaart. In dieser Erzeugungsart ist als besonderer

Fall eine noch einfachere enthalten, die das Cylindroid als Ort der gemeinsamen Normalen einer Geraden $\mathfrak{D}$ und der Strahlen eines ebenen Büschels entstehen lässt. Jeder nicht auf der Axe $\mathfrak{D}$ gelegene Punkt der Fläche ist Scheitel eines solchen die Fläche erzeugenden Büschels, dessen Ebene eine Tangentialebene der Fläche ist, und diese in einer Geraden und einer Ellipse durchsetzt*).

Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass unsere geometrische Addition der Keile und Motoren als eine Erweiterung der bekannten von Möbius, H. Grassmann und Anderen untersuchten geometrischen Addition von Punkten und Strecken (Vectoren) einer Ebene angesehen werden kann. An Stelle der mit Gewichten belasteten Punkte können nämlich Keile gesetzt werden. Aehnliche Constructionen sind übrigens auch im Raume möglich.

§ 8.

Die geometrische Addition der Quirle durch Quirlvierflach und Quirltrapez.

Neben den Stab, die Figur zweier Punkte, und den Keil, die Figur zweier Ebenen, kann man eine dritte Figur von gleicher Constantenzahl und auch sonst verwandter Beschaffenheit stellen, nämlich die Figur eines Punktes und einer Ebene. Denken wir uns von dem Punkt auf die Ebene eine Senkrechte gefällt, und nehmen wir deren Fusspunkt als Scheitel eines in der Ebene gelegenen Büschels gerader Linien, so entsteht eine Figur, die wir als „Quirl“ bezeichnen können. Wir werden daher die Figur eines Punktes und einer Ebene selbst Quirl nennen, indem wir uns vorbehalten, diesen Begriff noch genauer zu bestimmen, und die Bezeichnung auch noch in gewissen Grenzfällen beizubehalten, in denen sie eigentlich keinen Sinn mehr hat.

Giebt es nun auch eine „geometrische Addition“ dieser Quirle, die der der Stäbe und Keile angereiht werden könnte?

Wir wollen versuchen, dieser an sich sehr unbestimmten Frage eine schärfere Fassung zu geben, und sie dann zu beantworten, indem

*) Wir verweisen wegen des Cylindroids und seines Zusammenhangs mit der Zusammensetzung der Dynamen auf Sir R. Ball's *„Theory of Screws“* (Dublin, 1876) — in deutscher Bearbeitung unter dem Titel *„Theoretische Mechanik starrer Systeme“* herausgegeben von H. Gravelius (Berlin 1889). In der letzten, dem Verfasser zur Zeit allein zugänglichen Schrift findet sich die Erzeugung des Cylindroids durch das Liniennetz auf S. 78, allerdings nicht ganz richtig, angegeben. Ein von H. Wiener verfertigtes Fadenmodell des Cylindroids ist kürzlich im Verlage von L. Brill (jetzt Martin Schilling in Halle) erschienen.

wir an die zu suchenden Constructionen mehrere Forderungen stellen, bei deren Formulirung wir uns durch Analogieen leiten lassen.

Bemerken wir zunächst, dass die zu suchende „geometrische Addition" der Quirle auch als eine *zweite* Art von „geometrischer Addition der Stäbe" wird angesehen werden können: Wir können ja im Endpunkt oder im Anfangspunkt eines Stabes von der Länge l' immer eine Ebene senkrecht auf der Geraden des Stabes errichten, und so einen Quirl herstellen. Von dieser neuen Art geometrischer Addition der Stäbe werden wir nun annehmen, dass sie mit der bisher untersuchten auf eine einfache Weise zusammenhängt: 1) Auch die nunmehr zu betrachtenden Stäbe sollen auf ihren Geraden beliebig verschoben werden dürfen; 2) zwischen den Längen (l) der nach der gewöhnlichen Regel geometrisch zu addirenden Stäbe und den Längen (l') der nach der neuen Regel zu addirenden Stäbe derselben Geraden soll eine algebraische und gegenseitig eindeutige Abhängigkeit stattfinden:

$$l' = \frac{\alpha l + \beta}{\gamma l + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0,$$

derart, dass die zu suchende neue geometrische Addition in eben dieser Abhängigkeit ihre Erklärung findet; 3) wenn die Länge l des ersten Stabes ihr Vorzeichen wechselt, so soll es auch die Länge l' des zweiten thun. Die Forderungen 2) und 3) werden nur durch die beiden Annahmen

$$l' = c \cdot l, \qquad l' = \frac{c}{l}$$

erfüllt. Von diesen ist die erste trivial, und führt zu der gewöhnlichen Addition der Stäbe zurück; die zweite aber, an deren Stelle wir offenbar die noch etwas einfachere

$$l' = \frac{1}{l}$$

setzen können, führt zu neuen Constructionen.

Wir wollen nun diese zweite Annahme näher untersuchen, indem wir an Stelle der vorübergehend eingeführten Stäbe von der Länge l' Quirle setzen (wodurch, wie der Leser erkennen wird, eine einfachere Ausdrucksweise der abzuleitenden Sätze sich erreichen lässt).

Wir kommen jetzt unmittelbar zu den folgenden Begriffsbestimmungen:

Wir nennen *eigentlichen Quirl* die Figur eines eigentlichen Punktes und einer eigentlichen Ebene, *die nicht vereinigt liegen*, sonst aber eine beliebige Lage haben dürfen, und als „Anfangspunkt" und „Endebene", oder als „Anfangsebene" und „Endpunkt" des Quirles bestimmt geordnet

sind. Ist der Quirl gegeben durch einen Punkt ξ und eine Ebene ψ, oder durch eine Ebene φ und einen Punkt η, so bezeichnen wir ihn im ersten Falle durch das Symbol $\mathfrak{Q}_\xi^\psi$, im zweiten durch das Symbol $\mathfrak{Q}_\varphi^\eta$. Wir betrachten ferner zwei solche eigentliche Quirle als einander *gleich*, wenn die Spiegelungen an ihren Anfangselementen mit den Spiegelungen an ihren Endelementen (in dieser Reihenfolge) zusammengesetzt, dieselbe Umschraubung ergeben (§ 1). In Zeichen, wir setzen

$$\mathfrak{Q}_{\xi_1}^{\psi_1} = \mathfrak{Q}_{\xi_2}^{\psi_2}, \quad \textit{wenn} \quad \{\xi_1, \psi_1\} = \{\xi_2, \psi_2\};$$
$$\mathfrak{Q}_{\varphi_1}^{\eta_1} = \mathfrak{Q}_{\varphi_2}^{\eta_2}, \quad \textit{wenn} \quad \{\varphi_1, \eta_1\} = \{\varphi_2, \eta_2\};$$
$$\mathfrak{Q}_\xi^\psi = \mathfrak{Q}_\varphi^\eta, \quad \textit{wenn} \quad \{\xi, \psi\} = \{\varphi, \eta\}.$$

Ein eigentlicher Quirl ändert sich also nach dieser Definition nicht, wenn man ihn längs seiner *Geraden*, der Axe der genannten Umschraubung, verschiebt; er ändert sich aber auch nicht, wenn man das eine seiner Begrenzungselemente an dem anderen spiegelt und dann die Reihenfolge der beiden Begrenzungselemente umkehrt. Ist z. B. vorgelegt der Quirl $\mathfrak{Q}_\xi^\psi$, und ist ξ_+ das Spiegelbild des Punktes ξ in Bezug auf die Ebene ψ, und ψ_- das Spiegelbild der Ebene ψ in Bezug auf den Punkt ξ, so ist

$$\mathfrak{Q}_{\psi_-}^\xi = \mathfrak{Q}_\xi^\psi = \mathfrak{Q}_\psi^{\xi_+}.$$

Bezeichnen wir demnach als *Träger eines eigentlichen Quirls* das eigentliche Linienkreuz, dessen Hauptaxe die Gerade des Quirls ist, und nennen wir *Länge* des Quirls

$$\mathfrak{Q}_\xi^\psi = \mathfrak{Q}_\varphi^\eta$$

den nach der Definition des Quirls stets von Null verschiedenen Abstand $\operatorname{dist}(\xi, \psi)$ der Ebene ψ vom Punkte ξ, oder den diesem gleichen Abstand $\operatorname{dist}(\varphi, \eta)$ des Punktes η von der Ebene φ, so können wir auch sagen: „Zwei eigentliche Quirle sind einander gleich, wenn sie zu demselben Träger gehören und gleiche Längen haben.“ Dass diese Längen einzeln nur bis auf das Vorzeichen bestimmt sind, kommt hier offenbar nicht in Betracht.

Es ist zweckmässig, hier schon die Definition einer ausgearteten Quirlfigur, des „Quirls Null“ anzuschliessen, den wir nach Belieben, als einen Grenzfall, noch zu den betrachteten eigentlichen Quirlen oder zu den nachher einzuführenden uneigentlichen Quirlen rechnen können. Dieser *Quirl Null* entsteht, wenn wir den Träger eines Quirls festhalten, dessen Länge aber ins Unendliche wachsen lassen. Er kann dargestellt werden durch zwei verschiedene Figuren: Entweder durch die Verbindung eines eigentlichen Punktes mit der unendlich fernen

Ebene, oder durch die Verbindung einer eigentlichen Ebene mit *dem* uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt, der irgend einer eigentlichen Normale dieser Ebene angehört. Alle diese Figuren also, die als Grenzfälle der zuerst besprochenen angesehen werden können, betrachten wir ebenfalls noch als Quirle, von der Länge ∞; wir setzen sie alle einander gleich, und wir stellen sie überdies dar durch das gewöhnliche Zeichen der Null. Träger des Quirles ist natürlich jedes beliebige Linienkreuz.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die oben durch die Gleichung $l' = \frac{1}{l}$ ausgedrückte Beziehung so in Worte fassen:

IX. *Jedem Stab kann ein eigentlicher Quirl desselben Trägers zugeordnet werden, dessen Länge gleich dem reciproken Werth der Länge des Stabes ist, und umgekehrt.*

Es wird sich nun darum handeln, die hiermit implicite schon erklärte „geometrische Addition der Quirle“ unmittelbar, nämlich so auszuführen, dass man nicht erst die zugehörigen Stäbe zu construiren braucht.

Wir betrachten zuerst drei Stäbe mit gemeinsamem Anfangspunkt o, die in der Beziehung

$$\mathfrak{S}_o^{\xi} + \mathfrak{S}_o^{\eta} = \mathfrak{S}_o^{\zeta}$$

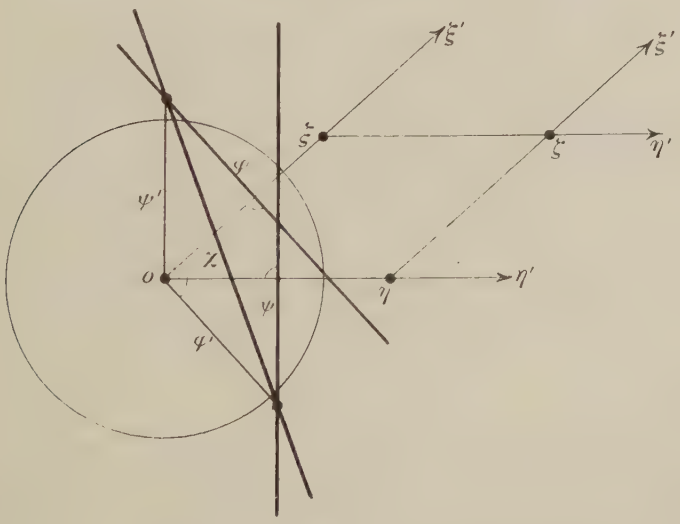


Fig. 15.

stehen. Beschreiben wir dann um o als Mittelpunkt eine Kugel vom Radius Eins (s. die Figur 15) und nennen wir φ, ψ, χ die Polaren der Punkte ξ, η, ζ in Bezug auf diese Kugel, ferner φ' und ψ' die Polaren

der unendlich fernen Punkte ξ' und η' der Geraden $o\xi$, $o\eta$, so bilden die Ebenen $\varphi', \varphi, \psi', \psi$ ein Prisma mit parallelogrammatischer Basis, dessen den Punkt o nicht enthaltende Diagonalebene eben die Ebene χ ist*). So kommen wir zu der folgenden Erklärung:

9. *Es mögen zwei eigentliche Quirle* $\mathfrak{Q}_o^{\varphi}$ *und* $\mathfrak{Q}_o^{\psi}$ *mit verschiedenen Trägern den Anfangspunkt* o *gemein haben.*

Legt man dann durch diesen Punkt o *zwei Ebenen* φ' *und* ψ' *parallel zu* φ *und* ψ, *und verbindet man die Schnittlinien von* φ *und* ψ', ψ *und* φ' *durch eine Ebene* χ, *so definirt diese einen neuen Quirl* $\mathfrak{Q}_o^{\chi}$. *Dieser werde die geometrische Summe der beiden gegebenen Quirle genannt, und es werde diese Beziehung durch die symbolische Gleichung*

$$\mathfrak{Q}_o^{\varphi} + \mathfrak{Q}_o^{\psi} = \mathfrak{Q}_o^{\chi}$$

ausgedrückt.

Die Figur, deren wir uns bei dieser Construction bedient haben, nennen wir das *Quirlvierflach.*

Liegen die Geraden zweier eigentlicher Quirle in derselben Ebene, so kann man immer erreichen, dass diese Quirle einen gemeinsamen Anfangspunkt erhalten, ausser wenn die genannten Geraden parallel sind. In diesem Fall muss man andere Constructionen anwenden, die leicht zu ermitteln sind.

10. *Es mögen zwei eigentliche Quirle,* $\mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi}$ *und* $\mathfrak{Q}_{\omega}^{\eta}$, *die zu verschiedenen Trägern gehören, und nicht entgegengesetzt-gleiche Längen haben, die gleiche Anfangsebene* ω *besitzen.*

Sucht man dann die Fusspunkte ξ' *und* η' *der beiden von* ξ *und* η *auf die Ebene* ω *gefällten Lote, so schneiden sich die Verbindungslinien* $\xi\eta'$ *und* $\eta\xi'$ *in einem eigentlichen Punkte* ζ, *und dieser definirt einen neuen Quirl* $\mathfrak{Q}_{\omega}^{\zeta}$.

Dieser werde die geometrische Summe der beiden gegebenen Quirle genannt, und es werde diese Beziehung durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi} + \mathfrak{Q}_{\omega}^{\eta} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\zeta}$$

ausgedrückt.

Wir nennen die benutzte Figur das *Quirltrapez.*

Diese durch Fig. 16 dargestellte Construction wird unbrauchbar, wenn die Träger der beiden Quirle zusammenrücken. Für diesen Fall wird also wieder eine besondere Erklärung nöthig:

---

*) Die hier benutzte Polarentheorie des Kreises oder der Kugel kann bekanntlich sehr leicht mit ganz elementaren Hülfsmitteln begründet werden.

11. *Die geometrische Summe zweier eigentlicher Quirle mit demselben Träger ist ein neuer Quirl dieses Trägers. Der reciproke Werth der Länge der Summe ist gleich der Summe der reciproken Werthe der Längen der Summanden.*

Es besteht also insbesondere auch die Identität

$$\mathfrak{Q}_\xi^\varphi + \mathfrak{Q}_\varphi^\xi = 0.$$

Man achte darauf, wie alle diese Definitionen auch auf den oben eingeführten Quirl Null Anwendung finden: Die geometrische Addition dieses ausgezeichneten Quirls zu einem anderen ändert diesen letzten nicht.

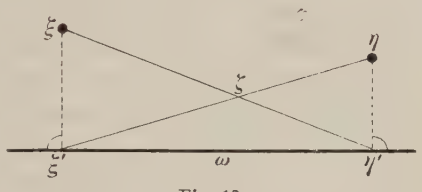


Fig. 16.

Der andere unter Nr. 10 ausgeschlossene Fall nöthigt uns nunmehr zu einer neuen Begriffsbildung: Wir gelangen jetzt, indem wir Punkt ζ ins Unendliche rücken lassen, zu der Vorstellung des „uneigentlichen Quirls", einer Figur, die allerdings wirklich nur noch in sehr uneigentlichem Sinne den Namen Quirl verdient.

Ein *uneigentlicher Quirl* $\mathfrak{Q}_\omega^\zeta$ mit der Anfangsebene ω und dem Endpunkt ζ besteht also aus einer eigentlichen Ebene ω und einem nicht auf dieser Ebene ω enthaltenen uneigentlichen Punkt ζ; und eben dieser Quirl kann auch durch einen uneigentlichen Punkt ζ_- als Anfangspunkt und durch die Ebene ω als Endebene dargestellt werden: Der Punkt ζ_- geht dann durch die Spiegelung an ω aus ζ hervor. Da uneigentliche Punkte geometrisch nicht anders erklärt werden können als durch die Parallelenbündel, deren Scheitel sie sind, so können wir auch sagen, der uneigentliche Quirl $\mathfrak{Q}_{\zeta_-}^\omega = \mathfrak{Q}_\omega^\zeta$ entstehe durch Zusammenstellung einer eigentlichen Ebene ω mit einem von zwei Bündeln paralleler Geraden (ζ_-) und (ζ), die die Ebene ω unter einem (mod. π) *von Null verschiedenen* Winkel treffen, und die durch die Spiegelung an ω in einander übergehen. Ist der genannte Winkel ein rechter, so ist der uneigentliche Quirl der Quirl Null, den wir schon betrachtet haben.

Schliessen wir den Quirl Null aus, so können die Geraden der genannten Bündel auf eine einzige Weise auf eine Schaar unter einander paralleler Ebenen vertheilt werden, die auf der Ebene ω senkrecht stehen. Wir meinen irgend eine (eigentliche) unter diesen Ebenen, wenn wir von der *Ebene des uneigentlichen Quirls* reden; wir können dann eine Aequivalenz oder *Gleichheit* uneigentlicher Quirle (die durch das Gleichheitszeichen auszudrücken sein wird) erklären durch die

Aussage: „Ein eigentlicher Quirl ändert sich nicht, wenn man ihn in seiner Ebene beliebig dreht, oder wenn man ihn beliebig parallel verschiebt.“ —

Die Normalen der Ebene eines uneigentlichen Quirls sind die Hauptaxen eines uneigentlichen Linienkreuzes, das wir als *Träger des uneigentlichen Quirls* ansehen. In einem „weiteren“ Sinne wird dasselbe Wort dann auch jedes eigentliche Linienkreuz bezeichnen, dessen Hauptaxe eine unter diesen Normalen ist. — Ein ferner einzuführender Begriff, analog der Länge des eigentlichen Quirls, ist der der *Oeffnung eines uneigentlichen Quirls.* Wir verstehen darunter die nach Voraussetzung stets von Null verschiedene goniometrische Tangente des Winkels λ, um den man, unter Festhaltung der „Ebene des Quirls“, die Ebene ω drehen muss, bis sie den Endpunkt ξ des Quirls $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ enthält. Als positiver Drehungssinn in der Ebene des Quirls ist dabei der anzusehen, der durch Verwandlung einer Normale dieser Ebene, also einer Hauptaxe des Trägers des Quirls in einen Speer (§ 1) bestimmt wird. Legen wir schliesslich auf die so in einen Speer verwandelte Normale einen Vector, dessen nunmehr völlig bestimmte Länge dem reciproken Werthe der eben definirten Oeffnung, also der Grösse ctg λ gleich ist (Fig. 17), und sagen wir, dass dieser Vector zu dem uneigentlichen Quirl *gehört*, so können wir die Gleichheit uneigentlicher Quirle offenbar auch so erklären:

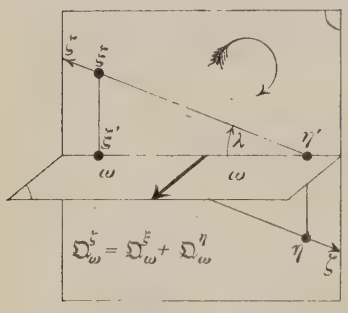


Fig. 17.

Zwei uneigentliche Quirle sind gleich, wenn zu beiden derselbe Vector gehört.

Die Länge dieses Vectors ist, nach Definition, stets eine endliche Grösse. Nunmehr ergibt sich (vgl. Fig. 17):

X. *Als Grenzfall der unter* IX *beschriebenen Zuordnung zwischen Stäben und eigentlichen Quirlen besteht eine Zuordnung zwischen Stäbepaaren und uneigentlichen Quirlen. Stäbepaar und entsprechender Quirl haben denselben Träger, und das Moment des Stäbepaares ist gleich dem reciproken Werth der Oeffnung des Quirles. Zu Stäbepaar und Quirl gehört der nämliche Vector.*

Jeder von Null verschiedene uneigentliche Quirl $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ kann auf ∞^4 Arten als geometrische Summe zweier eigentlicher Quirle dargestellt werden:

$$\mathfrak{Q}_\omega^\xi = \mathfrak{Q}_\omega^\xi + \mathfrak{Q}_\omega^\eta .$$

Die Geraden dieser Quirle sind parallel und verlaufen in einer Ebene des uneigentlichen Quirls in beliebigem Abstand (s. Fig. 17); die Längen der beiden eigentlichen Quirle werden, nachdem man ihre Geraden in antitaktische Speere (S. 9) verwandelt hat, einander gleich. Die geometrische Summe der beiden eigentlichen Quirle ändert sich nicht, wenn man die ganze Figur in der Ebene des Quirls $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ einer eigentlichen Aehnlichkeitstransformation (einer solchen, bei der die Winkel nicht umgelegt werden) unterwirft, oder wenn man sie senkrecht zu der genannten Ebene verschiebt. Wenn also die Gerade eines eigentlichen Quirles $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ in der Ebene eines uneigentlichen Quirles verläuft, so wird man diesen immer in der Form $\mathfrak{Q}_\omega^\eta$ darstellen können.

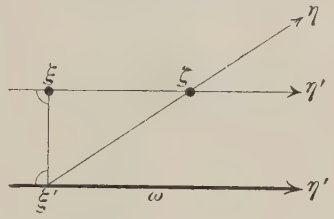


Fig. 18.

Die geometrische Addition eines eigentlichen Quirles $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ und eines uneigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}_\omega^\eta$ mit gemeinsamer Anfangsebene erfolgt ebenfalls nach der unter 10 angeführten Regel (vgl. Fig. 16 und Fig. 18). Ebenso die geometrische Addition zweier eigentlicher Quirle, die entgegengesetzt gleiche Längen haben. (Vgl. Fig. 17.)

Die geometrische Summe $\mathfrak{Q}_\omega^\zeta$ ist im ersten Falle ein eigentlicher Quirl, der aus $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ durch Parallelverschiebung hervorgeht (s. Fig. 18), im zweiten ein uneigentlicher Quirl.

Handelt es sich nun um die geometrische Addition von zwei uneigentlichen Quirlen, so mögen wir bedenken, dass ein uneigentlicher Quirl, nach dem oben festgesetzten Aequivalenzbegriff, als die Figur eines uneigentlichen Punktes und einer mit diesem nicht vereinigt liegenden uneigentlichen *Geraden* aufgefasst werden kann; denn die uneigentliche Gerade und das zugehörige Büschel paralleler Ebenen sind im Grunde dasselbe. Sagen wir nun, dass zwei uneigentliche Gerade einander rechtwinklig schneiden, wenn die zugehörigen Ebenenbüschel zu einander orthogonal sind, so können wir aus dem durch Fig. 17 dargestellten Zusammenhang zwischen eigentlichen und uneigentlichen Quirlen unmittelbar die Regel entnehmen, nach der die betrachteten *Quirle in der unendlich fernen Ebene* „geometrisch zu addiren“ sind. Wir können es durch geeignete Drehungen immer erreichen, dass zwei beliebige solche Quirle entweder einen gemeinsamen Anfangsstrahl (dargestellt durch ein Büschel paralleler Ebenen) oder einen gemeinsamen Anfangspunkt (dargestellt durch ein Bündel paralleler Geraden) erhalten, und wir können dann für die geometrische Addition unserer Quirle die eine oder die andere der beiden folgenden Erklä-

rungen geben, die, wie der Leser leicht erkennen wird, materiell identisch sind:

Es mögen zwei zu verschiedenen Trägern gehörige Quirle q_ω^ξ und q_ω^η in der unendlich fernen Ebene denselben Anfangsstrahl ω haben.

Sucht man dann die Fusspunkte ξ' und η' der beiden von ξ und η auf die uneigentliche Gerade ω gefällten Lothe, und bezeichnet man mit ζ den Schnittpunkt der Verbindungslinien ξ, η' und η, ξ', so ist damit ein neuer Quirl q_ω^ζ bestimmt, die „geometrische Summe" von q_ω^ξ und q_ω^ζ:

$$q_\omega^\xi + q_\omega^\eta = q_\omega^\zeta .$$

Es mögen zwei zu verschiedenen Trägern gehörige Quirle q_o^φ und q_o^ψ in der unendlich fernen Ebene denselben Anfangspunkt o haben.

Legt man dann durch o Gerade φ', ψ', deren Schnittpunkte mit φ, ψ von o um einen rechten Winkel abstehen, und bezeichnet man mit χ die Verbindungslinie der Schnittpunkte φ, ψ' und ψ, φ', so ist damit ein neuer Quirl bestimmt, die „geometrische Summe" von q_o^φ und q_o^ψ:

$$q_o^\varphi + q_o^\psi = q_o^\chi .$$

Wir haben diese Constructionen so ausgedrückt, dass ihre Analogie mit den Constructionen Nr. 10 und Nr. 9 klar hervortritt; bei der wirklichen Construction muss man natürlich die unendlich fernen Punkte und Geraden durch Strahlen und Ebenen eines Bündels ersetzen.

Fügen wir nun noch die weitere Definition hinzu:

Haben zwei geometrisch zu addirende Quirle in der unendlich fernen Ebene denselben Träger, so ist der reciproke Werth der Oeffnung der Summe gleich der Summe der reciproken Werthe der Oeffnungen der Summanden,

so können wir nunmehr erklären:

12. *Die geometrische Addition uneigentlicher Quirle erfolgt durch geometrische Addition der zugehörigen Quirle in der unendlich fernen Ebene.*

Es gilt dann der Satz:

Der geometrischen Addition der uneigentlichen Quirle entspricht die geometrische Addition der zugehörigen Vectoren.

Endlich haben wir zu erklären:

13. *Ein eigentlicher oder uneigentlicher Quirl eines gegebenen Trägers wird mit einer Zahl c geometrisch multiplicirt, indem man seine Länge oder Oeffnung mit dieser Zahl c dividirt.**)

---

*) Da ein Quirl wohl eine unendliche, nicht aber auch eine verschwindende Länge oder Oeffnung haben kann, so ist hier die Division mit der Null eine erlaubte Operation, nicht aber die Multiplication, die auf eine Multiplication des Quirls mit ∞ hinauslaufen würde.

Wir stellen das geometrische Product des Quirls $\mathfrak{Q}_\omega^\xi$ mit der Zahl c durch das Zeichen

$$c \cdot \mathfrak{Q}_\omega^\xi$$

dar.

Bilden wir schliesslich noch den Begriff der *formalen* Summe von Quirlen, so ergiebt sich nunmehr:

XI. *Geometrische Summen von Stäben (oder Keilen) werden geometrisch addirt, oder mit Zahlen geometrisch multiplicirt, indem man die ebenso benannten Operationen an den entsprechenden Summen von Quirlen ausführt, und umgekehrt.*

Selbstverständlich, aber für unsere weiteren Ueberlegungen wichtig ist jetzt der Satz:

XII. *Jede geometrische Summe von Quirlen kann auf eine einzige Weise in eine Normalform*

$$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$$

gebracht werden. Sie kann nämlich dargestellt werden als Summe eines eigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}'$ und eines uneigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}''$, die beide denselben Träger haben (im weiteren Sinne dieses Wortes, s. S. 64).

Dabei sind zu unterscheiden die Fälle

(a) $\mathfrak{Q}' \neq 0, \quad \mathfrak{Q}'' \neq 0,$ (b) $\mathfrak{Q}' \neq 0, \quad \mathfrak{Q}'' = 0,$
(c) $\mathfrak{Q}' = 0, \quad \mathfrak{Q}'' \neq 0,$ (d) $\mathfrak{Q}' = 0, \quad \mathfrak{Q}'' = 0.$

Den gemeinsamen Träger von $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ werden wir natürlich *Träger* der Summe $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ nennen.

Selbstverständlich ist ferner, dass jede gemeinsame Querlinie der Träger zweier Summen $\mathfrak{Q}_1' + \mathfrak{Q}_1''$ und $\mathfrak{Q}_2' + \mathfrak{Q}_2''$ auch Querlinie des Trägers einer jeden Summe der Form

$$c_1 \cdot (\mathfrak{Q}_1' + \mathfrak{Q}_1'') + c_2 \cdot (\mathfrak{Q}_2' + \mathfrak{Q}_2'')$$

ist.

Die unter XII. beschriebene Normalform einer geometrischen Summe von Quirlen lässt sich herstellen, ohne dass man die Stäbe bei der Construction benutzt; wir gehen aber auf diesen Punkt nicht weiter ein. —

Aus dem oben angeführten Begriff des „Quirls in der unendlich fernen Ebene", dem wir noch den eines *Vectorquirls*, eines eigentlichen Quirls von erhöhter Beweglichkeit, hätten an die Seite stellen können, (vgl. S. 43), können wir sofort den Begriff eines *sphärischen* Quirls ableiten, wie wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht. Wir können

mit Bezug hierauf die angegebenen beiden Constructionen (S. 66) als das *sphärische Quirltrapez* und das *sphärische Quirlvierseit* bezeichnen.

Zwischen der geometrischen Addition der sphärischen Quirle $q_\xi^{\nu''}$ oder q_φ^η und der gelegentlich (in § 4) betrachteten geometrischen Addition der sphärischen Stäbe s_ξ^η und Keile $k_\varphi^{\nu''}$ besteht ein sehr einfacher Zusammenhang. Diese Operationen sind nämlich überhaupt nicht wesentlich von einander verschieden, sie unterscheiden sich eigentlich nur durch die Ausdrucksweise: Ersetzt man in der zu der symbolischen Gleichung

$$s_o^\xi + s_o^\eta = s_o^\zeta$$

(S. 35) gehörigen Construction des sphärischen Stäbevierecks die vier Punkte (oder eigentlich Punktpaare) o, ξ, η, ζ durch die zugehörigen Hauptkreise ω, φ, ψ, χ, so entsteht das schon betrachtete sphärische Keiltrapez; ersetzt man nur den Punkt o durch seinen Hauptkreis, so entsteht das sphärische Quirltrapez; ersetzt man die drei Punkte ξ, η, ζ durch die zugehörigen Hauptkreise, so erhält man das sphärische Quirlvierseit. Wir können diese Thatsachen kurz zusammenfassen, wenn wir als *absolute Correlation* in der Geometrie auf der Kugel die Zuordnung bezeichnen, die aus jedem Hauptkreis, als Aequator, die zugehörigen Pole, und umgekehrt hervorgehen lässt:

Die sphärischen Stäbe, Keile und Quirle gehen durch partielle oder vollständige Transformation vermöge der absoluten Correlation in einander über, und gleichzeitig die zugehörigen, als „geometrische Addition" bezeichneten Operationen.

Wir werden auf die systematische Bedeutung dieser Bemerkung später noch näher einzugehen haben. (S. § 14.)

Unsere geometrische Addition der Quirle steht ferner in einer eigenthümlichen Beziehung zu Eigenschaften des Dreiecks und des Tetraeders. Wir müssen uns auf einige Andeutungen hierüber beschränken, da ein tieferes Eingehen auf diesen Gegenstand längere Vorbereitungen erfordern und uns zu weit von unseren eigentlichen Aufgaben abziehen würde. Es beruht dieser Zusammenhang u. A. auf den folgenden Sätzen, die sich sämmtlich leicht geometrisch erweisen lassen:

„Wenn, in der ebenen Geometrie, die geometrische Summe dreier zu verschiedenen Geraden gehöriger Quirle mit gemeinsamem Anfangspunkt verschwindet, so ist dieser Punkt der Schwerpunkt des von den Endlinien der Quirle gebildeten Dreiecks."

„Wenn, in der sphärischen Geometrie, die geometrische Summe

dreier zu verschiedenen Trägern gehöriger eigentlicher Quirle mit gemeinsamem Anfangspunkt verschwindet, so hat dieser Punkt als Harmonicale in Bezug auf das sphärische Dreieck der Endlinien den zu ihm gehörigen Hauptkreis."

„Wenn, in der Geometrie des Raumes, die geometrische Summe von vier eigentlichen Quirlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, von denen keine drei linear-abhängig sind, verschwindet, so ist der genannte Punkt der Schwerpunkt des von den Endebenen der Quirle gebildeten Tetraeders."

Diese drei Sätze gelten natürlich auch umgekehrt.

„Die geometrische Summe der drei ebenen oder sphärischen Quirle, die durch die Ecken eines (ebenen oder sphärischen) Dreiecks als Anfangspunkte und durch die gegenüber liegenden Seiten als Endlinien bestimmt werden, hat den Werth Null."

Der letzte Satz kann, soweit von sphärischen Quirlen die Rede ist, auch so ausgedrückt werden:

Die geometrische Summe der drei sphärischen Stäbe (Keile), die die Ecken (Seiten) eines sphärischen Dreiecks mit den entsprechenden Ecken (Seiten) seines Polardreiecks verbinden, hat den Werth Null.)*

Beide Sätze, der auf die ebenen und der auf die sphärischen Quirle bezügliche, sind enthalten in dem weiteren Satz:

Die geometrische Summe der vier Quirle, die ihre Anfangspunkte in den Ecken und ihre Endebenen in den gegenüberliegenden Seitenflächen eines Tetraeders haben, ist gleich Null.

Hierin liegt nicht nur der bekannte Satz, dass die Höhen des Tetraeders einer Regelschaar zweiten Grades angehören, sondern es werden überdies vier in diesen Höhen liegende Stäbe angegeben, deren geometrische Summe verschwindet: Die Längen dieser Stäbe sind umgekehrt proportional den Längen der Höhen selbst. Ebenso wird durch die vorhergehenden Sätze der Satz vom Höhenschnittpunkt des (ebenen oder) sphärischen Dreiecks erweitert.

Auf die sich anschliessenden nicht ganz kurz zu beantwortenden Fragen nach der Umkehrung der letzten Sätze und nach deren Zusammenhang mit den vorhergehenden können wir nicht eingehen.

---

*) Wir erbringen weiter unten (§ 13) den Beweis eines allgemeineren Satzes. Beide hervorgehobenen Sätze werden übrigens im zweiten Abschnitt auch algebraisch hergeleitet werden.

§ 9.

Die correlative Superposition der Bewegungen.

Nachdem wir nunmehr die geometrische Addition der Quirle begründet haben, liegt eine weitere Frage nahe: Werden sich auch an sie weitere Entwickelungen anschliessen lassen, ähnlich denen, die wir, von der Geometrie der Keile ausgehend, in § 6 und § 7 durchgeführt hatten? Wird es nicht möglich sein, der verwickelten Figur einer auf die Normalform gebrachten Summe von Quirlen eine neue und einfachere zuzuordnen, und mit deren Hülfe dann die „geometrische Addition" auszuführen?

Dass dem so ist, zeigen wir auch hier, indem wir unsere Figuren mit der Geometrie der Bewegung in eine engere Verbindung bringen. Zuerst bilden wir, nach Analogie des „begleitenden" Stabes und Keiles einer geometrischen Summe von Keilen (§ 6), den Begriff des begleitenden Quirls einer geometrischen Summe von Quirlen. Wir knüpfen dabei wieder an die Geometrie der Stäbe an.

Es sei gegeben ein Stab $\mathfrak{S}$ und eine eigentliche Ebene, die wir jetzt mit $\overline{\overline{u}}$ bezeichnen wollen. Subtrahiren wir, geometrisch, von diesem Stab $\mathfrak{S}$ seine Projection in die Ebene $\overline{\overline{u}}$, so ist die Differenz ein neuer Stab, dessen Gerade auf der Ebene $\overline{\overline{u}}$ senkrecht steht, oder ein Stäbepaar, von dessen Ebenen dasselbe gilt. Zu diesem letzten Stab oder Stäbepaar gehört aber ein bestimmter Quirl, der in der doppelten Form

$$\mathfrak{Q}_x^{\overline{\overline{u}}} = \mathfrak{Q}_{\overline{u}}^{x'}$$

dargestellt werden kann. Von diesem Quirl wollen wir nun sagen, dass er zur Ebene $\overline{\overline{u}}$ *gehört* und den Quirl $\mathfrak{Q}$ *begleitet*, der mit dem Stabe $\mathfrak{S}$ verbunden ist.

Sofort zeigt sich nun, wie wir diesen Begriff erweitern können: Da selbstverständlich zwischen den Projectionen beliebiger Stäbe $\mathfrak{S}_i$ auf die Ebene $\overline{\overline{u}}$ (ausser anderen) dieselben linearen Relationen bestehen müssen, wie zwischen diesen Stäben selbst, so gilt dasselbe auch von den construirten begleitenden Quirlen. Es folgt also:

Auch jede geometrische Summe von Quirlen wird von einem bestimmten Quirl

$$\mathfrak{Q}_x^u = \mathfrak{Q}_{\overline{\overline{u}}}^{x'}$$

begleitet, der zu einer gegebenen eigentlichen Ebene $\overline{\overline{u}}$ gehört.

Werden Summen von Quirlen geometrisch addirt, so werden die zur selben Ebene gehörigen begleitenden Quirle ebenfalls geometrisch addirt.

Machen wir uns nun deutlich, wie man zu einem gegebenen einzelnen Quirl $\mathfrak{Q}$ die begleitenden Quirle unmittelbar bestimmen kann, d. h. ohne Benutzung des zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Stabes oder Stäbepaares.

Es möge *erstens* $\mathfrak{Q}$ ein eigentlicher Quirl sein, und es möge seine Gerade die Ebene $\bar{\bar{u}}$ in einem eigentlichen Punkt o treffen. Dann kann man setzen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\varphi}^{o} = \mathfrak{Q}_{o}^{\varphi'},$$

oder, wenn ω die auf der Geraden des Quirls im Punkte o senkrecht errichtete Ebene bedeutet, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'}$. Die gesuchten Punkte x und x' liegen in den Ebenen φ, φ', derart, dass ihre Projection auf $\bar{\bar{u}}$ in den Punkt o fällt. (S. Fig. 19.)

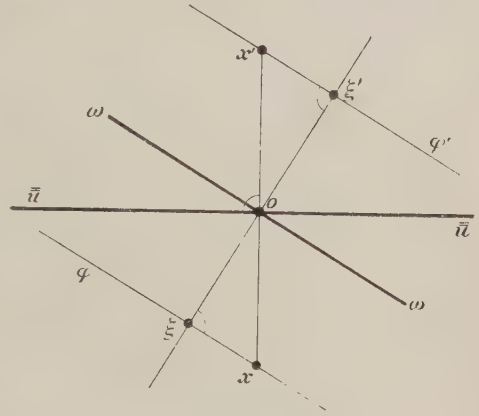


Fig. 19.

Liegt die Gerade des Quirles $\mathfrak{Q}$ in der Ebene $\bar{\bar{u}}$, so verschwindet der begleitende Quirl.

Sei *zweitens* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'}$ ein eigentlicher Quirl, dessen Gerade parallel ist zur Ebene $\bar{\bar{u}}$, so ist der begleitende Quirl uneigentlich. Seine Construction zeigt die Figur 20.

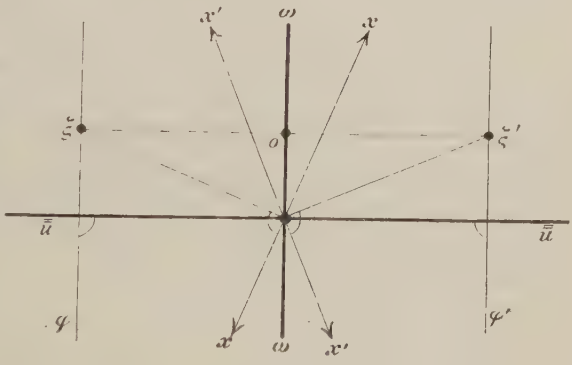


Fig. 20.

Sei *drittens* der Quirl $\mathfrak{Q}$ uneigentlich, so ist es der begleitende Quirl ebenfalls. Er gehört zu dem Vector, der durch Projection des Vectors von $\mathfrak{Q}$ auf die Ebene $\bar{\bar{u}}$ entsteht.

Die Fig. 21 (S. 72) zeigt, wie der den Quirl $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'}$ begleitende Quirl $\mathfrak{Q}_{x}^{u} = \mathfrak{Q}_{u}^{x'}$ construirt werden kann, ohne dass man die Vectoren benutzt. Man ertheile dem Quirl $\mathfrak{Q}$ eine solche Lage, dass eine in ω enthaltene Querlinie des Trägers von $\mathfrak{Q}$ in die Ebene $\bar{\bar{u}}$ zu liegen kommt. Ist dann o irgend ein eigentlicher Punkt dieser Querlinie, so verbinde man diesen Punkt mit den unendlich fernen Punkten ξ, ξ' durch gerade Linien. Die gesuchten

uneigentlichen Punkte x, x' liegen dann in einer in der genannten Querlinie senkrecht auf $\overline{\overline{u}}$ errichteten Ebene, und zwar so, dass die Verbindungslinien ox, ox' orthogonal auf die Ebene des Dreiecks $o\xi\xi'$ projicirt, eben in die Geraden $o\xi$, $o\xi'$ übergehen.

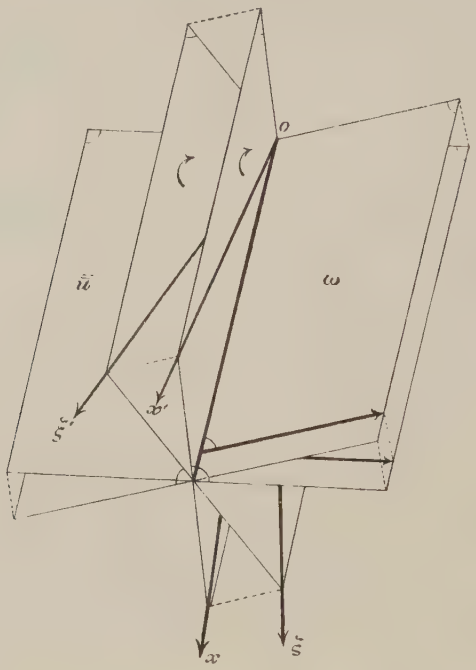


Fig. 21.

Liegt der Quirl $\mathfrak{Q}$ so, dass sein (in der Figur durch einen in ω liegenden Pfeil angedeuteter) Vector zu der Ebene $\overline{\overline{u}}$ parallel ist, so wird der begleitende Quirl dem Quirl $\mathfrak{Q}$ selbst gleich; liegt der Quirl $\mathfrak{Q}$ so, dass sein Vector auf der Ebene $\overline{\overline{u}}$ senkrecht steht, so verschwindet der begleitende Quirl.

Sei *viertens* der Quirl $\mathfrak{Q}$ gleich Null, so ist jeder begleitende Quirl ebenfalls gleich Null.

Es sei nun vorgelegt eine von Null verschiedene geometrische Summe von Quirlen, die sich nicht auf einen uneigentlichen Quirl reducirt.

Wir behaupten, dass dann die durch die begleitenden Quirle vermittelte Zuordnung zwischen Punkten x, x' des Raumes eine Bewegung ist, dass also die Zuordnung zwischen der Ebene $\overline{\overline{u}}$ und den Punkten x, x' identisch ist mit der in § 2 untersuchten Zuordnung zwischen den Endpunkten einer Sehne und der Normalebene dieser Sehne:

$$x\{T\}\overline{\overline{u}}\{T\}x', \quad S = T^2.$$

Diese Bewegung S wird so gefunden: Man bringe die vorgelegte Summe von Quirlen auf die Normalform:

$$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} + \mathfrak{Q}_{\eta}^{\varpi} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'} + \mathfrak{Q}_{\varpi}^{\eta'}. \quad (\mathfrak{Q}' \neq 0)$$

Ist dann $\mathfrak{Q}'' = 0$, *so ist*

$$S = \{\xi, \omega\} = \{\omega, \xi'\};$$

ist aber $\mathfrak{Q}'' \neq 0$, *so ist*

$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}'\},$$

wenn $\mathfrak{D}$ *die Schnittlinie der Ebenen* ω, ϖ *ist, und* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ *die Verbindungslinien der Punkte* ξ, η *und* ξ', η' *bedeuten.*

Dass dieser Satz für den Fall $\mathfrak{Q}'' = 0$ richtig ist, zeigt ein Blick auf die Figur 19. Wir dürfen also annehmen, dass $\mathfrak{Q}''$ von Null verschieden sei.

Die Ebenen ω und ϖ schneiden sich, da $\mathfrak{Q}$ in der Normalform angenommen worden ist, unter rechtem Winkel in der Geraden $\mathfrak{D}$ (s. Fig. 22), und diese wird von der Geraden $\xi\xi'$ des Quirles $\mathfrak{Q}'$, die zugleich den Vector des Quirles $\mathfrak{Q}''$ enthält, und in der Ebene ϖ verläuft, in einem Punkte o gleichfalls unter rechtem Winkel getroffen. Die uneigentlichen Punkte η und η' liegen in der Ebene ω symmetrisch zu ϖ oder $\mathfrak{D}$.

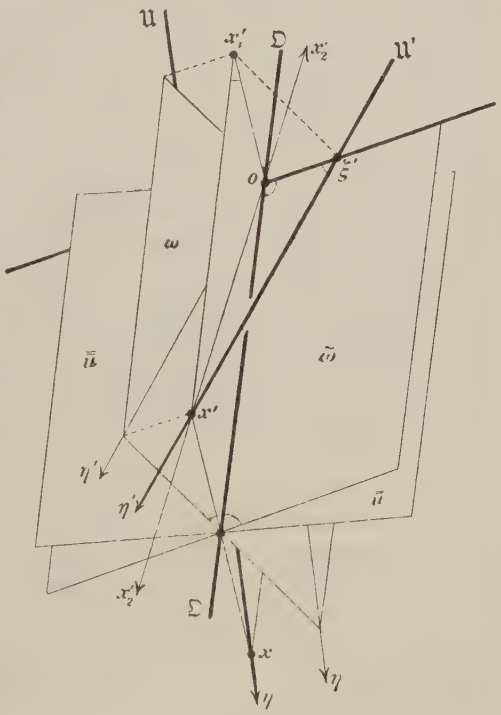


Fig. 22.

Wir können nun, wenn $\bar{\bar{u}}$ nicht gerade parallel ist zu $\xi\xi'$, annehmen, dass die Querlinie $\mathfrak{D}$ des Trägers von $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ in der Ebene $\bar{\bar{u}}$ selbst verläuft. Es mag der Kürze halber genügen, den Satz unter dieser Voraussetzung, die ja den allgemeinen Fall darstellt, zu beweisen. Wir nennen dann o den Schnittpunkt von $\mathfrak{D}$ und $\xi\xi'$, so dass $\overline{\xi o} = \overline{o\xi'}$.

Wir construiren nun zuerst die begleitenden Quirle $\mathfrak{Q}_{x_1}^{\bar{\bar{u}}} = \mathfrak{Q}_{u}^{x_1'}$ und $\mathfrak{Q}_{x_2}^{\bar{\bar{u}}} = \mathfrak{Q}_{\bar{\bar{u}}}^{x_2'}$ der beiden Summanden $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$. Der Punkt x_1'

wird gefunden, wenn wir durch den Punkt ξ' eine Ebene senkrecht zu $\xi\xi'$, also parallel zu ω legen, und diese Ebene mit der in o auf $\overline{\overline{u}}$ errichteten Senkrechten zum Schnitt bringen (vgl. Fig. 19). Der uneigentliche Punkt x_2' wird gefunden, wenn wir die Gerade $o\eta'$ mit der Geraden $o\xi'$ durch eine Ebene verbinden, und diese mit der in $\mathfrak{O}$ auf $\overline{\overline{u}}$ senkrecht errichteten Ebene und mit der unendlich fernen Ebene zum Schnitt bringen. (Vgl. Fig. 21 und den zugehörigen Text.) Nunmehr kann der Punkt x construirt werden, und ebenso auch der Punkt x', derart dass

$$\mathfrak{Q}_x^{\overline{u}} = \mathfrak{Q}_{x_1}^{\overline{u}} + \mathfrak{Q}_x^{\overline{u}} = \mathfrak{Q}_{\overline{u}}^{x_1'} + \mathfrak{Q}_{\overline{u}}^{x_2'} = \mathfrak{Q}_{\overline{u}}^{x'} :$$

Wir legen durch x_1' eine Parallele zu $\mathfrak{O}$ und bringen diese zum Schnitt mit der Geraden ox_2' (vgl. Fig. 18). Den so gefundenen Punkt x' erhalten wir nun aber auch als Schnittpunkt dreier Ebenen (vgl. überall die Fig. 22): Durch ihn geht erstens die in $\mathfrak{O}$ senkrecht auf $\overline{\overline{u}}$ errichtete Ebene; zweitens die durch ξ' parallel zu ω gelegte und daher durch η' gehende Ebene; drittens die Ebene, die $o\xi'$ mit x_2' und η' verbindet. Der Punkt x' liegt also auf der Geraden $\xi'\eta'$, eben der, die wir oben mit $\mathfrak{U}'$ bezeichnet hatten. Der Punkt x' liegt aber auf dieser Geraden $\mathfrak{U}'$ überdies so, dass die von ihm auf $\mathfrak{O}$ gefällte Senkrechte zugleich auch Normale der Ebene $\overline{\overline{u}}$ ist; d. h. er liegt senkrecht über dem Schnitt von $\mathfrak{O}$ mit der Projection von $\mathfrak{U}'$. Damit sind wir nun zu der in § 2 betrachteten (und durch Fig. 3, S. 18 dargestellten) Construction eines Punktes x' gekommen. Die durch unsere Geraden $\mathfrak{U}, \mathfrak{O}, \mathfrak{U}'$ definirte Bewegung $S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{O}\} = \{\mathfrak{O}, \mathfrak{U}'\}$ ist, nach Construction, *weder eine Drehung, noch eine Schiebung:* Es ist also erlaubt, die genannten Geraden mit den in § 2 ebenso bezeichneten geraden Linien zu identificiren. Damit aber ist der aufgestellte Satz bewiesen, und ebenso dessen nunmehr leicht zu formulirende Umkehrung.

Wir betrachten jetzt den bisher ausgeschlossenen Grenzfall, in dem die vorgelegte geometrische Summe von Quirlen in einen uneigentlichen Quirl, und zwar zunächst in einen von Null verschiedenen Quirl

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\xi^\omega = \mathfrak{Q}_\omega^{\xi'}$$

übergeht.

Da die Punkte x, x' jetzt beide uneigentlich sind, so definirt der begleitende Quirl

$$\mathfrak{Q}_x^{\overline{u}} = \mathfrak{Q}_{\overline{u}}^{x'}$$

weder eine Bewegung, noch überhaupt eine Transformation der eigentlichen Punkte des Raumes. Auch ist die Beziehung zwischen den Punkten x, x' und der Ebene $\overline{\overline{u}}$ nunmehr unendlich-vieldeutig, da die

Punkte x, x' ihre Lage nicht ändern, wenn man die Ebene $\bar{\bar{u}}$ parallel verschiebt. Es lässt sich aber einsehen, dass die bewirkte Zuordnung der *uneigentlichen* Punkte x, x' wenigstens eine Bewegung, eine Drehung in der unendlich fernen Ebene ist.

Wir lassen die Ebenen ω und $\bar{\bar{u}}$ durch einen bestimmt angenommenen eigentlichen Punkt o gehen (Fig. 21), und vollziehen dann, wie wir schon mehrfach gethan haben, den Uebergang zur sphärischen Geometrie. Es entsteht nunmehr, bei geeigneter Orthogonalprojection der Kugelfläche, die Fig. 23, die der Leser leicht aus der Fig. 21 ableiten wird; der zu beweisende Satz tritt ohne Weiteres in Evidenz. Zu bemerken ist noch, dass die durch die Zuordnung zwischen x und x' bestimmte Bewegung oder Drehung der Kugelfläche, und ebenso die entsprechende, durch $x\{S\}x'$ erklärte Bewegung der unendlich fernen Ebene, *niemals involutorisch* sein kann, und dass sie — unter der oben ausdrücklich gemachten Voraussetzung — auch von der identischen Bewegung verschieden ist. Denn im ersten Falle würden die Punkte ξ, ξ' auf der Kugel einander diametral gegenüberliegen, und die Strahlen $o\xi$, $o\xi'$ würden sich mit einem Strahl der Ebene ω vereinigen, was nach dem Begriff des uneigentlichen Quirls ausgeschlossen ist; im zweiten Falle aber würden ξ und ξ' zusammenfallen, und $o\xi = o\xi'$ würde auf der Ebene ω senkrecht stehen, es würde also $\mathfrak{Q} = 0$ folgen.*)

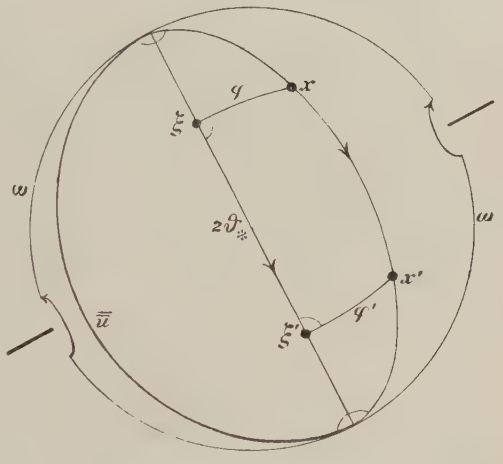


Fig. 23.

Machen wir endlich auch die letzte mögliche Annahme, die nämlich, dass $\mathfrak{Q} = 0$ ist, so wird die Zuordnung zwischen x und x' die identische Bewegung in der unendlich fernen Ebene.

Wir heben nun zunächst einen Theil unserer Folgerungen hervor:

---

*) Ein näheres Eingehen auf die Natur der Zuordnung zwischen x, $\bar{u}$, x' kann hier entbehrt werden; doch wollen wir erwähnen, dass diese Zuordnung eine *Correlation t* ist, derart, dass

$$x\{t\}\bar{u}\{t\}x', \qquad S = t^2.$$

(Vgl. § 2.) Der Leser findet Genaueres darüber Math. Ann. Bd. 39, S. 501 u. ff.

Durch die begleitenden Quirle $\mathfrak{Q}_x^u = \mathfrak{Q}_{x'}^{u'}$ *eines uneigentlichen Quirls* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\xi^\omega = \mathfrak{Q}_{\xi'}^{\omega'}$ *wird eine Zuordnung zwischen den Punkten* x, x' *der unendlich fernen Ebene hervorgerufen, die auch durch eine Drehung (und folglich durch* ∞^2 *Drehungen) erzeugt werden kann.*

Diese selbe Zuordnung kann nun aber auch noch in anderer Weise, nämlich durch einen *Grenzübergang* hergestellt werden.

Betrachten wir zunächst wieder einen eigentlichen Quirl $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\xi^\omega = \mathfrak{Q}_{\xi'}^{\omega'}$, mit dem, wie wir gesehen haben, eine Umschraubung verbunden ist. Halten wir die Ebene ω fest, und lassen wir die Punkte ξ und ξ' auf bestimmten Geraden irgendwie in's Unendliche rücken (vgl. Fig. 21), so entsteht offenbar eben die Zuordnung, die wir betrachtet haben, oder auch eine involutorische Drehung in der unendlich fernen Ebene. Wir können also diese Zuordnung, mit Einschluss des letztgenannten Falls, als *Ausartung einer Umschraubung* auffassen. Dabei müssen wir nur darauf achten, dass *vor* dem Uebergang zur Grenze nur eigentliche Punkte x, x', *nachher* aber nur uneigentliche Punkte zu betrachten sind. Eine solche ausgeartete Umschraubung ist also, nach Obigem, eine Drehung der unendlich fernen Ebene, gehörig zu einem halben Drehungswinkel ϑ_*, der *nicht nothwendig* $\equiv \frac{\pi}{2}$ mod. π ist, im Gegensatz zu dem halben Drehungswinkel der nicht ausgearteten Umschraubungen, von denen wir ausgegangen sind.*) Und wenn die ausgeartete Umschraubung in der geschilderten Beziehung zu einem uneigentlichen Quirl steht, so ist, wie wir gesehen haben, dieser Winkel ϑ_* *niemals* $\equiv \frac{\pi}{2}$ mod. π.

Diese besonderen ausgearteten Umschraubungen werden also an Stelle der Bewegungen S treten in den Fällen, die wir oben noch hatten ausschliessen müssen: Wir haben jetzt, um zu einer präcisen und alle Fälle umfassenden Formulirung zu gelangen, nur noch den Begriff des Trägers von den Bewegungen auf diese ausgearteten Umschraubungen zu übertragen. Das hat keinerlei Schwierigkeit: *Träger einer ausgearteten Umschraubung* im engeren (weiteren) Sinne werden wir offen bar jedes uneigentliche (eigentliche) Linienkreuz nennen müssen, das die Axe einer der Drehungen als Hauptaxe hat, die die Punkte der unendlich fernen Ebene ebenso vertauschen, wie die ausgeartete Umschraubung selbst.

---

*) Für die uneigentlichen Punkte findet also beim Uebergang zur Grenze eine Unterbrechung der Continuität statt. Das Verhalten des Drehungswinkels hier ist vollkommen analog dem Verhalten der Länge eines Motors bei dem Grenzübergang vom Rotor zum Translator. (Vgl. § 7, S. 52.)

Nunmehr sind wir endlich im Stande, für die abgeleiteten Sätze einen zusammenfassenden und zugleich möglichst einfachen Ausdruck zu finden.

XIII. *Mit jeder geometrischen Summe von Quirlen ist eindeutig umkehrbar entweder eine Bewegung S verbunden, die keine Drehung oder Schiebung ist, oder, im besonderen Falle, eine ausgeartete Umschraubung S, die die uneigentlichen Punkte nicht involutorisch paart.*

Die Summe von Quirlen und die Zuordnung S haben beide denselben Träger.

Nachdem die Summe von Quirlen auf die Normalform $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ gebracht ist, sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{(a)} \quad \mathfrak{Q}' \neq 0, \qquad \mathfrak{Q}'' \neq 0.$$

*S ist dann eine Bewegung, aber keine Umschraubung. Die Länge des eigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}'$ ist die halbe Schiebungsgrösse von S, und die Oeffnung des uneigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}''$ die Tangente des halben Drehungswinkels von S.**)

$$\text{(b)} \quad \mathfrak{Q}' \neq 0, \qquad \mathfrak{Q}'' = 0.$$

S ist eine nicht ausgeartete Umschraubung.

$$\text{(c)} \quad \mathfrak{Q}' = 0, \qquad \mathfrak{Q}'' \neq 0.$$

S ist eine ausgeartete Umschraubung, die, als Drehung in der unendlich fernen Ebene angesehen, von der identischen Transformation verschieden ist. Die Oeffnung des uneigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}''$ ist entgegengesetzt gleich der Cotangente des halben Drehungswinkels ϑ_* der ausgearteten Umschraubung S (vgl. Fig. 23).

$$\text{(d)} \quad \mathfrak{Q}' = 0, \qquad \mathfrak{Q}'' = 0.$$

Die Zuordnung S ist die ausgeartete Umschraubung, die alle uneigentlichen Punkte einzeln in Ruhe lässt (die identische Transformation in der unendlich fernen Ebene).

Wir werden, um für diese verwickelten Beziehungen einen kurzen Ausdruck zu haben, nach Analogie der an den Satz V. geknüpften Begriffsbildung sagen, *die Zuordnung S und die geometrische Summe von Quirlen seien einander associirt.* Wir können dann, nach Obigem, aussagen:

---

*) Der Winkel $(\eta, \varpi) = (\varpi, \eta')$ des Quirls $\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}_\eta^\varpi = \mathfrak{Q}_\varpi^{\eta'}$ ist zugleich der Winkel ang $(\mathfrak{U}, \mathfrak{O}) =$ ang $(\mathfrak{O}, \mathfrak{U}')$ der zu S gehörigen Umwendungsaxen. (S. Fig. 22.)

Ist $\mathfrak{Q}_x^u = \mathfrak{Q}_{\bar{u}}^{x'}$ *ein begleitender Quirl einer geometrischen Summe* $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ *von Quirlen, so wird dem Punkte* x *der Punkt* x' *durch die der Summe associirte Bewegung oder ausgeartete Umschraubung* S *zugeordnet:*

$$x\{S\}x'.$$

Ist umgekehrt die Zuordnung S gegeben, so bestimmt jedes Paar entsprechender Punkte x, x' einen Quirl, der die Summe $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ begleitet. Ist S eine Bewegung, und sind x, x' eigentliche Punkte, so ist $\bar{\bar{u}}$ die Normalebene der Sehne xx'. Entsprechendes gilt, wenn x und x' uneigentliche Punkte sind: nur das eine Punktepaar, dessen beide Punkte sich im uneigentlichen Punkt der Schraubenaxe von S vereinigen, bildet eine *Ausnahme.* Ist S eine ausgeartete Umschraubung, so gehört ebenfalls zu jedem Paar von einander zugeordneten (uneigentlichen) Punkten x, x' eine Ebene $\bar{\bar{u}}$, die *„Normalebene der Sehne* xx',“ die nun natürlich unbestimmt ist in einem Büschel paralleler Ebenen. Diese Ebenen $\bar{\bar{u}}$ können gefunden werden, wenn man, wie oben, der ausgearteten Umschraubung eine Drehung zuordnet, die einen beliebigen eigentlichen Punkt o in Ruhe lässt. Bestimmt man dann im Ebenenbündel (o) die beiden Ebenen u, u', die auf den Strahlen ox, ox' senkrecht stehen, und construirt man die eigentliche Winkelhalbirende (S. 14) dieser beiden Ebenen, so ist diese eine der gesuchten Ebenen $\bar{\bar{u}}$. Völlig unbestimmt wird die Ebene $\bar{\bar{u}}$ natürlich im Falle (d).

Es wird hiernach nun der folgende Satz verständlich sein, mit dem man die Sätze 6a), 6b) des § 6 (S. 49) vergleichen möge:

14. *Es sei eine Mannigfaltigkeit von Zuordnungen zwischen Punkten* x, x' *definirt, die alle Bewegungen umfasst, die nicht Drehungen oder Schiebungen sind, und alle ausgearteten Umschraubungen, die nicht involutorisch sind.*

Ist dann die Ebene ω *Normalebene der Sehnen* $\xi\xi'$ *und* $\eta\eta'$ *in Bezug auf zwei gegebene solche Zuordnungen, und werden mit Hülfe des Quirltrapezes u. s. w.* (§ 8, Nr. 10, vgl. Fig. 16, 17) *zwei neue Punkte* ζ, ζ' *nach der Vorschrift*

$$\mathfrak{Q}_\omega^\zeta = \mathfrak{Q}_\omega^\xi + \mathfrak{Q}_\omega^\eta, \quad \mathfrak{Q}_\omega^{\zeta'} = \mathfrak{Q}_\omega^{\xi'} + \mathfrak{Q}_\omega^{\eta'}$$

construirt, so ist $\zeta\zeta'$ *Sehne einer bestimmten dritten Zuordnung der genannten Art.*

Wir sagen, diese neue Zuordnung sei aus den beiden ersten durch „correlative Superposition“ entstanden.

Zu dieser Definition ist dann, nach Analogie der Nr. 7 des § 6, noch eine weitere zu fügen:

15. *Wenn zwei Zuordnungen S, S' der beschriebenen Art denselben Träger haben, so sagen wir, die Zuordnung S' sei aus der Zuordnung S durch „correlative Streckung“ im Verhältniss $c:1$ hervorgegangen, wenn folgende Beziehungen stattfinden:*

a, b). *Falls S und S' Bewegungen sind, wenn zwischen den halben Drehungswinkeln und Schiebungsgrössen die Relationen stattfinden:*

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{1}{c}\cdot\operatorname{tg}\vartheta\,, \qquad \eta' = \frac{1}{c}\cdot\eta$$

c, d). *Falls S und S' ausgeartete Umschraubungen sind, wenn zwischen deren halben Drehungswinkeln die Relation stattfindet:*

$$\operatorname{tg}\vartheta_*' = c\cdot\operatorname{tg}\vartheta_*\,.$$

Die „lineare“ und die „correlative“ Streckung im Verhältniss $c:1$ sind also in gewissem Umfange inverse Operationen, deren eine die andere aufhebt, nämlich soweit das mit S bezeichnete Object dieser Operationen eine Bewegung, und zwar weder eine Drehung oder Schiebung, noch auch eine Umschraubung ist; diese Reciprocität erstreckt sich aber nicht auf die ausgeschlossenen Grenzfälle, in denen die eine oder die andere der beiden Operationen überhaupt sinnlos wird.

Nunmehr können wir den ganzen Inhalt der im gegenwärtigen Paragraphen ausgeführten Untersuchung in dem folgenden Satz zusammenfassen:

XIV. *Summen von Quirlen werden geometrisch addirt, indem man die ihnen associirten Zuordnungen (Bewegungen oder ausgeartete Umschraubungen) correlativ superponirt, und umgekehrt.*

Eine Summe von Quirlen wird mit einer Zahl c geometrisch multiplicirt, indem man die ihr associirte Zuordnung einer correlativen Streckung im Verhältniss $c:1$ unterwirft.

Wie der Satz über die gemeinsamen Querlinien der Träger mehrerer Summen von Quirlen nun ausgedrückt werden kann, braucht wohl nicht ausdrücklich gesagt zu werden.

§ 10.

Die geometrische Addition der Impulsoren.

Wie mit jeder geometrischen Summe von Keilen eine Figur zweier gerader Linien verbunden ist (§ 7), so auch mit jeder geometrischen Summe von Quirlen. Die Figur, zu der wir nunmehr geführt werden, stimmt aber mit der schon betrachteten Figur des Motors nur „im

Allgemeinen" überein, nicht auch in Grenzfällen, die wir von der Betrachtung schlechterdings nicht ausschliessen können. Wir dürfen sie daher auch nicht durch dasselbe Wort bezeichnen; wir werden vielmehr genöthigt sein, neue Ausdrücke zu bilden.

Wir nennen *Impulsor* die Figur zweier in eine bestimmte Reihenfolge gesetzter gerader Linien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die der Bedingung genügen, *nicht in einer Ebene* enthalten zu sein, und von denen daher wenigstens eine eigentlich sein muss. Wir stellen diesen Impulsor durch das Symbol $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ dar. Sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ eigentliche Gerade, die sich unter einem rechten Winkel kreuzen, so nennen wir den Impulsor einen *Torsor*. Ist eine der beiden Geraden uneigentlich, so brauchen wir den Ausdruck *Ejector*. Die Gerade $\mathfrak{X}$ nennen wir in jedem Falle die „Anfangslinie", die Gerade $\mathfrak{Y}$ die „Endlinie" des Impulsors.

Schliessen wir zunächst die Ejectoren aus, so können wir eine Reihe von Begriffen ohne Aenderung von den Motoren auf die Impulsoren übertragen: Der Begriff des *Trägers* eines Impulsors, mit Haupt- und Nebenaxe, der Begriff der *Länge* dist. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ und der der *Oeffnung* tg ang $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ eines Impulsors, endlich auch der durch das Gleichheitszeichen auszudrückende Begriff der Aequivalenz oder *Gleichheit* zweier Impulsoren, alle diese bedürfen, in dem angenommenen Falle, keiner besonderen Erklärung. Ein Unterschied findet nur insofern statt, als Länge und Oeffnung eines Impulsors stets von Null verschieden, Länge und Oeffnung eines Motors stets von ∞ verschieden sind. Dagegen müssen wir besondere Erklärungen geben für den Fall des Ejectors.

Wie die in diesem Falle einzuführenden Begriffe zu fassen sind, zeigt sich, wenn wir nochmals den im vorigen Paragraphen besprochenen Grenzübergang vom eigentlichen zum uneigentlichen Quirl vornehmen. Wir hatten dort gesehen, dass mit einem eigentlichen Quirl $\mathfrak{Q}_{\xi}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'}$ eine Umschraubung $S = \{\xi, \omega\} = \{\omega, \xi'\}$ verbunden ist, und dass diese, wenn ξ und ξ' auf bestimmten Geraden $o\xi$, $o\xi'$ ins Unendliche rücken, in die ausgeartete Umschraubung übergeht, die dem im Grenzfall entstehenden uneigentlichen Quirl associirt ist. Die genannte Umschraubung S kann nun auch als Folge zweier Umwendungen dargestellt werden, $S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}'\}$, wobei man annehmen darf, dass die mit $\mathfrak{D}$ bezeichnete Gerade in der Ebene ω liegt und durch den Punkt o geht. (Fig. 24). Mit dem Quirl $\mathfrak{Q}$ ist also ein *Torsor*

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{D}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{U}'}$$

verbunden, der in leicht erkennbarer Weise auch umgekehrt wieder den Quirl bestimmt. Geht man nun zur Grenze über, so entsteht aus

dem Torsor ein Ejector; d. h. es entsteht eine Figur, die entweder gebildet wird von einem Büschel paralleler Ebenen $(\mathfrak{U})$ und einer eigentlichen Geraden $\mathfrak{D}$, oder von dieser Geraden $\mathfrak{D}$ und einem

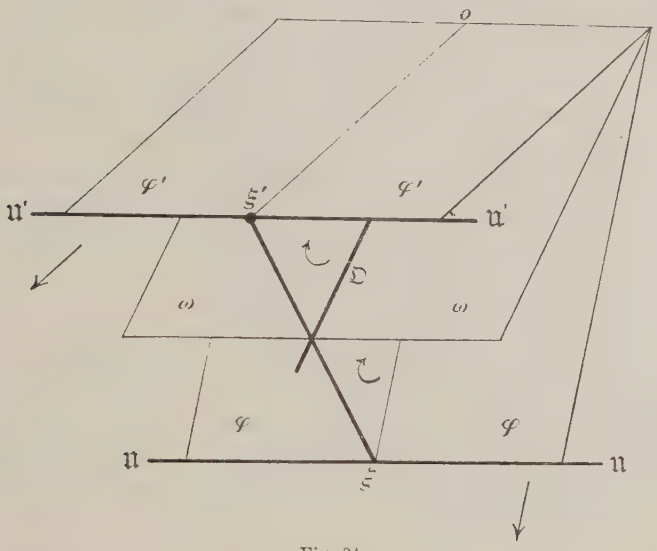


Fig. 24.

anderen Büschel paralleler Ebenen $(\mathfrak{U}')$. Die beiden Ebenenbüschel sind gegen die Gerade $\mathfrak{D}$ entgegengesetzt-gleich geneigt, und bilden mit dieser einen mod. π von Null verschiedenen Winkel

$$(\varphi, \omega) = (\omega, \varphi'),$$

der mod. π congruent ist dem *negativ* genommenen und um $\frac{\pi}{2}$ vermehrten Winkel ϑ_* der Drehung, die die uneigentlichen Punkte ebenso vertauscht, wie die im Grenzfall entstandene ausgeartete Umschraubung (vgl. die Figuren 23 und 24); einen Winkel, dessen goniometrische Tangente die Oeffnung des im Grenzfalle entstandenen uneigentlichen Quirls ist (S. 64). Die Ebenen des Büschels $(\mathfrak{U})$ schneiden die des Büschels $(\mathfrak{U}')$ in einem Bündel paralleler Geraden, auf deren jeder der Vector liegen kann, der zu dem uneigentlichen Quirl gehört.

So gelangen wir zu den folgenden Bestimmungen:

Es möge ein *Ejector* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ gegeben sein durch eine uneigentliche (eigentliche) Gerade $\mathfrak{x}$ als Anfangslinie und eine eigentliche (uneigentliche) Gerade $\mathfrak{y}$ als Endlinie. Wir projiciren die Gerade $\mathfrak{x}$ $(\mathfrak{y})$ aus irgend einem eigentlichen Punkte o von $\mathfrak{y}$ $(\mathfrak{x})$ durch eine Ebene φ (ψ); wir construiren sodann in dieser Ebene die Gerade, die im Punkte o auf $\mathfrak{y}$ $(\mathfrak{x})$ senkrecht steht, und verbinden diese Gerade mit

$\mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}$) durch eine Ebene ψ (φ). Die stets von Null verschiedene Grösse tg (φ, ψ) nennen wir dann die *Oeffnung des Ejectors.* Wir bezeichnen ferner als *Träger des Ejectors* im engeren Sinne das uneigentliche Linienkreuz, das die im Allgemeinen bestimmte Schnittlinie φ, ψ als Hauptaxe hat, und im weiteren Sinne jedes zu diesem Linienkreuz parallele eigentliche Linienkreuz. Wir nennen ferner zwei Ejectoren $\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1}$ und $\mathfrak{J}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$ *gleich*, wenn sie dasselbe uneigentliche Linienkreuz als Träger haben, und wenn nach Verwandlung der beiden Hauptaxen φ_1, ψ_1 und φ_2, ψ_2 dieses Linienkreuzes in syntaktische Speere (§ 1) die beiden Oeffnungen tg (φ_1, ψ_1) und tg (φ_2, ψ_2) einander gleich werden. Anders ausgedrückt, wir betrachten die beiden Ejectoren als gleich, wenn die Drehungen

$$\{\varphi_1, \psi_1\}, \qquad \{\varphi_2, \psi_2\}$$

die uneigentlichen Punkte in gleicher Weise transformiren, wenn also diese Drehungen sich nur um eine zu der einen als symbolischer Factor hinzutretende Schiebung von einander unterscheiden. Jeder Ejector kann hiernach so dargestellt werden, dass eine beliebige Querlinie $\mathfrak{O}$ seines Trägers Endlinie oder Anfangslinie wird: der Ejector erscheint in der doppelten Gestalt

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{O}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{u}'},$$

eben der, zu der wir oben durch einen Grenzübergang gelangt waren. Zu jedem Ejector gehört ferner ein völlig bestimmter uneigentlicher Quirl $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}}^{\omega} = \mathfrak{Q}_{\omega}^{\xi'}$, dessen Construction durch die Fig. 24 dargestellt wird. Da jeder solche Quirl mit einem Vector verbunden ist, so gilt das Gleiche von den Ejectoren: Ein Ejector und der *zugehörige Vector* haben beide denselben Träger, und der reciproke Werth der Oeffnung des Ejectors ist gleich der Länge des Vectors. Wir hätten demnach auch erklären können:

Zwei Ejectoren sind gleich, wenn zu beiden derselbe Vector gehört.

Die obigen Constructionen werden unbestimmt, wenn die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Figur eines eigentlichen Linienkreuzes bilden. Alle derartigen Ejectoren haben wir als einander gleich anzusehen; wir stellen sie gemeinsam dar durch das Zeichen der Null. Wir nennen den so erklärten Ejector den Ejector oder *Impulsor Null.*

Es giebt also ∞^6 von Ejectoren verschiedene Impulsoren, darunter ∞^5 Torsoren, und jeder von diesen kann auf ∞^2 Arten durch ein Paar eigentlicher gerader Linien dargestellt werden. Es giebt aber nur ∞^3 von Null verschiedene Ejectoren, und jeder von diesen kann auf ∞^3 Arten durch ein Paar von Geraden dargestellt werden, von denen eine eigentlich und eine uneigentlich ist. Die

eigentliche Gerade kann als Querlinie des Trägers des Ejectors noch beliebig angenommen werden; die ganze Figur ist dann bestimmt, wenn festgesetzt wird, ob diese Querlinie Anfangslinie oder Endlinie des Ejectors sein soll. Dazu kommt endlich noch der Impulsor Null, der auf ∞^4 Weisen durch die Figur eines eigentlichen Linienkreuzes dargestellt werden kann.

Nunmehr können wir das über die Zuordnung zwischen Quirlen und Impulsoren schon Gesagte so vervollständigen:

XV. *Jeder geometrischen Summe von Quirlen kann man einen völlig bestimmten Impulsor desselben Trägers zuordnen, den „der Summe von Quirlen associirten" Impulsor, und umgekehrt.*

Ist die Summe von Quirlen und zugleich die zugehörige Summe von Stäben auf die Normalform gebracht,

$$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'', \qquad \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'',$$

so ist die Länge des associirten Impulsors gleich der Länge des eigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}'$ und gleich dem reciproken Werthe der Länge des Stabes $\mathfrak{S}'$. Ferner ist die Oeffnung des associirten Impulsors gleich der Oeffnung des uneigentlichen Quirles $\mathfrak{Q}''$ und gleich dem reciproken Werthe des Momentes des Stäbepaares $\mathfrak{S}''$.

Verschwindet in den genannten Summen das zweite Glied (b), so reducirt sich der Impulsor auf einen Torsor; verschwindet das erste (c), so reducirt er sich auf einen Ejector; verschwinden endlich (d) beide Glieder zugleich, so wird auch der der Summe $\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$ associirte Impulsor gleich Null. — Man vergleiche mit dem Satz XV. den sehr ähnlichen Satz VII., S. 53.

Wir wenden uns nun zurück zu den Darlegungen des vorigen Paragraphen. Statt der geometrischen Summen von Quirlen führen wir jetzt die ihnen associirten Zuordnungen, Bewegungen oder ausgeartete Umschraubungen ein. Zwischen diesen und den Impulsoren besteht nun natürlich ebenfalls eine ein-eindeutige Beziehung, und zwar eine solche von sehr einfacher Art. Ist eine Bewegung $S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}'\}$ zu derselben Summe von Quirlen associirt, wie der Impulsor $\mathfrak{I}$, so ist $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{D}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{U}'}$. Wie diese Beziehung abzuändern ist, wenn die Bewegung S in eine ausgeartete Umschraubung übergeht, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Wir brauchen nun nur die unter 14. angegebene Construction zu specialisiren, um aus zwei gegebenen Impulsoren, die gewissen Summen von Quirlen associirt sind, den Impulsor abzuleiten, der der geometrischen Summe dieser beiden Summen associirt ist: Wir brauchen nur anzunehmen, dass die dort mit

ω bezeichnete Ebene sich um eine gemeinsame Querlinie $\mathfrak{D}$ der Träger der beiden gegebenen Impulsoren dreht. Wir können dann, nach § 2, die zu ω als Normalebene gehörigen Sehnen $\xi\xi'$, $\eta\eta'$ auf die einfachste Weise finden (s. Fig. 3, S. 18, und den zugehörigen Text). Die auszuführende Construction verläuft ganz in der Ebene, die in der Geraden $\mathfrak{D}$ senkrecht auf ω errichtet ist. Es ergiebt sich also die folgende Construction:

16. *Es seien vorgelegt zwei Impulsoren* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}}$ *und* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}}$ *mit gemeinsamer eigentlicher Anfangslinie, drei Gerade* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *also, deren erste eigentlich ist und mit keiner der beiden anderen in einer Ebene liegt.*

Man schneide nun die Geraden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *mit einer durch* $\mathfrak{D}$ *gelegten veränderlichen Ebene in Punkten* ξ, η, *und lege senkrecht zu dieser Ebene durch* $\mathfrak{D}$ *eine zweite Ebene* ω.

Construirt man dann, mit Hilfe des Quirltrapezes u. s. w. (vgl. Fig. 16, 17 u. s. f.), *also nach der Vorschrift*

$$\mathfrak{D}_{\omega}^{\xi} + \mathfrak{D}_{\omega}^{\eta} = \mathfrak{D}_{\omega}^{\zeta}$$

einen neuen Punkt ζ, *so ist der Ort dieses Punktes* ζ *eine eigentliche oder uneigentliche Gerade* $\mathfrak{z}$, *die mit der Geraden* $\mathfrak{D}$ *wiederum nicht durch eine Ebene verbunden werden kann, und also mit dieser zusammen einen Impulsor* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{z}}$ *definirt.*

Wir nennen diesen Impulsor die geometrische Summe der Impulsoren $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}}$, *und wir drücken diese Beziehung durch die symbolische Gleichung*

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}} + \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{z}}$$

aus.

Da die Träger zweier Impulsoren stets wenigstens eine gemeinsame Querlinie haben, so kann durch die angeführte Construction unter allen Umständen die geometrische Summe von zwei oder mehr Impulsoren gebildet werden; nur ist zu bemerken, dass an Stelle des Quirltrapezes, nach § 8, in besonderen Fällen andere, übrigens nicht weniger einfache Constructionen gesetzt werden müssen.

An die Definition 16, die bei ihrer grossen Einfachheit wohl nicht noch durch eine Figur erläutert zu werden braucht, schliesst sich die folgende Definition Nr. 17, die sich zu der Nr. 16 gerade so verhält, wie Nr. 8 zu Nr. 7 (S. 54, 55).

17. *Ein Impulsor eines gegebenen Trägers wird mit einer Zahl* c *geometrisch multiplicirt, indem man seine Länge und seine Oeffnung mit dieser Zahl dividirt.*

Wir bezeichnen, wenn $\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ der gegebene Impulsor ist, das Resultat dieser Operation durch das gewöhnliche Zeichen der Multiplication:

$$c \cdot \mathfrak{I}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$$

Die Figur dieses Impulsors ist demnach, wenn c nicht verschwindet, und wenn der Impulsor kein Torsor oder Ejector ist, identisch mit der Figur des Motors

$$\frac{1}{c} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}.$$

Das Hauptergebniss unserer Betrachtungen können wir nun durch einen dem Satze VIII. (S. 56) völlig analogen Satz ausdrücken:

XVI. *Summen von Quirlen werden geometrisch addirt, indem man die ihnen associirten Impulsoren geometrisch addirt, und umgekehrt. Dieselbe Beziehung besteht ferner zwischen den beiden als „geometrische Multiplication" von Quirlsummen und Impulsoren mit Zahlen bezeichneten Operationen.*

Eine besonders einfache Construction ergiebt sich aus 16., wenn die gegebenen Impulsoren beide Torsoren sind, wenn also die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Gerade $\mathfrak{O}$ rechtwinklig kreuzen. Man lege dann durch $\mathfrak{O}$ Ebenen parallel zu $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, und bringe diese Ebenen mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ zum Schnitt: Die Verbindungslinie der Schnittpunkte ist die gesuchte Gerade $\mathfrak{Z}$. Sind die Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ parallel, so wird diese Construction illusorisch; es vereinfacht sich dann aber die Construction 16. ebenfalls, da auch die gesuchte Gerade $\mathfrak{Z}$ zu $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ parallel sein muss.

Die geometrische Addition der Ejectoren kann natürlich auch unmittelbar auf die geometrische Addition der zugehörigen Vectoren oder sphärischen Quirle zurückgeführt werden.

Wie umgekehrt die geometrische Addition der Quirle aus der der Impulsoren hergeleitet werden kann, falls diese letzte auf irgend einem anderen Wege begründet sein sollte, ist leicht zu sehen.

§ 11.

Die stereometrische Addition der Motoren.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung einer dritten Art von geometrischer Addition von Linienpaaren im Raume, die der geometrischen Addition der Motoren und Impulsoren angereiht werden kann, jedenfalls nicht viel weniger einfach ist, als diese beiden, und wohl auch nicht geringeres Interesse hat. Die Figur, deren wir uns jetzt zu bedienen haben werden, ist wiederum der Motor: Wir werden

also, um Verwechselungen vorzubeugen, den Ausdruck „geometrische“ Addition, mit Bezug auf die einzuführenden neuen Constructionen, vermeiden, und an seiner statt einen anderen verwenden.

Die gemeinte „stereometrische Addition“ der Motoren bietet der elementargeometrischen Behandlung grössere Schwierigkeiten, als die bis hierher betrachteten Gegenstände; wir werden daher, bei der Beschränkung in den Hülfsmitteln, die wir uns auferlegt haben, hier darauf verzichten müssen, zu zeigen, wie man zu der sogleich zu erklärenden Construction kommt: Wir müssen uns vorläufig damit genügen lassen, die Richtigkeit der aufzustellenden Sätze a posteriori zu erweisen. Doch wird es uns möglich sein, wenigstens die weiterhin folgenden Constructionen aus der ersten (Nr. 18) zu entwickeln*).

Um Verwechselungen leichter vorzubeugen, wollen wir uns in der folgenden Untersuchung auch für den Motor eines anderen Zeichens als bisher, nämlich des Zeichens $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ an Stelle von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ bedienen.

Wir führen, um nachher unsere Darlegung nicht unterbrechen zu müssen, sogleich einen neuen Begriff ein, den wir weiterhin zu benutzen haben werden:

Wir nennen *Sperrung* eines Motors $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ das Product aus der Länge des Motors und dem um die Einheit vermehrten Quadrat seiner Oeffnung, also den Quotienten

$$\frac{\text{dist.}\,(\mathfrak{x},\,\mathfrak{y})}{\cos^2 \text{ang}\,(\mathfrak{x},\,\mathfrak{y})}.$$

Die Begriffe „Länge“ und „Sperrung“ eines Motors sind hiernach dann und nur dann von einander verschieden, wenn der Motor weder ein Rotor noch ein Translator ist.

Wir bezeichnen ferner, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *zwei nicht parallele Gerade sind, durch das Symbol*

$$\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$$

die Gerade, die $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *zugleich rechtwinklig schneidet;* also, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ selbst einander nicht schneiden, die kürzeste Verbindungslinie zwischen Punkten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Mit Hülfe dieses Symbols lässt sich nun unsere Construction sehr einfach beschreiben.

Es seien zwei Motoren in der Form $\mathfrak{N}_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{y}}$ *dargestellt, so also, dass die Anfangslinie beider dieselbe Gerade* $\mathfrak{d}$ *ist. Wir leiten dann durch gewisse Constructionen aus den Geraden* $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ *eine vierte*

*) Die stereometrische Addition der Motoren ist, damals noch unter dem Namen einer „geometrischen“ Addition, vom Verfasser in der auf S. 30 citirten Abhandlung angegeben worden. Dieser sind die folgenden Darlegungen grösstentheils entlehnt.

Gerade $\mathfrak{Z}$ *her, und wir nennen den Motor* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}$ *die stereometrische Summe der gegebenen Motoren, in Zeichen:*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}} \dot{+} \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}.$$

Wir bedienen uns also, um die zu erklärende stereometrische Addition der Motoren von der geometrischen zu unterscheiden, für die erste nicht des gewöhnlichen Zeichens der Addition, sondern des Zeichens $\dot{+}$, und ebenso gebrauchen wir natürlich für die inverse Operation, die stereometrische Subtraction (deren Erklärung in der weiterhin aufzuführenden Definition Nr. 24 enthalten ist), das Zeichen $\dot{-}$.

18. *Wenn die gegebenen Motoren* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ *weder Translatoren sind noch zu parallelen Trägern gehören, so wird die zur Geraden* $\mathfrak{Z}$ *führende Construction durch das Schema angegeben:*

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{O}\widehat{\mathfrak{X}}, \qquad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{O}\widehat{\mathfrak{Y}},$$

$$\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{O}\widehat{\mathfrak{X}}_1, \qquad \mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{O}\widehat{\mathfrak{Y}}_1,$$

$$\mathfrak{X}_3 = \widehat{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}}, \qquad \mathfrak{Y}_3 = \widehat{\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}},$$

$$\mathfrak{Z} = \widehat{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}.$$

Man vergleiche hierzu die Figur 25, die übrigens nur schematisch ist und keine Vorstellung von der Lage vermitteln soll, die die genannten Geraden in einem besonderen Falle im Raume haben können*).

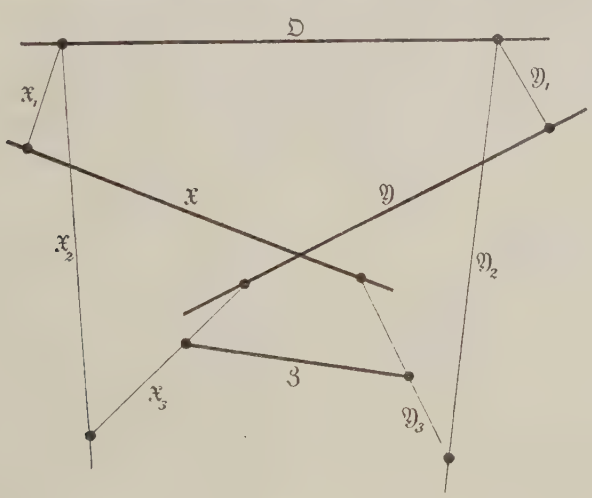


Fig. 25.

*) Von speciellen Fällen abgesehen, lässt sich nämlich, wie es scheint, eine solche Vorstellung durch eine Figur doch nur in sehr unvollkommener Weise

Dass die bezeichnete Construction unter den angegebenen Voraussetzungen wirklich zu einer völlig bestimmten und zur Definition eines Motors brauchbaren Geraden $\mathfrak{Z}$ führt, das erkennt man, wenn man durch einen beliebigen Punkt o zu den construirten Geraden Parallele zieht: Dann ergiebt sich, als besonderer Fall unserer Construction Nr. 18, eine Construction, die von der des Keiltrapezes sich eigentlich nur durch die Ausdrucksweise unterscheidet, indem nämlich die in § 4 benutzten Ebenen durch die zu ihnen senkrechten Strahlen des Punktes o ersetzt sind. Es folgt also, dass keine zwei der durch das Zeichen $\curlywedge$ verbundenen Geraden zu einander parallel sein können, und dass die Gerade $\mathfrak{Z}$ die Gerade $\mathfrak{D}$ nicht rechtwinklig schneidet oder kreuzt.

In den ausgeschlossenen Grenzfällen werden die benutzten Linien zum Theil oder auch alle unbestimmt; man muss daher dann die Gerade $\mathfrak{Z}$ durch besondere Constructionen definiren. Diese führen wir nunmehr auf.

19. *Wenn* $\mathfrak{R}^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{D}}$ *und* $\mathfrak{R}^{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{D}}$ *Rotoren mit parallelen aber von einander verschiedenen Trägern sind, so erfolgt die Construction der Geraden* $\mathfrak{Z}$ *ebenfalls noch nach dem unter* 18. *angegebenen Schema, sofern man die weitere Bestimmung hinzufügt, dass diese Gerade* $\mathfrak{Z}$ *die Gerade* $\mathfrak{D}$ *schneiden soll.*

Mit anderen Worten: Wir treffen die naheliegende Festsetzung, dass im genannten Fall die „stereometrische“ Addition der Motoren in die „geometrische“ übergehen soll.

Natürlich braucht man, wie ein Blick auf die Fig. 26 zeigt, in diesem Falle die Geraden $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$ nicht wirklich zu construiren, da die ganze zu einem neuen Rotor oder zu einem Translator $\mathfrak{R}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$ führende Construction in einer Ebene verläuft.

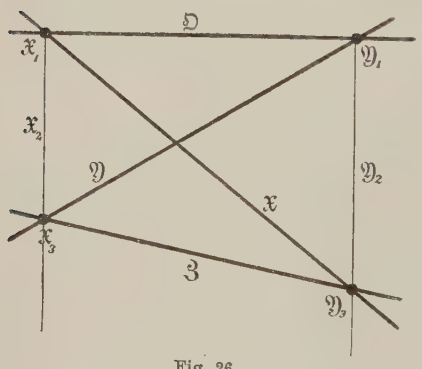


Fig. 26.

Nehmen wir nunmehr an, dass einer der gegebenen Motoren, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{D}}$, ein Translator sei, nicht aber auch der andere, so wird die mit $\mathfrak{y}_1$ bezeichnete Gerade unbestimmt, darum aber noch nicht nothwendig auch die Gerade $\mathfrak{Z}$. Denn aus $\mathfrak{y} \curlywedge \mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{x}_3 \perp \mathfrak{D}$, $\mathfrak{x}_3 \parallel \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{Z} \curlywedge \mathfrak{x}$.

hervorrufen. Man kann sich indessen leicht aus Stricknadeln und Korken ein Modell fertigen, ähnlich einem von F. Morley hergestellten Modell einer verwandten, weiterhin noch zu besprechenden Figur.

Verschiebt man nun $\mathfrak{Y}_1$ parallel zu sich selbst längs $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{Y}$, so verschiebt sich $\mathfrak{Y}_2$ längs $\mathfrak{D}$, und $\mathfrak{Y}_3$ längs $\mathfrak{X}$; die zu $\mathfrak{X}$ parallele Gerade $\mathfrak{Z}$ ändert aber hierbei ihre Lage nicht. (Vgl. Fig. 27.) Unbestimmt kann das Ergebniss der Construction nur dann werden, wenn $\mathfrak{Y}_3 \parallel \mathfrak{X}_3$ sein sollte, da die andere Annahme $\mathfrak{Y}_2 \parallel \mathfrak{X}$ durch die Folgerung $\mathfrak{X} \perp \mathfrak{D}$

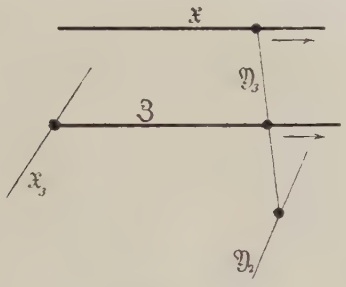


Fig. 27.

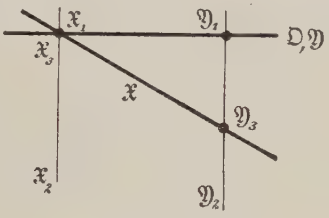


Fig. 28.

ausgeschlossen wird. Ist aber $\mathfrak{Y}_3 \parallel \mathfrak{X}_3$, so folgt $\mathfrak{Y}_3 \parallel \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_2 \parallel \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1 \parallel \mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_3$ (s. Fig. 28). Die Construction wird dann wirklich unbrauchbar. So kommen wir noch für einen weiteren ziemlich allgemeinen Fall zu einer Bestimmungsweise der Geraden $\mathfrak{Z}$ durch die folgende Definition:

20a. Wenn der Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}$ ein Translator ist, der Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ aber nicht, und wenn die Träger beider Motoren nicht parallel sind, so wird die Gerade $\mathfrak{Z}$ ebenfalls noch durch die Construction Nr. 18 gefunden, sofern man an Stelle von $\mathfrak{Y}_1$ irgend eine der gemeinsamen Senkrechten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{Y}$ setzt, oder auch sogleich an Stelle von $\mathfrak{Y}_2$ irgend eine Gerade, die auf der Ebene von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{Y}$ senkrecht steht."

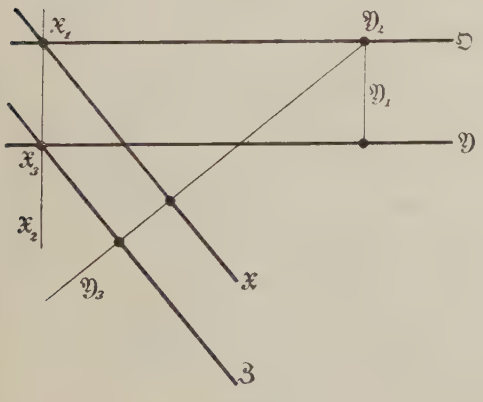


Fig. 29.

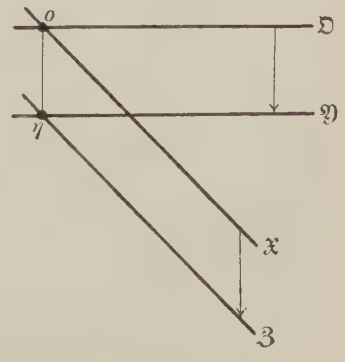


Fig. 30.

Einfacher gestaltet sich die Construction in dem durch die Annahme $\mathfrak{Y}_1 \perp \mathfrak{X}_1$ bezeichneten Specialfall. Dann folgt nämlich $\mathfrak{Y}_1 \parallel \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2 \parallel \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2 \perp \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_2 \perp \mathfrak{X}$ (s. Fig. 29), und es ergiebt sich, als *Folgerung* aus der Definition 20a:

20. *Wenn der Motor* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ *ein Translator ist, dessen Vector* $\mathfrak{V}_o^{\eta}$ *auf der Hauptaxe* $\widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{X}}$ *des Motors* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$ *senkrecht steht, so wird die Gerade* $\mathfrak{Z}$ *dadurch gefunden, dass man die Gerade* $\mathfrak{X}$ *um den Vector* $\mathfrak{V}_o^{\eta}$ *verschiebt.* (S. Fig. 30.)

Die Construction Nr. 18 bleibt ferner, trotz der ihr innewohnenden hohen Unbestimmtheit, auch dann noch brauchbar, wenn die gegebenen Motoren beide Translatoren sind, falls nur die zugehörigen Vectoren nicht parallel sind. (S. Fig. 31.) Es ergiebt sich dann, wenn wir den hiermit ausgeschlossenen Fall nachträglich in die aufzustellende Definition wieder mit einbeziehen, die Regel:

21. *Zwei Translatoren werden stereometrisch addirt, indem man die zugehörigen Vectoren geometrisch addirt.*

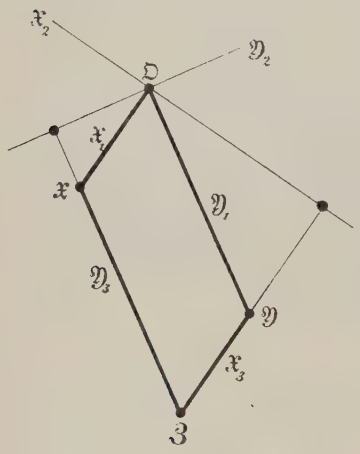


Fig. 31.

Die stereometrische Addition der Translatoren ist also von der geometrischen Addition dieser Translatoren (§ 7, S. 54) ebenfalls nicht verschieden.

Wir behandeln nun weiter den unter Nr. 20a ausgeschlossenen Grenzfall. Da jetzt die an Stelle der Construction Nr. 18 zu setzende Definition von $\mathfrak{Z}$ nicht mehr so nahe liegt, wie in den bisher behandelten Fällen, so haben wir eine umständlichere Auseinandersetzung nöthig.

Wir nehmen zuerst noch an, dass der zu $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ gehörige Vector $\mathfrak{V}_o^{\eta}$ *nicht* parallel ist zu $\mathfrak{X}_1$. Dann liegen nach Obigem die Geraden $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ in einer Ebene ω, und es ist $\mathfrak{X}_1 \parallel \mathfrak{X}_3$. Ferner ist $\mathfrak{Z} \parallel \mathfrak{X}$, und die orthogonalen Projectionen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Z}$ auf die Ebene ω sind zu der Geraden $\mathfrak{X}_2$ parallel. (S. Fig. 32.) Wir bezeichnen nun mit ξ, η, η' die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{X}_3$ mit $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}$ und mit ξ' den Schnittpunkt von $\mathfrak{X}_3$ mit der Projection von $\mathfrak{X}$ auf ω. o und o' seien die Schnittpunkte von $\mathfrak{X}_1$ mit $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{X}$. Dann ist

$$\mathfrak{V}_o^{\eta} = \mathfrak{V}_o^{\xi} + \mathfrak{V}_{\xi}^{\eta}, \quad \mathfrak{V}_{o'}^{\eta'} = \mathfrak{V}_{o'}^{\xi'} + \mathfrak{V}_{\xi'}^{\eta'}, \quad \mathfrak{V}_o^{\xi} = \mathfrak{V}_{o'}^{\xi'}.$$

Es kann also $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{X}$ dadurch abgeleitet werden, dass man $\mathfrak{X}$ erst um den Vector $\mathfrak{V}_o^{\xi}$, hierauf um den Vector $\mathfrak{V}_{\xi}^{\eta'}$ verschiebt. Wir behaupten nun, dass diese zweite Schiebung von der ersten unabhängig ist, sodass man im Grenzfall $\mathfrak{V}_o^{\xi} = 0$ eine bestimmte Grenzlage der Geraden $\mathfrak{Z}$ erhält.

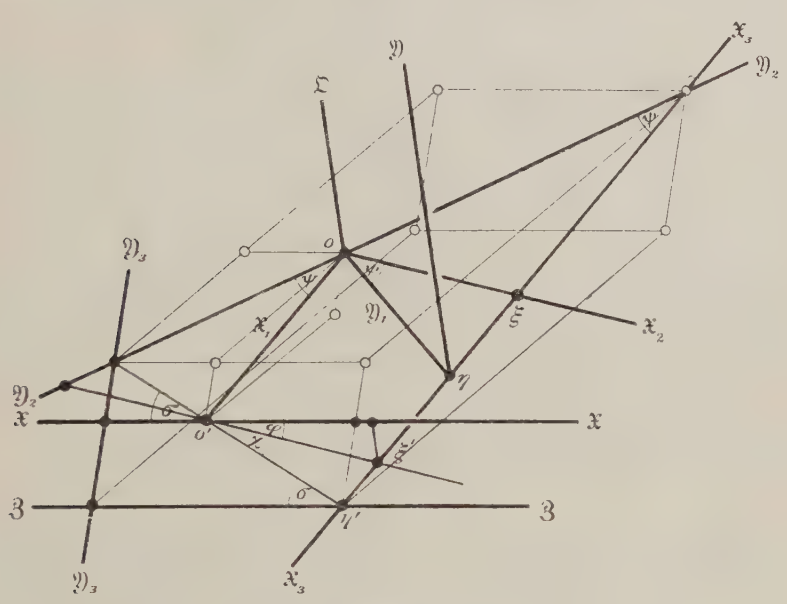


Fig. 32.

In der That, bezeichnen wir mit ψ den Winkel der Geraden $\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{X}_3$, oder den ihm gleichen Winkel der Geraden $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{X}_2$; ferner mit φ den Winkel, den die Gerade $\mathfrak{X}$ mit der Ebene ω bildet, mit χ den Winkel der Geraden $o'\xi'$ und $o'\eta'$, endlich mit σ den Winkel der Geraden $\mathfrak{X}$ und $o'\eta'$ (s. Fig. 32): Dann haben wir zunächst

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cdot \cos\chi,$$

da σ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mit den Katheten φ und χ ist. Man kann aber auch die Abhängigkeit zwischen den Winkeln χ, ψ und σ bestimmen (s. Fig. 33); eine leichte Ueberlegung ergiebt:

$$\sin\chi \cdot \cos\chi = \operatorname{tg}\psi \,.\, (\cos^2\chi - \cos^2\sigma).$$

Durch Elimination von $\cos\sigma$ aus diesen beiden Gleichungen findet sich

$$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\psi \cdot \sin^2\varphi,$$

und hieraus, wenn wir noch $\sin\varphi = \cos\vartheta$ setzen,

$$\mathfrak{V}_{\xi}^{\eta'} = \mathfrak{V}_{\xi}^{\eta} \cdot \cos^2\vartheta.$$

Es bedeutet aber ϑ den Neigungswinkel der Geraden $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{X}$. Gehen wir also zur Grenze $\mathfrak{V}_0^{\xi} = 0$ über, so ergiebt sich die Definition der

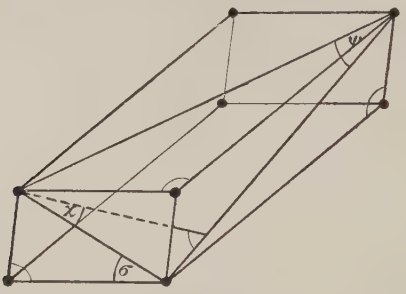


Fig. 33.

Geraden $\mathfrak{Z}$, die wir in dem unter Nr. 20a ausgeschlossenen Fall anzuwenden haben werden:

22. *Wenn der Motor* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}}$ *ein Translator ist, dessen Vector* $\mathfrak{V}_0^{\eta}$ *parallel ist zur Hauptaxe* $\widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{X}}$ *des Motors* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}}$, *so geht die Gerade* $\mathfrak{Z}$ *aus der Geraden* $\mathfrak{X}$ *hervor durch Verschiebung von* $\mathfrak{X}$ *um den Vector*

$$\mathfrak{V}_0^{\eta} \cdot \cos^2 \operatorname{ang}(\mathfrak{D}, \mathfrak{X}).$$

Nunmehr können wir statt der unter 20a angegebenen Construction die einfacheren Constructionen Nr. 20 und 22 verbunden anwenden: Wir haben ja bewiesen, dass die Aufeinanderfolge dieser Constructionen zu demselben Ergebniss führt, wie die Construction 20a. Wir werden also diese letzte von uns als Durchgangspunkt benutzte Construction jetzt ganz bei Seite lassen können, indem wir die bisherige Folgerung Nr. 20 nunmehr als eine neue *Definition* einführen.

Es liegt nahe, wie die noch ausstehenden Bestimmungen zu fassen sein werden:

23. *Die stereometrische Summe zweier Motoren desselben Trägers wird gebildet, indem man deren Oeffnungen und Sperrungen addirt.*

Natürlich ist als Träger der stereometrischen Summe der Träger der gegebenen Motoren anzunehmen. Ebenso ist zu verstehen die Definition:

24. *Ein Motor wird mit einer Zahl c stereometrisch multiplicirt, indem man seine Oeffnung und Sperrung mit c multiplicirt.*

Diese Bestimmung steht im Einklang mit der in § 7 gegebenen Erklärung des „Motors Null“.

Damit die unter 24. erklärte stereometrische Multiplication eines

Motors mit einer Zahl c nicht mit der geometrischen Multiplication verwechselt werden kann, wird man für die erste nicht das (heute) allein übliche Multiplicationszeichen $\cdot$, sondern ein anderes, etwa das (sonst obsolete) Zeichen $\asymp$ verwenden: Wir werden also das stereometrische c-fache eines Motors $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ durch das Zeichen

$$c \asymp \mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$$

darstellen. —

Auf Grund dieser Definitionen können wir nun in allen Fällen die „stereometrische Summe“ *zweier* Motoren bilden, und zwar unmittelbar, d. h. ohne die Motoren vorher zerlegen zu müssen, ausgenommen in dem Falle, wo diese Motoren parallele Träger haben. In diesem Falle muss man, wie es scheint, eine Zerlegung anwenden, aber, was wohl zu beachten ist, eine *invariante*, nämlich von aller Willkür freie Zerlegung: Jeder beliebige Motor kann, nach dem Vorhergehenden, auf eine einzige Weise als stereometrische Summe

$$\mathfrak{N}' \dot{+} \mathfrak{N}''$$

eines Rotors $\mathfrak{N}'$ und eines Translators $\mathfrak{N}''$ derart dargestellt werden, dass diese beiden speciellen Motoren den nämlichen Träger haben (im weiteren Sinne des Wortes).

Dass unsere „stereometrische Addition der Motoren“ wirklich den Namen einer Addition verdient, dass sie nämlich (ausser dem commutativen) das associative Gesetz erfüllt, und dass sie daher mit der unter 24. erklärten Multiplication durch das distributive Gesetz

$$c \asymp (\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}} \dot{+} \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}}) = c \asymp \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}} \dot{+} c \asymp \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}}$$

verbunden ist, das werden wir nunmehr nachzuweisen haben.

§ 12.

Fortsetzung: Die stereometrische Addition der Motoren.

Die zu Schluss des § 11 aufgestellte Behauptung begründen wir in der Art, dass wir sogleich einen weitergehenden Satz beweisen: Wir ordnen den geometrischen Summen von Keilen wiederum Motoren zu, und zeigen, dass dann die als „geometrische“ und „stereometrische“ Addition bezeichneten Operationen einander entsprechen. Wie die Zuordnung selbst beschaffen sein wird, falls wirklich ein Satz der behaupteten Art besteht, liegt nach der Untersuchung des § 11 auf der Hand: Sie wird sich von der im Satze VII. (§ 7, S. 53) ausgeführten Zuordnung lediglich darin unterscheiden, dass an Stelle der Länge des betrachteten Motors nunmehr dessen Sperrung tritt.

XVII. *Jeder geometrischen Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen kann man einen völlig bestimmten Motor desselben Trägers zuordnen, den „der Summe affiliirten" Motor und umgekehrt.*

Ist die Summe von Keilen und zugleich die zugehörige Summe von Stäben auf die Normalform gebracht,

$$\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'', \quad \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'',$$

so ist die Oeffnung des affiliirten Motors gleich der Oeffnung des eigentlichen Keiles $\mathfrak{K}'$ und gleich der Länge des Stabes $\mathfrak{S}'$. Ferner ist die Sperrung dieses Motors gleich der Sperrung des uneigentlichen Keiles $\mathfrak{K}''$ und gleich dem Moment des Stäbepaares $\mathfrak{S}''$.

Der zu beweisende Satz lautet nunmehr vollkommen analog dem Satze VIII. (S. 56):

XVIII. *Summen von Stäben, Keilen oder Quirlen werden geometrisch addirt, indem man die ihnen affiliirten Motoren stereometrisch addirt; sie werden mit Zahlen geometrisch multiplicirt, indem man die ihnen affiliirten Motoren mit denselben Zahlen stereometrisch multiplicirt, und umgekehrt.*

Wir haben in den Sätzen VII und XVII, VIII und XVIII die unterscheidenden Worte durch den Druck hervorgehoben.

Einige besondere Fälle des Satzes XVIII sind nun durch die Betrachtungen des § 11 schon erledigt. Stellen wir nämlich einen jeden von zwei stereometrisch zu addirenden Motoren als stereometrische Summe eines Rotors und eines Translators mit demselben Träger dar, schreiben wir also etwa die stereometrische Summe in der Form

$$(\mathfrak{R}_1' \dot{+} \mathfrak{R}_1'') \dot{+} (\mathfrak{R}_2' \dot{+} \mathfrak{R}_2''),$$

so ist klar, dass die stereometrische Addition zweier Motoren in folgenden Fällen auf die geometrische Addition von Keilen hinauskommt: Erstens wenn beide Motoren Rotoren sind ($\mathfrak{R}_1'' = \mathfrak{R}_2'' = 0$), deren Hauptaxen denselben eigentlichen Punkt o enthalten; zweitens wenn die Träger der beiden gegebenen Motoren parallel sind; drittens, wenn wenigstens einer dieser Motoren ein Translator ist. Nachzuweisen bleibt der Satz also nur noch für den allgemeinen Fall, in dem beide Motoren Hauptaxen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{Y}_1$ haben, die sich unter einem von Null verschiedenen Winkel kreuzen oder schneiden.

Es lässt sich nun einsehen, dass der Satz XVIII auch in diesem allgemeinen Falle richtig sein muss, und zwar deshalb, weil er in dem ersten und dritten der genannten Specialfälle richtig ist.

Es möge $\mathfrak{T}$ irgend einen Translator bedeuten, dessen Nebenaxe die Gerade $\mathfrak{O}$ trifft, oder, was dasselbe ist, dessen Vector auf der Geraden $\mathfrak{O}$ senkrecht steht. Dann können wir durch geeignete Wahl von $\mathfrak{T}$ einen neuen Motor (nämlich einen Rotor) herstellen,

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}'} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}} \dot{+} \mathfrak{T},$$

dessen Endlinie $\mathfrak{X}'$ die Gerade $\mathfrak{O}$ in einem beliebig anzunehmenden Punkte o schneidet; denn bei stereometrischer Addition von $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$ verschiebt sich $\mathfrak{X}$ um irgend welche Vectoren in den Richtungen von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ oder $\mathfrak{O}$ (Nr. 20 und 22). Aus den beiden Motoren $\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}'}$ und $\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ können wir dann einen neuen Motor

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}'} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}'} \dot{+} \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$$

durch unsere Construction Nr. 18 ableiten.

Andrerseits können wir $\mathfrak{T}$ auch unmittelbar zu dem Motor $\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}$ stereometrisch addiren, und so eine Gerade $\mathfrak{Z}''$ definiren vermöge der stereometrischen Gleichung

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}''} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}} \dot{+} \mathfrak{T}.$$

Gelingt es nun, zu zeigen, dass diese beiden Geraden $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ zusammenfallen, oder dass überhaupt

$$\mathfrak{T} \dot{+} \left(\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}} \dot{+} \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}\right) = \left(\mathfrak{T} \dot{+} \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}\right) \dot{+} \mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$$

ist, wenn der zu $\mathfrak{T}$ gehörige Vector auf der Geraden $\mathfrak{O}$ senkrecht steht, so ist damit schon der Satz XVIII bewiesen. Denn wir können durch Wiederholung desselben Verfahrens erreichen, dass auch an Stelle des zweiten Motors $\mathfrak{R}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ ein Motor tritt, dessen Endlinie durch den auf $\mathfrak{O}$ angenommenen Punkt o geht. Die hierbei benutzte stereometrische Addition eines Translators zu einem beliebigen Motor kann aber, wie wir gesehen haben, nach der unter XVIII angegebenen Regel auf die geometrische Addition von Keilen zurückgeführt werden; und für den Fall von Rotoren, deren Träger durch o gehen, ist der Satz XVIII, wie wir bemerkt haben, richtig.

Den Nachweis nun, dass die mit $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ bezeichneten Geraden wirklich zusammenfallen, stützen wir auf den folgenden

Hülfssatz. „Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgend zwei nicht parallele Gerade, und es sei $\mathfrak{C} = \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ deren gemeinsame Normale. Es seien ferner a, b, c irgend drei Vectoren, die zu diesen Geraden parallel sind, und es bedeute allgemein, wenn x, y, z Vectoren sind, (xyz) das sechsfache Volumen des Tetraeders, das entsteht, wenn man

diesen Vectoren einen gemeinsamen Anfangspunkt giebt*), unter gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens.

Wird dann die Gerade $\mathfrak{A}$ um den Vector v parallel zu sich selbst verschoben, so verschiebt sich die Gerade $\mathfrak{C}$ um den Vector

$$\frac{(acv)}{(acb)}\, b\text{.“} —$$

In der That, man kann das (abc)-fache des Vectors v bekanntlich wie folgt zerlegen:

$$(abc)v = (bcv)a + (cav)b + (abv)c.$$

Damit ist dann auch die Schiebung längs v in drei Schiebungen zerlegt, die parallel zu den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ erfolgen; von diesen Schiebungen aber ändern die längs $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ die Lage von $\mathfrak{C}$ nicht, während die Schiebung entlang $\mathfrak{B}$ offenbar eine ihr gleiche Verschiebung der Geraden $\mathfrak{C}$ bewirkt.

Wir bezeichnen nun gewisse Vectoren, die zu den in der Construction Nr. 18 (in der Fig. 25, S. 87) auftretenden Geraden parallel sind, durch die entsprechenden Buchstaben des kleinen deutschen Alphabets, mit Ausnahme eines zu der Geraden $\mathfrak{D}$ gehörigen Vectors, der mit $\mathfrak{x}_0$ bezeichnet werden mag. Die zu $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ parallelen Vectoren $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ sollen jeder die Länge Eins haben, und es sollen die Richtungen dieser Vectoren so gewählt werden, dass $(\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) = +1$ wird; die übrigen noch in gewissem Grade willkürlichen Vectoren werden wir dann sogleich näher bestimmen, derart, dass die zu entwickelnden Formeln möglichst einfach ausfallen. Endlich sei

$$\varphi = \operatorname{ang}(\mathfrak{D}, \mathfrak{X}), \quad \psi = \operatorname{ang}(\mathfrak{D}, \mathfrak{Z}).$$

Nunmehr können wir, wie leichte Ueberlegungen zeigen, den gemachten Annahmen durch die folgenden Ansätze Rechnung tragen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_0 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \mathfrak{x}_2, \\
\mathfrak{y} &= \alpha \cdot \mathfrak{x}_0 + \beta \cdot \mathfrak{x}_1 + \gamma \cdot \mathfrak{x}_2, \quad (\alpha, \beta \neq 0) \\
\mathfrak{y}_1 &= -\gamma \cdot \mathfrak{x}_1 + \beta \cdot \mathfrak{x}_2, \\
\mathfrak{y}_2 &= \beta \cdot \mathfrak{x}_1 + \gamma \cdot \mathfrak{x}_2, \\
\mathfrak{x}_3 &= -\beta \cdot \mathfrak{x}_0 + \alpha \cdot \mathfrak{x}_1, \\
\mathfrak{y}_3 &= -\beta \operatorname{tg}\varphi \cdot \mathfrak{x}_0 + \gamma \cdot \mathfrak{x}_1 - \beta \cdot \mathfrak{x}_2, \\
\mathfrak{z} &= \alpha \cdot \mathfrak{x}_0 + \beta \cdot \mathfrak{x}_1 + (\gamma - \alpha \operatorname{tg}\varphi) \cdot \mathfrak{x}_2.
\end{aligned}$$

*) Also die von H. Grassmann als „äusseres Product“ der Vectoren oder Strecken x, y, z bezeichnete Grösse.

Wenn ferner noch die Bezeichnungen $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{D}\widehat{\mathfrak{Z}}$ und $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{D}\widehat{\mathfrak{Z}}_1$ eingeführt werden, so können wir entsprechend setzen:

$$\mathfrak{z}_1 = (\gamma - \alpha \operatorname{tg} \varphi) \cdot \mathfrak{x}_1 - \beta \cdot \mathfrak{x}_2,$$
$$\mathfrak{z}_2 = \beta \cdot \mathfrak{x}_1 + (\gamma - \alpha \operatorname{tg} \varphi) \cdot \mathfrak{x}_2.$$

Nennen wir endlich $\triangle$ die Determinante der beiden letzten Gleichungen,

$$\triangle = \beta^2 + (\gamma - \alpha \operatorname{tg} \varphi)^2,$$

so ergeben sich weiter die Gleichungen

$$\triangle \cdot \mathfrak{x}_1 = (\gamma - \alpha \operatorname{tg} \varphi) \cdot \mathfrak{z}_1 + \beta \cdot \mathfrak{z}_2,$$
$$\triangle \cdot \mathfrak{x}_2 = -\beta \cdot \mathfrak{z}_1 + (\gamma - \alpha \operatorname{tg} \varphi) \cdot \mathfrak{z}_2,$$

und

$$\cos^2 \psi = \frac{\alpha^2}{\triangle + \alpha^2},$$

die wir sogleich zu benutzen haben werden.

Wir führen jetzt unseren Beweis in zwei Schritten: Wir addiren zuerst stereometrisch zu den Vectoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$ einen Translator $\mathfrak{T}_1$, dessen Vector zu der Geraden $\mathfrak{X}_1$ parallel ist und mit $\sigma \mathfrak{x}_1$ bezeichnet werden soll, und wir zeigen, dass dann $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}''$ wird; hierauf addiren wir zu beiden genannten Motoren stereometrisch einen Translator $\mathfrak{T}_2$, dessen Vector die Richtung von $\mathfrak{X}_2$ hat und $\tau \mathfrak{x}_2$ heissen möge, und wir zeigen, dass wiederum $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}''$ wird; damit wird dann unser Satz allgemein bewiesen sein, da jeder Translator, dessen Vector zu $\mathfrak{D}$ senkrecht ist, in der Form $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$ dargestellt werden kann.

Bestimmen wir also zunächst die Aenderungen, die im ersten Falle in unserer Figur eintreten. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke durch Accente die Vectoren, um die die einzelnen Geraden der Figur fortrücken, wenn der Translator $\mathfrak{T}_1$ zu dem Motor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$ stereometrisch addirt wird; derart, dass z. B. $\mathfrak{x}'$ den Vector bedeutet, um den $\mathfrak{X}$ fortgeschoben wird. Dann haben wir

$$\mathfrak{x}' = \sigma \cos^2 \varphi \cdot \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_2' = 0, \quad \mathfrak{x}_3' = 0,$$

und, nach obigem Hülfssatze,

$$\mathfrak{y}_3' = \frac{(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_3\, \mathfrak{x}')}{(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_3\, \mathfrak{y}_2)} \cdot \mathfrak{y}_2 = \frac{\sigma \beta \cos^2 \varphi}{\beta^2 + \gamma^2 \cos^2 \varphi} \cdot \mathfrak{y}_2,$$

$$\mathfrak{z}' = \frac{(\mathfrak{y}_3\, \mathfrak{z}\, \mathfrak{y}_3')}{(\mathfrak{y}_3\, \mathfrak{z}\, \mathfrak{x}_3)} \cdot \mathfrak{x}_3 = \frac{\sigma \alpha}{\triangle + \alpha^2} \cdot \mathfrak{x}_3.$$

Andererseits wird der Vector $\mathfrak{z}''$, um den die Gerade $\mathfrak{Z}$ fortrückt, wenn der Translator $\mathfrak{T}_1$ unmittelbar zu $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$ stereometrisch addirt wird, gefunden, indem man den Vector $\sigma \mathfrak{x}_1$ durch $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ darstellt und

dem ersten Glied dieser geometrischen Summe den Factor $\cos^2\varphi$ hinzufügt:

$$\mathfrak{z}'' = \frac{\sigma}{\triangle + \alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2(\gamma - \alpha \operatorname{tg}\varphi)\cdot \mathfrak{z}_1 + \beta(\triangle + \alpha^2)\cdot \mathfrak{z}_2}{\triangle}.$$

Diese beiden Vectoren $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}''$ dürfen sich nun nur um einen Vector von einander unterscheiden, der der Geraden $\mathfrak{Z}$ parallel ist; und in der That, drückt man $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ durch $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ aus, dann aber $\mathfrak{x}_0$ durch $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, so findet sich

$$\mathfrak{z}' \equiv \mathfrak{z}'' \bmod \mathfrak{z}.$$

Aehnlich gestaltet sich die Rechnung im zweiten Falle. Wir bezeichnen wieder durch einfache und doppelte Accente Vectoren, die die Verschiebungen der Geraden unserer Figur darstellen, wenn der Translator $\mathfrak{T}_2$ erst zu $\mathfrak{N}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{D}}$, dann zu $\mathfrak{N}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$ stereometrisch addirt wird, und finden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}' &= \tau\mathfrak{x}_2,\\
\mathfrak{x}_1' &= \mathfrak{x}_2' = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}')}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_0)}\cdot\mathfrak{x}_0 = \tau\operatorname{ctg}\varphi\cdot\mathfrak{x}_0,\\
\mathfrak{x}_3' &= \frac{(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_2')}{(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\mathfrak{y})}\cdot\mathfrak{y} = \frac{\tau\alpha\operatorname{ctg}\varphi}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\mathfrak{y},\\
\mathfrak{y}_3' &= \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_3\mathfrak{x}')}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_3\mathfrak{y}_2)}\cdot\mathfrak{y}_2 = \frac{\tau\gamma\cos^2\varphi}{\beta^2+\gamma^2\cos^2\varphi}\cdot\mathfrak{y}_2,\\
\mathfrak{z}' &= \frac{(\mathfrak{x}_3\mathfrak{z}\mathfrak{x}_3')}{(\mathfrak{x}_3\mathfrak{z}\mathfrak{y}_3)}\cdot\mathfrak{y}_3 + \frac{(\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}\mathfrak{y}_3')}{(\mathfrak{y}_3\mathfrak{z}\mathfrak{x}_3)}\cdot\mathfrak{x}_3\\
&= \frac{\tau\alpha}{\beta(\triangle+\alpha^2)}\cdot\{\gamma\cdot\mathfrak{x}_3 - \alpha\cdot\mathfrak{y}_3\}.
\end{aligned}$$

Andrerseits ergiebt sich:

$$\mathfrak{z}'' = \frac{\tau}{(\triangle+\alpha^2)}\cdot\{\beta(\gamma-\alpha\operatorname{tg}\varphi)\cdot\mathfrak{x}_1 + (\triangle+\alpha^2-\beta^2)\cdot\mathfrak{x}_2\}.$$

Drückt man $\mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{y}_3$ durch $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ aus, und beseitigt man dann wieder $\mathfrak{x}_0$, so findet sich auch im gegenwärtigen Falle

$$\mathfrak{z}' \equiv \mathfrak{z}'' \bmod \mathfrak{z}.$$

Die bei den ausgeführten Rechnungen als Nenner auftretenden Grössen sind unter den Voraussetzungen, die wir nach Erledigung der oben bezeichneten Grenzfälle machen durften, stets von Null verschieden. Der Satz XVIII. ist also jetzt in seinem ganzen Umfang bewiesen.

Wir wollen schliesslich noch einen Specialfall unserer Construction Nr. 18 hervorheben, den wir weiterhin zu verwenden haben werden. Diese Construction vereinfacht sich nämlich nicht unbeträchtlich, wenn wir annehmen, dass die Hauptaxen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{Y}_1$ der beiden stereometrisch

zu addirenden Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}$ einander, und also auch die gemeinsame Anfangslinie $\mathfrak{D}$ rechtwinklig schneiden. Es wird dann $\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{Y}_1$, ausserdem aber folgt

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}_1}^{\mathfrak{Y}_3}, \qquad \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{X}_3}.$$

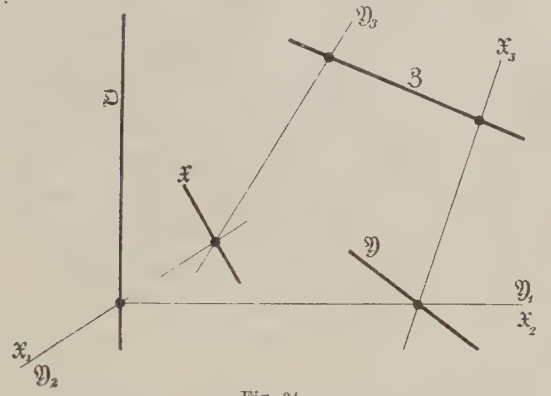


Fig. 34.

(Vgl. Fig. 34.) Wechseln wir also die Bezeichnung, indem wir $\mathfrak{X}_2$ an Stelle von $\mathfrak{X}_3$, und $\mathfrak{Y}_2$ an Stelle von $\mathfrak{Y}_3$ schreiben, so ergiebt sich:

Wenn die Hauptaxen zweier Motoren einander rechtwinklig schneiden, so kann die Hauptaxe eines jeden als Anfangslinie des anderen Motors gewählt werden. Sind die Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{X}_2}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}_1}^{\mathfrak{Y}_2}$ *demgemäss dargestellt, so ist*

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{X}_2} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}_1}^{\mathfrak{Y}_2} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}},$$

sofern

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_1, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}_2 \mathfrak{Y}_2$$

gesetzt wird.

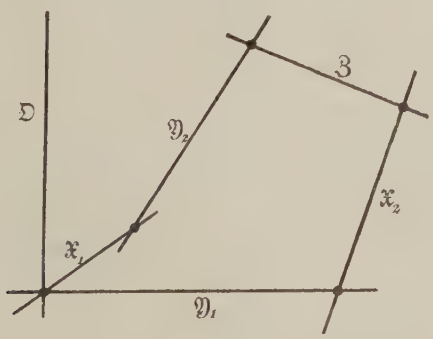


Fig. 35.

Man erkennt unschwer, dass diese durch Figur 35 dargestellte Construction auch dann nicht illusorisch wird, wenn einer der gegebenen Motoren oder beide Translatoren sein sollten.

Univ. of Arizona Library

§ 13.

Die stereometrische Superposition der Bewegungen.

Wir haben gesehen, dass mit jeder der beiden betrachteten Arten von „geometrischer" Addition von Linienpaaren eine Art von „Superposition" von Bewegungen verknüpft ist. Wir waren gerade auf diesem Wege zur geometrischen Addition der Motoren gelangt, indem wir nämlich die Zuordnung untersuchten, die zwischen einem Paar durch S zusammengeordneter Punkte x, x' und der Mitte $\bar{x}$ der Sehne x, x' stattfindet, und ebenso die Zuordnung zwischen zwei zusammengehörigen Ebenen u, u' und ihrer eigentlichen Winkelhalbirenden v (§§ 6, 7). In gleicher Weise hatte sich uns die geometrische Addition der Impulsoren ergeben aus einer Untersuchung der Abhängigkeit zwischen den Endpunkten x, x' einer Sehne und deren Normalebene $\bar{u}$ (§§ 9, 10).

Nun hatten wir aber in § 1 schon ein viertes System einander in ganz ähnlicher Weise zugeordneter Gebilde betrachtet, nämlich ein Paar entsprechender gerader Linien $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ und deren eigentliche Winkelhalbirende $\mathfrak{X}^*$: Jetzt wollen wir zeigen, dass diese letzte Zuordnung zu einem System geometrischer Sätze führt, das weitgehende Analogieen zu den beiden zuvor untersuchten darbietet. Während wir uns jedoch bei der linearen Superposition der Bewegungen nur auf die geometrische Addition der Stäbe und Keile zu stützen brauchten, und bei der correlativen nur auf die geometrische Addition der Quirle, müssen wir bei Begründung der nun zu betrachtenden „stereometrischen" Superposition von Bewegungen die stereometrische Addition der *Motoren* schon voraussetzen: Es ist nicht eine Zufälligkeit unserer Darstellung, sondern es liegt in der Natur der Sache, dass wir nunmehr eine andere Reihenfolge der im Uebrigen ganz analogen Sätze innehalten.

Wir bilden zuerst einen Begriff, der analog ist den Begriffen des begleitenden Stabes und Keiles einer geometrischen Summe von Keilen, sowie dem des begleitenden Quirles einer geometrischen Summe von Quirlen, auf Grund eines Satzes, der sich natürlich auch auf unsere verschiedenen Arten von „geometrischer" Addition erstreckt, hier aber nur mit Bezug auf die stereometrische Addition der Motoren formulirt werden soll:

Jeder Motor kann auf eine einzige Weise als stereometrische Summe zweier Motoren derart dargestellt werden, dass eine gegebene eigentliche Gerade Hauptaxe des einen Summanden und Querlinie des Trägers des anderen Summanden wird.

Dass nicht mehr als eine Darstellung der Art vorhanden sein kann, folgt unmittelbar daraus, dass die Träger zweier Motoren, von denen der eine ein (stereometrisches) Vielfaches des anderen ist, identisch sein müssen und also dieselben Hauptaxen und Querlinien haben. Die verlangte Zerlegung selbst aber wird geliefert durch den letzten Satz des vorigen Paragraphen, und zwar in allen Fällen, ohne jede Ausnahme. Man betrachte (Fig. 35) $\mathfrak{X}_1$ als die gegebene Gerade, und stelle — was immer auf wenigstens eine Weise geschehen kann — den gegebenen Motor in der Form $\mathfrak{N}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}}$ dar, derart, dass seine Anfangslinie $\mathfrak{D}$ die Gerade $\mathfrak{X}_1$ senkrecht trifft. Construirt man dann der Reihe nach die Geraden

$$\mathfrak{Y}_1 = \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1}, \quad \mathfrak{Y}_2 = \widehat{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Z}}, \quad \mathfrak{X}_2 = \widehat{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}},$$

so ist

$$\mathfrak{N}^{\mathfrak{Z}}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{N}^{\mathfrak{Y}_2}_{\mathfrak{Y}_1} \dotplus \mathfrak{N}^{\mathfrak{X}_2}_{\mathfrak{X}_1}.$$

Da $\mathfrak{Z}$ nicht $\perp \mathfrak{D}$, also auch nicht $\mathfrak{Z} \parallel \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Z} \parallel \mathfrak{Y}_1$ sein kann, so sind die construirten Geraden $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$ völlig bestimmt, auch kann nicht $\mathfrak{X}_1 \perp \mathfrak{X}_2$ oder $\mathfrak{Y}_1 \perp \mathfrak{Y}_2$ sein, da sonst $\mathfrak{Z} \perp \mathfrak{D}$ folgen würde.

Wir bezeichnen nun, um den Anschluss an die Betrachtungen des § 1 zu gewinnen, den gegebenen Motor mit

$$\mathfrak{N}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{D}},$$

und die gegebene Gerade mit $\mathfrak{X}^*$. Führen wir dann die verlangte Zerlegung aus, so kann der zweite Summand — also der, dessen Träger die Gerade $\mathfrak{X}^*$ als Querlinie hat, ebenfalls in doppelter Gestalt

$$\mathfrak{N}^{\mathfrak{X}^*}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{N}^{\mathfrak{X}'}_{\mathfrak{X}^*}$$

dargestellt werden.

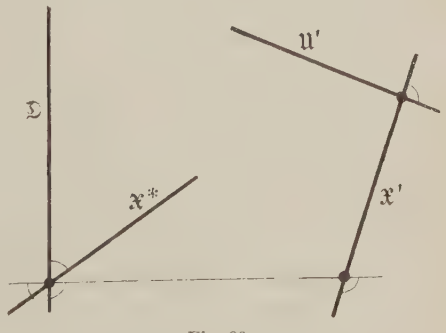


Fig. 36.

Von diesem Motor nun (dessen Construction die Figur 36 zeigt) wollen wir sagen, dass er zur Geraden $\mathfrak{X}^*$ gehört und den Motor $\mathfrak{N}^{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{D}}$ begleitet.

Unmittelbar folgt dann:

Werden irgend welche Motoren stereometrisch addirt, so werden zugleich auch die sie begleitenden und zur selben Geraden $\mathfrak{X}^*$ gehörigen Motoren stereometrisch addirt.

Vergleicht man nun die beschriebene Construction zweier Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ mit der in § 1 betrachteten und durch die hier als

Figur 37 theilweise reproducirte Figur 1 (S. 10) dargestellten Construction, so ergiebt sich:

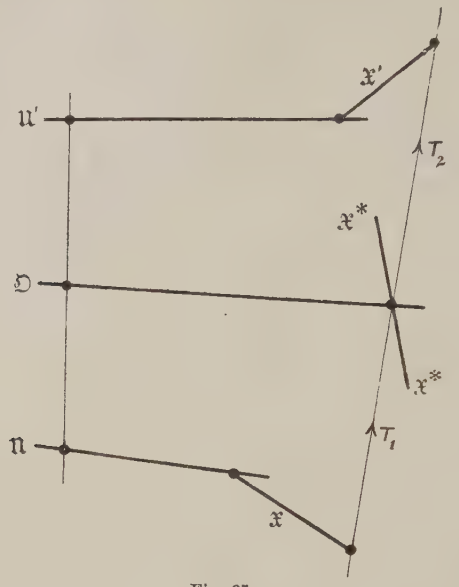


Fig. 37.

Die Zuordnung zwischen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, *die durch die begleitenden Motoren*

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}^*} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{X}^*}^{\mathfrak{X}'}$$

eines gegebenen Motors

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{D}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{U}'}$$

vermittelt wird, ist eine Bewegung, nämlich die Bewegung

$$S = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}\} = \{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}'\}.$$

Jetzt können wir die in § 12 unter XVII. gegebene Definition des einer geometrischen Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen affiliirten Motors auf die Bewegungen S ausdehnen: *Wir werden von der Bewegung* S — die niemals eine Umschraubung sein kann — *ebenfalls sagen, sie sei der geometrischen Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen affiliirt.*

Durch Verbindung der beiden letzten Sätze ergiebt sich nunmehr:

25. *Es sei die eigentliche Gerade* $\mathfrak{D}$ *eigentliche Winkelhalbirende der Linienpaare* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ *und* $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ *in Bezug auf zwei gegebene Bewegungen, die nicht Umschraubungen sind. Werden dann, mit Hülfe der stereometrischen Addition der Motoren, zwei neue Gerade* $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ *construirt auf Grund der Vorschrift*

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}, \quad \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}'} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}'} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}'}$$

so wird der Geraden $\mathfrak{Z}$ die Gerade $\mathfrak{Z}'$ durch eine dritte Bewegung der genannten Art zugeordnet.

Wir sagen, es sei die neue Bewegung aus den beiden ersten durch „stereometrische Superposition" entstanden.

Man vergleiche hiermit die Sätze Nr. 6, S. 49 und 14, S. 78. Wie der die letzte Definition ergänzende Begriff der „stereometrischen Streckung" einer Bewegung zu fassen ist, liegt auf der Hand:

26. *Wenn zwei Bewegungen S, S', die nicht Umschraubungen sind, denselben Träger haben, so sagen wir, die zweite sei aus der ersten durch „stereometrische Streckung im Verhältniss $c : 1$" hervorgegangen, wenn zwischen ihren halben Drehungswinkeln und Schiebungsgrössen die Beziehungen bestehen:*

$$\operatorname{tg}\vartheta' = c \cdot \operatorname{tg}\vartheta, \qquad \frac{\eta'}{\cos^2\vartheta'} = c \cdot \frac{\eta}{\cos^2\vartheta}.$$

Nunmehr kann, mit Bezug auf die geometrischen Summen von Keilen, ein Satz formulirt werden, der vollkommen analog ist dem Satz VI., S. 50: Man hat nur die Worte „associirt" und „linear" durch „affiliirt" und „stereometrisch" zu ersetzen. Es ist aber wohl besser, diesen Satz so zu fassen:

XIX. *Die Ableitung einer Bewegung $\{\mathfrak{X}_3, \mathfrak{Y}_3\}$ aus zwei anderen $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1\}$ und $\{\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2\}$ durch stereometrische Superposition erfolgt durch stereometrische Addition der zugehörigen Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{Y}_1}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_2}^{\mathfrak{Y}_2}$:*

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_1}^{\mathfrak{Y}_1} \dotplus \mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_2}^{\mathfrak{Y}_2} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{X}_3}^{\mathfrak{Y}_3}.$$

Entsprechendes gilt natürlich von der „stereometrischen" Streckung und Multiplication, doch wäre ein hierauf bezüglicher Satz kaum mehr als eine Tautologie. —

Die hier überall hervortretende Analogie unserer Sätze zu denen der §§ 6 und 9 geht noch weiter: Untersuchen wir genauer die Zuordnung, die zwischen den drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}'$ besteht, so zeigt sich, dass diese Zuordnung Eigenschaften hat, die sehr ähnlich sind den Eigenschaften der in § 2 untersuchten Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und T.

Wir setzen (wie in § 2 zuerst geschehen) voraus, dass die zu untersuchende Bewegung S keine Umschraubung ist.

Lassen wir dann eine der drei zusammengehörigen Geraden die Gesammtheit aller geraden Linien durchlaufen, so thun dasselbe die beiden anderen: Für den Fall, dass nur eigentliche Gerade betrachtet

werden, haben wir die anzuwendenden Constructionen schon angegeben (vgl. Fig. 37, S. 102); dass diese Beziehung aber auch auf die uneigentlichen Geraden ausgedehnt werden kann, erkennt man sehr leicht, wenn man, wie wir schon mehrfach gethan haben, die Punkte und Geraden der unendlich fernen Ebene durch die Strahlen und Ebenen eines eigentlichen Punktes ersetzt.

Durch die Zuordnung zwischen zwei zusammengehörigen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ *und ihrer eigentlichen Winkelhalbirenden* $\mathfrak{X}^*$ *werden also zwei Transformationen* T_1, T_2 *des Linienraumes definirt:*

$$\mathfrak{X}\,\{\mathsf{T}_1\}\,\mathfrak{X}^*\,\{\mathsf{T}_2\}\,\mathfrak{X}'.$$

Diese beiden Transformationen sind vertauschbar und erzeugen zusammengesetzt die Bewegung S:

$$\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2 = S = \mathsf{T}_2\mathsf{T}_1.$$

Um die Vertauschbarkeit von T_1 und T_2 einzusehen, braucht man nur die Bewegung S auf die ganze Figur $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}'$ anzuwenden: Die genannten Geraden gehen dann über in $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}^{*\prime}$, $\mathfrak{X}''$, und man hat

$$\mathfrak{X}^*\{S\}\mathfrak{X}^{*\prime}, \qquad \mathfrak{X}^*\{\mathsf{T}_2\}\mathfrak{X}'\{\mathsf{T}_1\}\mathfrak{X}^{*\prime}.$$

Die erklärten Transformationen sind nun, wenn die Bewegung S nicht gerade eine Schiebung ist, nicht etwa Collineationen, und ebensowenig sind sie Correlationen: Geraden, die einander schneiden, werden im Allgemeinen nicht wieder einander schneidende Gerade zugeordnet. Die Transformationen T_1, T_2 haben aber eine andere nicht minder bemerkenswerthe Eigenschaft:

Durchläuft von den drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}'$ *irgend eine das Normalennetz einer geraden Linie (oder ein Parallelenbündel), so thun dasselbe die beiden anderen.*

Wir wollen diesen Satz, bevor wir ihn beweisen, noch etwas bestimmter fassen:

Es seien die Axen der drei zusammengehörigen Normalennetze mit $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_*$, $\mathfrak{Y}'$ *bezeichnet. Die Zuordnung zwischen diesen drei Geraden ist dann wieder bestimmt durch die Transformationen* T_1, T_2, *die jedoch nunmehr in umgekehrter Folge auftreten:*

$$\mathfrak{Y}\,\{\mathsf{T}_2\}\,\mathfrak{Y}_*\,\{\mathsf{T}_1\}\,\mathfrak{Y}'.$$

Offenbar kann dieselbe Behauptung auch so ausgedrückt werden:

Wenn zwischen zweimal drei (eigentlichen) Geraden die Beziehungen stattfinden:

$$\mathfrak{X}\,\{\mathsf{T}_1\}\,\mathfrak{X}^*\,\{\mathsf{T}_2\}\,\mathfrak{X}',$$
$$\mathfrak{Y}\,\{\mathsf{T}_2\}\,\mathfrak{Y}_*\,\{\mathsf{T}_1\}\,\mathfrak{Y}',$$

und wenn von den drei Geradenpaaren $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$; $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{Y}_*$; $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ *eines aus zwei einander rechtwinklig schneidenden Geraden besteht, so gilt dasselbe von den beiden anderen.*)*

Dieser Satz ist leicht zu beweisen. Wir erinnern zunächst daran, dass die Gerade $\mathfrak{X}^*$ Axe einer Umwendung ist, die die Gerade $\mathfrak{X}$ mit der Geraden $\mathfrak{X}'$ derart zur Deckung bringt, dass auch die zusammengehörigen Richtungen dieser beiden Geraden in einander übergehen (§ 1). Zerlegt man also die Bewegung S in diese Umwendung $U = \{\mathfrak{X}^*\}$ und eine andere vorher oder nachher auszuführende Bewegung, so ist die Schraubenaxe der so bestimmten Bewegung im ersten Falle die Gerade $\mathfrak{X}$, im anderen die Gerade $\mathfrak{X}'$. Umgekehrt, stellt man die Bewegung S in der doppelten Form

$$S = S_1 U = U S_2$$

dar, wo S_1, S_2 und U Bewegungen sind, U aber insbesondere eine Umwendung ist, so stehen die (stets bestimmten) Schraubenaxen dieser drei Bewegungen in eben der Beziehung zu einander, wie die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}'$. Es möge nun $\mathfrak{Y}_*$ irgend eine eigentliche Gerade sein, die die Gerade $\mathfrak{X}^*$ unter rechtem Winkel schneidet. Dann bildet diese Gerade $\mathfrak{Y}_*$, da die ganze Figur bei der Umwendung $\{\mathfrak{X}^*\}$ in Ruhe bleibt, mit den Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ gleiche Winkel, und sie hat von ihnen gleichen Abstand: Sie erweist sich als Schraubenaxe einer gewissen Bewegung, die die Gerade $\mathfrak{X}$ mit der Geraden $\mathfrak{X}'$ *im umgekehrten Sinne* zur Deckung bringt. Jetzt zerlegen wir S in diese Bewegung und eine andere vorher oder nachher auszuführende Bewegung: Dann sind die beiden letzten Bewegungen, nach einem in § 1 (S. 10) angeführten Satze, Umwendungen um gewisse Axen $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$, von denen die erste auf $\mathfrak{X}$, die zweite auf $\mathfrak{X}'$ senkrecht steht. Die Zuordnung zwischen $\mathfrak{Y}_*$ und $\mathfrak{Y}'$ ist aber nach dem Gesagten gegeben durch $\mathfrak{Y}_* \{\mathsf{T}_1\} \mathfrak{Y}'$, und ebenso hat man $\mathfrak{Y} \{\mathsf{T}_2\} \mathfrak{Y}_*$.

Die Ausdehnung des ersten Satzes auf den Grenzfall dreier zusammengehöriger Parallelenbündel bietet keine Schwierigkeit.

Um das Wesen der zuletzt angestellten Betrachtung besser hervortreten zu lassen, fügen wir noch eine allgemeinere Bemerkung hinzu. Man kann offenbar überhaupt Transformationen der geraden Linien im Raume untersuchen, die die Eigenschaft haben, aus dem Normalennetz einer Geraden immer wieder ein solches hervorgehen zu lassen. Mit jeder solchen Transformation des Linienraumes ist, ihrem Begriffe nach, eine zweite verbunden, die zu der ersten in einer umkehrbaren

---

*) Ein entsprechender Satz gilt, wenn man nicht ein Schneiden, sondern nur ein Kreuzen der genannten Geraden unter rechtem Winkel voraussetzt.

Beziehung steht, nämlich die Transformation, die die Axen der einander entsprechenden Normalennetze einander zuordnet. Diese zweite Transformation ist im Allgemeinen von der ersten verschieden; beide fallen nur dann zusammen, wenn die gegebene Transformation zugleich eine Transformation der Punkte (und Ebenen) und folglich eine Aehnlichkeitstransformation ist. Offenbar ordnet sich die Beziehung der Transformationen T_1, T_2 dieser allgemeineren Abhängigkeit zweier besonderer Transformationen des Linienraumes, die wir als *Contragredienz* bezeichnen können, unter.

Auf die der projectiven Geometrie einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit nahe verwandte Geometrie der zuletzt betrachteten merkwürdigen Transformationen werden wir im zweiten Abschnitt nochmals zurückkommen, ein näheres Eingehen darauf müssen wir uns aber für eine andere Gelegenheit vorbehalten. Hier mag nur erwähnt werden, dass diese Transformationen eine endliche continuirliche und zwar von 17 Parametern abhängige Gruppe bilden, mit einer neungliedrigen und einer sechzehngliedrigen invarianten Untergruppe, die sich in einer achtgliedrigen Gruppe von vertauschbaren Transformationen durchdringen.

Wir betrachten nochmals die begleitenden Motoren eines gegebenen Motors, um daran einen Satz zu knüpfen, der ebensowohl den Schlusssatz des vorigen Paragraphen, als auch mehrere in § 8 (S. 69) aufgestellte Sätze als besondere Fälle umfasst.

Ist der gegebene Motor kein Translator, so giebt es offenbar nur eine einzige (eigentliche) Gerade, der als begleitender Motor der Motor Null zugehört, nämlich die Hauptaxe des gegebenen Motors; ist dieser Motor dagegen ein Translator, so haben alle Hauptaxen dieses Translators, also alle Geraden eines Parallelenbündels, und keine weiteren die verlangte Eigenschaft. Wir können also schliessen:

Wenn solche zwei von den begleitenden Motoren eines gegebenen Motors gleich Null sind, die zu nicht parallelen (eigentlichen) Geraden gehören, so ist dieser Motor selbst gleich Null.

Wir betrachten nun ein geradliniges Sechseck mit lauter rechten Winkeln, also eben die Figur, zu der wir in § 1 durch die Zusammensetzung der Bewegungen geführt worden waren, und die — wie man leicht erkennt — sich auch einstellt, wenn man die Geraden eines rechtwinkligen Axenkreuzes den eben geschilderten Transformationen T_1, T_2 unterwirft. Wir bezeichnen die Seiten dieses Sechsecks der Reihe nach durch die Zahlen 1 . . . . 6, und bilden die stereometrische Summe

$$\mathfrak{N}_1^4 + \mathfrak{N}_3^6 + \mathfrak{N}_5^2.$$

Wir suchen nun für jeden einzelnen Summanden den begleitenden Motor, der zu irgend einer Seite, z. B. zur Seite 1 gehört. Zunächst ist der begleitende Motor des ersten Summanden gleich $\mathfrak{N}_1^4$ selbst. Der begleitende Motor von $\mathfrak{N}_3^6$ ist entgegengesetzt gleich dem von $\mathfrak{N}_6^3$; um aber diesen zu finden, haben wir im Schnittpunkt von 1 und 6 eine Senkrechte zu errichten, und deren und der Geraden 3 gemeinsame Normale 7 zu bestimmen. Construiren wir ebenso, nach Vertauschung von 3 und 6 mit 5 und 2 eine Gerade 8, so wird der gesuchte begleitende Motor gleich

$$\mathfrak{N}_1^4 + \mathfrak{N}_1^7 + \mathfrak{N}_1^8.$$

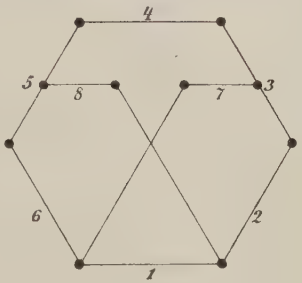


Fig. 38.

(Vgl. die schematische Figur 38.) Hier haben wir nun die Figur unserer Construction Nr. 18 (S. 87) vor uns: Der begleitende Motor hat also den Werth Null. Da dieser Schluss mit Bezug auf jede einzelne Seite des Sechsecks wiederholt werden kann, so folgt:

Sind 1 ... 6 *die auf einander folgenden Seiten eines Sechsecks mit lauter rechten Winkeln, so ist stets*

$$\mathfrak{N}_1^4 + \mathfrak{N}_3^6 + \mathfrak{N}_5^2 = 0.$$

Damit dieser Satz, wenigstens unmittelbar, einen Sinn habe, ist natürlich vorauszusetzen, dass alle in die stereometrische Summe eingehenden Motoren endlich sind, dass also unter den gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks keine solchen vorkommen, die einander rechtwinklig kreuzen.

Eine Folgerung unseres Satzes ist ein von J. Petersen und F. Morley angegebener Satz, der eine Erweiterung des Satzes vom Höhenschnittpunkt eines ebenen oder sphärischen Dreiecks darstellt:

In jedem Sechseck mit lauter rechten Winkeln haben die drei gemeinsamen Normalen der gegenüberliegenden Seiten, sofern sie nicht sämmtlich unbestimmt sind, ihrerseits eine gemeinsame Normale.)*

Unterwirft man die Figur der zehn Geraden zweien der oben betrachteten Transformationen, die (wie z. B. T_1, T_2) im erklärten Sinne contragredient sind, so entsteht i. A. eine Figur von zweimal zehn Geraden, deren gegenseitige Anordnung vollkommen analog ist der Anordnung

*) J. Petersen, Intermédiaire des Mathematiciens, Febr. (?) 1898 (dem Verfasser unzugänglich). F. Morley, Proc. Lond. Math. Soc. v. 29 (1898) p. 670, Am. Bull. v. 5 (1899) p. 252.

der zehn Punkte und Geraden, die die *Figur der perspectiven Dreiecke* bilden: In jeder der beiden Hälften der Figur giebt es zehn Tripel von Geraden, die als gemeinsame Normale eine Gerade aus der anderen Hälfte haben. Eine analoge Figur von zweimal neun Geraden entspricht, beiläufig bemerkt, dem speciellen Pascal'schen Satz, u. s. w.

§ 14.

Zusammenfassung. Vollständigkeit der entwickelten Theorie.

Wir sind im Laufe unserer Betrachtungen genöthigt gewesen, eine längere Reihe von neuen Begriffen einzuführen: Es wird daher dem Leser wohl nicht unwillkommen sein, wenn wir nunmehr, soweit es in beschränktem Raume eben möglich ist, unsere Ergebnisse tabellarisch zusammenstellen. Lassen wir die Vectoren und die sphärischen Figuren bei Seite, so bleiben insgesammt neun Systeme geometrischer Constructionen, die in der folgenden Tafel (S. 109) einander gegenüber gestellt sind. Diese Systeme sind in vier Hauptabtheilungen untergebracht, deren erste allein von der geometrischen Addition der Stäbe gebildet wird. In jeder dieser grösseren Abtheilungen sind die Bezeichnungen festgehalten, derart, dass dieselben Buchstaben immer die gleiche Bedeutung haben; für die Tafel im Ganzen ist dieses Princip aber nicht durchgeführt worden, weil sonst die Zahl der zu verwendenden Zeichen zu gross geworden wäre. Man muss also, wenn man etwa die in der vierten und fünften Horizontalreihe enthaltenen Grössen einander gleich setzen will, die gleich bezeichneten aber in verschiedene Hauptabtheilungen gestellten Grössen vorher durch Zufügung weiterer Indices als von einander verschieden kenntlich machen. η und ϑ bedeuten in den auf Bewegungen bezüglichen Unterabtheilungen der Tafel, wie auch bisher schon, die halbe Schiebungsgrösse und den halben Drehungswinkel einer Bewegung.

Die Art, wie die Tafel benutzt werden kann, mag durch ein Beispiel erläutert werden:

Die Mannigfaltigkeit aller (reellen) Motoren lässt sich ausnahmslos eindeutig-umkehrbar so auf sich selbst abbilden, dass durch diese Abbildung die geometrische Addition der Motoren der stereometrischen zugeordnet wird.

Genauer: *Es mögen*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{x}'}^{\mathfrak{y}'}$$

Motoren desselben Trägers bedeuten, die in einer solchen Beziehung stehen,

Geometrische Summe von Stäben	*Geometrische Summe von Quirlen*	*Impulsor*	*Bewegung oder ausgeartete Umschraubung*	*Geometrische Summe von Keilen*	*Motor*	*Bewegung*	*Motor*	*Bewegung*
$\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$	$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}''$	$\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1} + \mathfrak{I}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$		$\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$	$\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$	$S = S'.\ S''$	$\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$	$S = S'.\ S''$
		der Summe von Quirlen associirt			*der Summe von Keilen associirt*		*der Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen affiliirt*	
Stab $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{\xi}^{\eta}$	Eigentl. Quirl $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}_{\xi_1}^{\psi_1} = \mathfrak{Q}_{\varphi_1}^{\eta_1}$	Torsor $\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1}$	Umschraubung $\{\xi_1, \psi_1\} = \{\varphi_1, \eta_1\} = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1\}$	Eigentl. Keil $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_{\varphi_1}^{\psi_1}$	Rotor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1}$	Drehung $S' = \{\varphi_1, \psi_1\} = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1\}$	Rotor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{y}_1}$	Drehung $S' = \{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1\}$
Stäbepaar $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}_{\xi_1}^{\eta_1} + \mathfrak{S}_{\xi_2}^{\eta_2}$	Uneig. Quirl $\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}_{\xi_2}^{\psi_2} = \mathfrak{Q}_{\varphi_2}^{\eta_2}$	Ejector $\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$	Ausgeartete Umschraubung $\lim\{\xi_2, \psi_2\} = \cdots = \lim\{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2\}$	Uneigentl. Keil $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}_{\varphi_2}^{\psi_2}$	Translator $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$	Schiebung $S'' = \{\varphi_2, \psi_2\} = \{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2\}$	Translator $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{y}_2}$	Schiebung $S'' = \{\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2\}$
Länge des Stabes $\mathfrak{S}'$: $\operatorname{dist}(\xi, \eta)$	*Rec. Werth* der Länge von $\mathfrak{Q}'$: $\frac{1}{\operatorname{dist}(\xi_1, \psi_1)} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\varphi_1, \eta_1)}$	*Rec. Werth* der Länge des Impulsors oder Torsors: $\operatorname{dist}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^{-1}$	$\frac{1}{\eta}$	Oeffnung des Keiles $\mathfrak{K}'$: $\operatorname{tg}(\varphi_1, \psi_1)$	Oeffnung des Motors oder Rotors: $\operatorname{tg ang}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$	$\operatorname{tg}\vartheta$	Oeffnung des Motors oder Rotors: $\operatorname{tg ang}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$	$\operatorname{tg}\vartheta$
Moment des Stäbepaares $\mathfrak{S}''$	*Rec. Werth* der Oeffnung v. $\mathfrak{Q}''$: $\frac{1}{\operatorname{tg}(\xi_2, \psi_2)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_2, \eta_2)}$	*Rec. Werth* der Oeffnung des Impulsors oder Ejectors, i. A.: $\operatorname{ctg ang}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}$ (im Allgemeinen, s. S. 77)	Sperrung des Keiles $\mathfrak{K}''$: $\operatorname{dist}(\varphi_2, \psi_2)$	*Länge* des Motors oder Translators: $\operatorname{dist}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$	η	*Sperrung* des Motors oder Translators: $\frac{\operatorname{dist}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\cos^2 \operatorname{ang}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}$	$\frac{\eta}{\cos^2\vartheta}$
Geom. Addition u. Multiplication (Zeichen $+, \cdot$)	Geometrische Addition und Multiplication (Zeichen $+, \cdot$)	Geometrische Addition und Multiplication (Zeichen $+, \cdot$)	*Correlative* Superposition und Streckung —	Geom. Addition u. Multiplication (Zeichen $+, \cdot$)	*Geometrische* Addition und Multiplication (Zeichen $+, \cdot$)	*Lineare* Superposition und Streckung —	*Stereometrische* Addition und Multiplication (Zeichen $+, \times$	*Stereometrische* Superposition und Streckung —

dass die Oeffnung und Länge des ersten gleich der Oeffnung und Sperrung des zweiten ist:

$$\operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}')$$

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{\operatorname{dist}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}')}{\cos^2 \operatorname{ang}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}')}$$

Dann folgt aus jeder geometrischen Gleichung der Form

$$c_1 \cdot \mathfrak{M}_1 + c_2 \cdot \mathfrak{M}_2 + \ldots = 0$$

die entsprechende stereometrische Gleichung

$$c_1 \times \mathfrak{N}_1 \dot{+} c_2 \times \mathfrak{N}_2 \dot{+} \ldots = 0,$$

und umgekehrt.

Dieser Satz ist, wie eine Anzahl ähnlicher Sätze, die ebenfalls noch anzuführen wir für überflüssig halten, eine selbstverständliche Folgerung unserer Theorie; er drückt aber, wie uns scheint, eine sehr merkwürdige geometrische Thatsache aus: Liegt es doch, ungeachtet der Einfachheit der Constructionen, durch die wir die Gleichheit und die geometrische und stereometrische Addition zweier Motoren erklärt haben, keineswegs auf der Hand, dass diese letzten Operationen auch nur das associative Gesetz befolgen, und noch weniger wird man im Voraus die Möglichkeit einer Zuordnung zwischen so verschiedenartigen Constructionen erwarten können.

Unsere Tafel weist keine besonders einfache und regelmässige Structur auf. Es wird daher jetzt die Frage sich aufdrängen, ob die durchgeführte Untersuchung mit den bis jetzt betrachteten und in der Tafel nebeneinander gestellten Gattungen von Constructionen einen gewissen Abschluss erreicht hat, oder ob in der Tafel nicht noch Glieder fehlen, die als mit den aufgeführten gleichwerthig gelten könnten. Lassen sich unsere Constructionen in irgend einem, wenn auch vielleicht nicht mit kurzen Worten zu erklärenden Sinne, zu einer, wenn der Ausdruck erlaubt ist, *natürlichen Familie* vereinigen? Ist also die Umgrenzung des behandelten Stoffs nach sachlichen, durch die Natur des Gegenstandes selbst bedingten Rücksichten erfolgt, oder beruht diese Abgrenzung nicht vielmehr lediglich auf dem Zufall der Erfindung, oder auf einem subjectiven Ermessen des Verfassers? Offenbar würde ein intellectuelles Bedürfniss unbefriedigt bleiben, wenn das Letzte sich zeigen sollte. Wir werden daher nachzuweisen versuchen, dass es Eigenthümlichkeiten giebt, die unseren Constructionen gemeinsam sind, und die diese aus einer unendlichen Mannigfaltigkeit von

Constructionen hervorheben, die man der geometrischen Addition der Stäbe ebenfalls würde zuordnen können.

Der Stab, der Keil, der Quirl, jede von diesen drei Figuren bestimmt einen Speer und eine Zahl, oder den entgegengesetzten Speer und die entgegengesetzt gleiche Zahl. Will man umgekehrt diese letzte Zusammenstellung durch eine rein geometrische Figur ersetzen, so bieten sich als die unzweifelhaft *einfachsten* Figuren das Punktepaar, die Figur eines Punktes und einer Ebene, endlich das Ebenenpaar dar. Wie bei Annahme einer der beiden ersten Figuren unter unendlich vielen Möglichkeiten doch die geometrische Addition der Stäbe und Quirle als *die einfachsten* ausgezeichnet sind, das haben wir zu Eingang des § 8 schon gesehen. Eine entsprechende Ueberlegung kann man auch mit Bezug auf die Ebenenpaare anstellen: Das Ergebniss ist, dass man, soweit die „geometrische Addition" der mit Zahlen verknüpften Speere durch einen eigentlichen Punkt in Frage kommt, an Stelle des Keiles auch ein Paar von Ebenen setzen kann, deren Winkel durch seine Cotangente die Länge des zugehörigen Stabes darstellt. Aber die Constructionen, zu denen man dann kommt, sind von der geometrischen Addition der (sphärischen) Keile gar nicht wesentlich verschieden; und in ihrer Anwendung im dreifach ausgedehnten Raume erweist sich die neue Figur als viel weniger brauchbar als der Keil, da sie keinen dem uneigentlichen Keil entsprechenden Grenzfall enthält. Wir durften also diese Figur zweier nicht-paralleler Ebenen bei Seite lassen.

Betrachten wir nun zweitens geometrische Summen von Stäben, oder, was nach § 2 und § 3 auf dasselbe hinauskommt, mit Zahlen verbundene Gewinde, so sind wiederum *die einfachsten* Figuren, die man diesen verwickelten Gebilden zuordnen kann, unzweifelhaft Paare gerader Linien. In der Art der Zuordnung selbst besteht jedoch ein hoher Grad von Willkür: Gehen wir von einer bestimmten Art der Zuordnung aus, also etwa von einem Motor von der Länge η und der Oeffnung ξ, so können wir sicher unbegrenzt viele neue Arten „geometrischer Addition" von Linienpaaren definiren, indem wir dem genannten Motor einen anderen desselben Trägers zuordnen, dessen Länge η' und Oeffnung ξ' mit η und ξ durch eine birationale Transformation verbunden sind. Eine noch zu ganz einfachen Ergebnissen führende Transformation dieser Art ist z. B. $\xi' = \alpha\xi$, $\eta' = \alpha\eta + \beta\xi$, wo α und β bestimmte Zahlen sind.

Dass nun unter allen diesen unendlich vielen Möglichkeiten, die man übrigens durch weitere Forderungen noch würde einschränken können, die drei von uns betrachteten eine *ausgezeichnete* Stellung ein-

nehmen, ergiebt sich aus deren Beziehung zu den drei Arten der Superposition von Bewegungen. Diese nämlich sind, in ihrer Gesammtheit, *einzig* in ihrer Art.

Liegt eine Bewegung vor, so sind Paare von zugeordneten Figuren *einfachster* Art: Das Paar von Punkten x, x'; das Paar von Ebenen u, u'; das Paar von geraden Linien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$. Nun bestimmt ein Paar von Punkten nur einen (gegenüber Bewegungen mit ihm invariant verbundenen) eigentlichen Punkt in symmetrischer, also wieder in *möglichst einfacher* Weise, nämlich die Sehnenmitte $\bar{x}$: Die Untersuchung der Abhängigkeit der drei Punkte x, $\bar{x}$, x' führt zu den Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, und damit zur geometrischen Addition der Motoren. Ein Punktepaar bestimmt ferner in symmetrischer Weise eine einzige (eigentliche) Ebene, die Normalebene $\bar{\bar{u}}$ der Sehne x, x': Aus dieser Abhängigkeit entwickelt sich, durch Vermittelung der Transformation T, die geometrische Addition der Impulsoren. Ein Ebenenpaar u, u' jedoch bestimmt, wieder in symmetrischer Weise, zwei weitere Ebenen, seine Winkelhalbirenden. Von diesen aber giebt, wie wir gesehen haben, nur die eigentliche zur Entstehung gewisser Transformationen im Ebenenraume Veranlassung. Diese sind identisch mit den Transformationen $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$; sie führen wieder auf die geometrische Addition der Motoren. Ein Punkt, der durch die Ebenen u, u' allein bestimmt würde, und mit diesen zugleich den ganzen Raum durchliefe, existirt nicht. Endlich bestimmen, wenn wir nun den Linienraum betrachten, zwei Gerade $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ in symmetrischer Weise (ausser ihrer gemeinsamen Normale) wiederum nur zwei andere Gerade, die beiden Winkelhalbirenden. Nur diese letzten haben eine Analogie zu den vorher betrachteten Figuren; nur eine von ihnen durchläuft mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ zugleich den ganzen Linienraum; die Eigenschaften der zugehörigen Transformationen T_1, T_2 sind auf's Engste mit der stereometrischen Addition der Motoren verbunden, die in *dieser* Hinsicht jedenfalls mit den beiden Arten „geometrischer" Addition von Linienpaaren in eine Reihe zu stellen ist.*) Unsere drei Arten der Superposition von

*) Wir müssen hier auf die analytische Darstellung im zweiten Abschnitt verweisen, wo das Wesen der besprochenen Analogien noch deutlicher hervortreten wird. Wir werden dort (in § 21 und § 25) sehen, dass die Abhängigkeit der Punkte x, x' von $\bar{x}$, die Abhängigkeit derselben Punkte von $\bar{\bar{u}}$, die Abhängigkeit der Ebenen u, u' von ihrer Winkelhalbirenden $\underline{u}$, und endlich auch die Abhängigkeit der Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ von ihrer Winkelhalbirenden $\mathfrak{X}^*$ durch Formeln von analoger einfacher Structur ausgedrückt wird, und dass ferner auch die drei Arten der Superposition von Bewegungen durch Formeln dargestellt werden, deren Bau eine Gewähr dafür enthält, dass andere Arten der Superposition von ähnlichen und dabei gleich einfachen Eigenschaften nicht gefunden werden können.

Bewegungen haben also gewisse einfache Züge miteinander gemein, die sie mit anderen Arten der „Superposition", deren man unbegrenzt viele definiren kann, sicher nicht theilen werden, und hierin kann ein ausgezeichneter Charakter der entsprechenden Arten von „Addition" der Linienpaare gefunden werden.

Unsere Constructionen sind aber noch durch ein anderes Band verknüpft, nämlich durch ihre gemeinsamen Beziehungen zu gewissen Constructionen der *Nicht-Euklidischen Geometrie.*

Betrachten wir zunächst *zweifach* ausgedehnte sphärische und ebene Mannigfaltigkeiten. Dass die Theorie der sphärischen Stäbe, Keile und Quirle im Grunde dasselbe ist, dass jede aus jeder anderen durch ein ganz einfaches Princip, die *absolute Correlation* hergeleitet werden kann, das haben wir schon gesehen (S. 68). Den Zusammenhang dieser ganz offenbar eine abgeschlossene *Gruppe* bildenden Constructionen mit der Geometrie der Bewegungen, die die Kugelfläche mit sich selbst zur Deckung bringen, haben wir zwar nicht besonders dargelegt, er kann aber unseren auf andere Ziele gerichteten Ueberlegungen ohne Schwierigkeit entnommen werden. Führen wir nun den Grenzübergang zur ebenen Geometrie aus, so kommt die absolute Correlation in Wegfall: Wir erhalten statt einer *drei* Gruppen geometrischer Constructionen, die geometrische Addition der Stäbe, Keile und Quirle in der (Euklidischen) Ebene, Constructionen, die zwar immer noch auf mannigfache Weise unter einander zusammenhängen, und gewiss zu einer „natürlichen Familie" vereinigt werden dürfen, keineswegs aber einen so einfachen Zusammenhang haben, wie die entsprechenden Constructionen in der sphärischen Geometrie. Eigenthümlich verhalten sich bei diesem Grenzübergang die Bewegungen. Nur mit der geometrischen Addition der Keile ist auch in der ebenen Geometrie noch eine Art von „geometrischer Superposition" der Bewegungen eindeutig-umkehrbar verbunden, nicht aber mit den beiden anderen Arten geometrischer Addition: Die mit den sphärischen Stäben verbundenen Bewegungen gehen im Grenzfall in Schiebungen über, die den Stäben nicht mehr eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden können, im Falle der Quirle aber stellen sich an Stelle der Bewegungen andere Transformationen, nämlich Umlegungen ein, Transformationen mit symmetrischer Gleichheit zugeordneter Figuren.

In einer der geschilderten ähnlichen (übrigens u. A. im Verhalten der Bewegungen abweichenden) Beziehung stehen nun unsere auf die Geometrie im dreifach ausgedehnten Euklidischen Raume bezüglichen Sätze zu entsprechenden Sätzen der Nicht-Euklidischen Geometrie. Da dieser umfangreiche Gegenstand im Uebrigen ganz ausserhalb des Rahmens

unserer Untersuchung fällt, so können wir nur anhangsweise*) einige Andeutungen darüber machen. *Man kann zunächst die ganze hier entwickelte Theorie auf den Nicht-Euklidischen Raum übertragen,* und zwar in zum Theil verschiedener Weise bei Mannigfaltigkeiten positiver und negativer Krümmung. Man kann dann weiter die so gefundenen Sätze, nach dem Princip der absoluten Correlation (s. oben) in Gattungen anordnen. Diese Gattungen bilden in ihrer Gesammtheit ein geschlossenes System, dem, wie im Falle der sphärischen Stäbe, der Charakter einer gewissen Vollständigkeit zugeschrieben werden darf, das aber, im Vergleich zur Theorie der sphärischen Stäbe, eine ungleich grössere Mannigfaltigkeit von Constructionen aufweist. Man kann dann drittens untersuchen, was aus diesen Constructionen wird, wenn man, nach Ausführung eines Grenzübergangs, sich wieder auf den Boden der Euklidischen Geometrie stellt. Es findet sich dann, dass von den genannten Constructionen eine Anzahl unbrauchbar werden, oder doch (wie die auf Vectoren bezüglichen Constructionen in Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung) einen sehr speciellen Charakter annehmen; und dass andere Constructionen, die im Nicht-Euklidischen Raume noch durch die absolute Correlation aus einander hergeleitet werden können, und also nicht wesentlich verschieden sind, im Grenzfalle in wesentlich verschiedene Constructionen übergehen. Diese Constructionen können wir, auch nach Ausführung des Grenzübergangs, noch in eine „Gattung" zusammenstellen.

So bilden die auf die geometrische Addition der Vectoren bezüglichen Sätze, zusammen mit denen über Vectorkeile, Vectorquirle u. s. w., eine Gattung; eine zweite Gattung bilden die Sätze über Stäbe, Keile und Quirle; eine dritte bilden die von der geometrischen Addition der Motoren und Impulsoren handelnden Sätze, die durch die lineare und correlative Superposition der Bewegungen mit den Keilen und Quirlen verbunden sind. Eine vierte Gattung endlich bildet bei dieser Art der Gliederung des Stoffs die stereometrische Addition der

*) Die Untersuchung, auf die wir uns hier beziehen, liegt bis jetzt im Druck nicht vor. — Der Verfasser ist, wie schon erwähnt, bei der Ableitung der vorgetragenen Theorie ursprünglich einen Weg gegangen, der dem des Textes gerade entgegengesetzt ist. In dieser Art von Anwendung der Nicht-Euklidischen Geometrie auf die Euklidische darf wohl eine fruchtbare Methode geometrischer Forschung gefunden werden; dass aber die so erlangten Ergebnisse auch unmittelbar begründet werden, scheint uns eine unabweisbare Forderung zu sein, der wir uns um so weniger haben entziehen wollen, als in unserem Falle die eine Discussion zahlreicher Grenzfälle einschliessende Begründung durch elementargeometrische Methoden der schwierigere Theil der Aufgabe war.

Motoren, verbunden mit der stereometrischen Superposition der Bewegungen.

In den Beziehungen der Euklidischen Geometrie zur Nicht-Euklidischen findet also sowohl das von uns hervorgehobene Auftreten einer Reihe von formalen Analogieen zwischen verschiedenen Arten unserer Constructionen seine Erklärung, als auch der Umstand, dass diese Analogieen nicht durchgreifend, sondern im Einzelnen vielfach durchbrochen sind.

Namentlich verliert durch Untersuchung des besprochenen Grenzübergangs die isolirte Stellung der geometrischen Summen von Stäben in unserem System, der Umstand, dass diese nicht in *der* Art, wie die Summen von Keilen und Quirlen mit Linienpaaren verbunden sind, alles Auffallende.

Darin aber, dass bei dem betrachteten Grenzübergang aus dem entsprechenden, wenigstens bei Annahme positiver Krümmung in mancher Hinsicht einfacheren und leichter zu übersehenden System von Sätzen der Nicht-Euklidischen Geometrie die abgeleiteten Constructionen, und (von trivialen Aenderungen abgesehen) *keine weiteren* sich ergeben, dürfen wir wohl ebenfalls einen Hinweis darauf erblicken, dass wir wirklich eine natürliche Familie geometrischer Wahrheiten vor uns haben. —

Diese Auseinandersetzungen haben, wie gesagt, nur den Zweck, die von uns gewählte Umgrenzung des behandelten Stoffs zu rechtfertigen; wir wollen keineswegs behaupten, dass nicht auch noch andere Zuordnungen der Summen von Stäben zu geometrischen Figuren Interesse haben könnten. Wir wollen anhangsweise selbst noch einige Andeutungen über eine weitere Construction der Art hinzufügen.

Eine Figur, die in ähnlichem Sinne benutzt werden kann, wie die Figur zweier Geraden, und hinter dieser letzten Figur an Einfachheit nur wenig zurücksteht, ist die Figur zweier Speere. Wir betrachten, da die gemeinte Construction im Allgemeinen ziemlich verwickelt ist, hier nur den einfachen Fall, wo die Geraden der Speere in einem eigentlichen Punkte einander schneiden. Ersetzen wir dann die Speere durch Punkte auf einer Kugel vom Radius Eins, so kommen wir zu einer neuen Art geometrischer Addition von Punktepaaren auf einer Kugel, die wie folgt erklärt werden kann.

Wir nennen *Segment* σ_{ξ}^{η} einen Hauptkreisbogen, dessen Länge (ξ, η) mod. 2π von Null verschieden ist. Ein solcher Hauptkreisbogen darf ebenso, wie der übrigens von ihm wohl zu unterscheidende sphärische Stab, auf seinem Hauptkreis beliebig verschoben werden. Man darf dann voraussetzen, dass zwei beliebige Segmente σ_o^{ξ} und σ_o^{η} den Anfangspunkt o gemein haben. Man construire nun einen Kreis

durch ξ, der den Hauptkreis $o\eta$ in o berührt, und ebenso einen Kreis durch η, der den Hauptkreis $o\xi$ in o berührt, und bezeichne den zweiten Schnittpunkt dieser beiden Kreise mit ζ: Dann ist durch

$$\sigma_o^{\xi} + \sigma_o^{\eta} = \sigma_o^{\zeta}$$

eine *„geometrische Addition der Segmente"* erklärt, die das associative Gesetz befolgt, und die der geometrischen Addition der sphärischen Stäbe

$$s_o^{\xi_1} + s_o^{\eta_1} = s_o^{\zeta_1}$$

zugeordnet werden kann, wenn man, bei gleichem Hauptkreis, etwa setzt $2\operatorname{ctg}\frac{(o,\,\xi)}{2} = \operatorname{tg}(o,\,\xi_1)$, u. s. w.

Im Grenzfall der ebenen Geometrie ergiebt sich aus dieser leicht abzuleitenden Construction wieder die Art von geometrischer Addition von Stäben, die wir in § 8 als einen Durchgangspunkt betrachtet hatten, und die von der geometrischen Addition der Quirle nicht wesentlich verschieden ist.

§ 15.

Dynamen und infinitesimale Bewegungen.

Wir wenden uns jetzt zur Anwendung unserer Constructionen auf die in der Einleitung formulirte Aufgabe, die den Ausgangspunkt unserer Untersuchung gebildet hat, zu der Frage nach der geometrischen *Zusammensetzung der Dynamen.* Diese Aufgabe kann nun mit wenigen Worten erledigt werden: Der bekannte Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung der Kräfte und Dynamen und der geometrischen Addition der Stäbe und Summen von Stäben kann ohne Weiteres auf die anderen von uns betrachteten Systeme von Constructionen übertragen werden. Man wird eine vorgelegte Dyname darstellen durch eine *Zugkraft* (S. 1) von der Intensität L, und eine *Drehkraft* vom Moment M, deren Ebene auf der Wirkungslinie der Zugkraft senkrecht steht. Ordnet man dann diesem System z. B. einen Motor zu, dessen Hauptaxe in die Wirkungslinie der Zugkraft fällt, und dessen Oeffnung und Länge die Werthe L und M haben, insbesondere also einer Zugkraft einen Rotor und einer Drehkraft einen Translator, so erfolgt die Zusammensetzung der Dynamen durch die geometrische Addition der entsprechenden Motoren. Wie die Zuordnung abzuändern ist, wenn man die stereometrische Addition der Motoren oder die geometrische Addition der Impulsoren benutzen will, zeigt die Tafel auf S. 109. Da man in der Mechanik der als Inten-

sität einer Zugkraft bezeichneten Grösse nur positive Werthe beizulegen pflegt, so ergiebt sich, für diese Anwendung unserer Theorie, die übrigens nicht unentbehrliche Beschränkung, dass die in der vierten Horizontalreihe unserer Tafel aufgeführten Grössen ebenfalls nur positive Werthe haben dürfen. Für die Motoren z. B. hat das die Bedeutung, dass als im positiven Sinne erfolgend u. A. *die* Drehung um die Hauptaxe eines Rotors anzusehen ist, die die Anfangslinie des Rotors mit seiner Endlinie in der Weise zur Deckung bringt, dass dabei ein rechter Winkel nicht überschritten wird. Durch diese Festsetzung wird der positive Sinn der Drehungen um die genannte Axe überhaupt festgelegt und damit zugleich die positive Richtung der Axe, so dass über die Richtung, in der die Grösse M auf dieser Axe abzutragen ist, ein Zweifel nicht bestehen kann.

In gleicher Weise gelangen wir zur Zusammensetzung infinitesimaler Bewegungen auf Grund einer naheliegenden Bemerkung:

XX. *Geht man von endlichen zu infinitesimalen Bewegungen über, so fallen in der Grenze die lineare und die stereometrische Superposition der Bewegungen zusammen, und diese beiden Arten der Superposition — nicht aber auch die correlative — gehen zugleich in die Zusammensetzung der infinitesimalen Bewegungen über.*

Indem wir die Untersuchung des völlig abweichenden Verhaltens der correlativen Superposition dem Leser überlassen, beschränken wir uns auf die Betrachtung der positiven Seite unseres Satzes.

Denken wir uns einen starren Körper im Raume bewegt, und nehmen wir als unabhängige Veränderliche der einfacheren Ausdrucksweise wegen die Zeit, so wird in einem bestimmten Zeitpunkte $t = t_0$ jeder Punkt des Körpers eine gewisse Geschwindigkeit besitzen; und wenn, wie man sich ausdrückt, „gleichzeitig“ mehrere infinitesimale Bewegungen stattfinden, so erfolgt bekanntlich die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten für jeden einzelnen Raumpunkt vermöge der Parallelogrammconstruction. Zu dieser Construction kommen wir nun von der linearen Superposition der Bewegungen aus durch einen Grenzübergang.

Es seien vorgelegt die endlichen Bewegungen S_i, mit den halben Schiebungsgrössen und Drehungswinkeln η_i, ϑ_i, von denen die letzten nicht $\equiv \frac{\pi}{2}$ mod. π sein sollen.

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_{x_i}^{\bar{x}} = \mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x_i'} \qquad (x_i \{S_i\} x_i')$$

seien die zu den Sehnen $x_i x_i'$ gehörigen Stäbe, die ihre Mitten in einem gegebenen Punkte $\bar{x}$ haben. Wir strecken nun die Bewegungen

S_i linear im Verhältniss $c : 1$ (Nr. 7, S. 49), und bezeichnen die dann entstehenden Bewegungen mit S_i', so dass

$$\operatorname{tg} \vartheta_i' = c \cdot \operatorname{tg} \vartheta_i, \qquad \eta_i' = c \cdot \eta_i;$$

die begleitenden Stäbe der Bewegungen S_i' werden dann

$$\mathfrak{S}_i' = c \cdot \mathfrak{S}_i.$$

Setzen wir nun $c = t - t_0$, und gehen wir zur Grenze $t = t_0$ über, so erhalten wir statt der endlichen infinitesimale Bewegungen, mit den halben Winkelgeschwindigkeiten

$$\lim \frac{\vartheta_i'}{t - t_0} = \lim \frac{\operatorname{tg} \vartheta_i'}{t - t_0} = \operatorname{tg} \vartheta_i$$

und den halben Schiebungsgeschwindigkeiten

$$\lim \frac{\eta_i'}{t - t_0} = \eta_i;$$

die halben Geschwindigkeiten des Raumpunktes $\bar{x}$ aber werden nach Grösse und Richtung dargestellt durch die Stäbe

$$\lim \frac{1}{t - t_0} \mathfrak{S}_i' = \mathfrak{S}_i.$$

Die Zusammensetzung dieser Geschwindigkeiten, und daher auch der infinitesimalen Bewegungen erfolgt also durch geometrische Addition der Stäbe $\mathfrak{S}_i$, d. h. durch lineare Superposition der endlichen Bewegungen S_i.

Hiermit haben wir den Satz XX zunächst so weit bewiesen, als er sich auf die lineare Superposition bezieht; wir haben aber noch ein weiteres Resultat erhalten, das in verschiedenen Formen auszusprechen wir zweckmässig finden. Führen wir zunächst statt der Bewegungen S_i die geometrischen Summen von Keilen ein, denen sie associirt sind, so ergiebt sich:

XXI. *Versteht man unter k eine willkürliche, aber ein für allemal bestimmte Constante, und ordnet man jeder infinitesimalen Drehung [Schiebung] einen Keil desselben Trägers zu, dessen Oeffnung [Sperrung] das k-fache der Winkelgeschwindigkeit der Drehung [das k-fache der Schiebungsgeschwindigkeit] ist, so wird damit jeder infinitesimalen Bewegung eine völlig bestimmte geometrische Summe von Keilen zugeordnet. Es werden nämlich infinitesimale Drehungen und Schiebungen (und damit überhaupt infinitesimale Bewegungen) zusammengesetzt, indem man die entsprechenden Keile (Summen von Keilen) geometrisch addirt.*

Hiermit ist natürlich auch der Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung der Kräfte und der Zusammensetzung infinitesimaler

Bewegungen nachgewiesen, den man sonst unmittelbar auf die geometrische Addition der Stäbe zu gründen pflegt. Es verdient aber wohl bemerkt zu werden, dass die Keile hier sich in gewisser Hinsicht ganz anders verhalten als die Stäbe: Ueberträgt man in leicht ersichtlicher Weise die Begriffe Kraft, Stab, Keil, infinitesimale Bewegung auf Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, so erkennt man unschwer:

Der Zusammenhang zwischen Systemen von Kräften und Stäbesummen erstreckt sich auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen, und ebenso auch der Zusammenhang zwischen infinitesimalen Bewegungen und geometrischen Summen von Keilen.

Dagegen hat der in der Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes bestehende Zusammenhang zwischen diesen beiden Doppelreihen von Begriffen kein Analogon in der Geometrie von (Euklidischen oder auch Nicht-Euklidischen) Mannigfaltigkeiten anderer Dimensionenzahl, und insbesondere auch kein Analogon in der Geometrie der Ebene.

In Nicht-Euklidischen Mannigfaltigkeiten zwar besteht zwischen den Begriffen, die man an Stelle der Begriffe „Stab“ und „Keil“ zu setzen hat, allgemein der durch die absolute Correlation vermittelte Zusammenhang, eben der, den wir im Falle der Geometrie im Strahlenbündel oder auf der Kugelfläche in § 4 benutzt hatten. Aber nur wenn die Dimensionenzahl gleich drei ist, tritt neben diesen trivialen Zusammenhang ein anderer, der dem von uns behandelten an die Seite gestellt werden kann.

Führen wir statt der Keile Motoren ein, so können wir den Inhalt des Satzes XXI offenbar auch so ausdrücken:

XXII. *Jeder infinitesimalen Bewegung (Schraubung) kann ein Motor desselben Trägers eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit und Schiebungsgeschwindigkeit der Schraubung stehen zu der Oeffnung und Länge [Sperrung] des Motors in einem willkürlichen, aber ein für allemal bestimmten Verhältniss* $1 : k$.

Insbesondere entspricht jeder infinitesimalen Drehung ein Rotor und jeder infinitesimalen Schiebung ein Translator.

Infinitesimale Bewegungen werden zusammengesetzt, indem man die entsprechenden Motoren geometrisch [stereometrisch] addirt.

Aus der hier benutzten, übrigens schon früher von uns besprochenen Thatsache, dass wir bei Vertauschung der Länge des einzuführenden Motors mit der Sperrung von der geometrischen Addition der Motoren zur stereometrischen übergehen, ergiebt sich nunmehr der vollständige Beweis des Satzes XX: Lassen wir die Constante k gegen

Null convergiren, so fallen in der Grenze die Länge und Sperrung und also auch die beiden betrachteten Motoren selbst zusammen; gleichzeitig gehen die beiden im allgemeinen Falle verschiedenen endlichen Bewegungen, die mit diesen Motoren verbunden sind, in eben die infinitesimale Bewegung über, von der im Satze XXII die Rede ist. *Die genannten beiden endlichen Bewegungen geben jede ein deutliches, aber natürlich verzerrtes Bild von den Eigenschaften der zugehörigen infinitesimalen Bewegung:* Diese erscheint bei unserer Betrachtungsweise gewissermaassen unter dem Mikroskop gesehen.

Eine Anwendung liegt nahe: Wie das *Stäbeparallelogramm* zur Zusammensetzung infinitesimaler Punkttransformationen benutzt wird, so kann das *Keiltrapez* (als „Keiltrapez der Winkelgeschwindigkeiten") zur Zusammensetzung solcher infinitesimaler (Berührungs-) Transformationen dienen, deren Raumelement die Ebene ist, und ebenso können die geometrische und die stereometrische Addition der Motoren zur Zusammensetzung von infinitesimalen Transformationen gerader Linien benutzt werden.

Wir sind hiermit am Ziele unserer geometrischen Betrachtungen; aber vielleicht liegt es im Interesse grösserer Deutlichkeit, wenn wir einige der von uns abgeleiteten Sätze nun nochmals formuliren, indem wir jetzt deren Beziehungen zu den Dynamen in den Vordergrund treten lassen.

XXIII, 1. *Zerlegt man eine Dyname derart in eine Zugkraft und eine Drehkraft, dass die Wirkungslinie der Zugkraft einen veränderlichen eigentlichen Punkt $\bar{x}$ enthält, und stellt man dann die Drehkraft, wie üblich, durch einen Vector $\mathfrak{V}_x^{\bar{x}} = \mathfrak{V}_x^{x'}$ dar, so entspricht dem Punkt x der Punkt x' in einer Bewegung, die von einer Umschraubung verschieden ist.*

2. *Zerlegt man eine Dyname derart in zwei einzelne Kräfte (Zug- oder Drehkräfte), dass die Wirkungslinie der einen in einer veränderlichen eigentlichen Ebene $\underline{u}$ liegt, die der anderen aber auf dieser Ebene senkrecht steht, und stellt man sodann die erste dieser Kräfte durch einen Keil $\mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}'}$ dar, so wird der Ebene u die Ebene u' durch eine Bewegung, und zwar durch eben die im Satze 1. genannte Bewegung zugeordnet.*

3. *Zerlegt man eine Dyname, wie unter 2., nach einer veränderlichen Ebene $\bar{\bar{u}}$ und senkrecht dazu, und stellt man sodann die zweite Componente durch einen Quirl $\mathfrak{Q}_x^{\bar{\bar{u}}} = \mathfrak{Q}_{\bar{\bar{u}}}^{x'}$ dar, so entspricht dem Punkt x der Punkt x' in einer Bewegung, die keine Drehung ist, oder*

(wenn nämlich die Dyname eine Drehkraft ist), in einer nicht involutorischen ausgearteten Umschraubung.

4. *Zerlegt man eine Dyname in zwei Dynamen, derart, dass die Hauptaxe der ersten in eine veränderliche eigentliche Gerade $\mathfrak{X}^*$ fällt, die der zweiten aber diese Gerade senkrecht schneidet, und stellt man hierauf die zweite Componente stereometrisch durch einen Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}^*} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^*}^{\mathfrak{X}'}$ dar (so nämlich, dass die Sperrung des Motors das Moment der Dyname misst), so wird der Geraden $\mathfrak{X}$ die Gerade $\mathfrak{X}'$ wiederum durch eine von einer Umschraubung verschiedene Bewegung zugeordnet.*

5. *Der Zusammensetzung mehrerer Dynamen entspricht im Falle 1. und 2. die lineare Superposition der eingeführten Bewegungen; im Falle 3. die correlative Superposition; im Falle 4. endlich die stereometrische Superposition.*

Anhangsweise wollen wir schliesslich kurz noch eine Frage besprechen, zu deren Behandlung wir bisher keine Veranlassung gehabt haben, die aber der Vollständigkeit wegen doch wohl noch berührt werden muss.

Die Hauptaxen $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Y}_3$ dreier nicht auf Translatoren sich reducirender Motoren, deren geometrische [stereometrische] Summe verschwindet, mögen als nicht parallel angenommen werden. Die genannten drei Geraden haben dann eine einzige gemeinsame Normale $\mathfrak{D}$, die gemeinsame Querlinie der Träger der drei Motoren, und sie werden auf dieser gewisse Abschnitte

$$l_1 = \text{dist.}\,(\mathfrak{Y}_2,\ \mathfrak{Y}_3)$$

u. s. w. bestimmen. *Welches sind die Relationen, die zwischen diesen Abschnitten, den Winkeln*

$$\lambda_1 = \text{ang.}\,(\mathfrak{Y}_2,\ \mathfrak{Y}_3)$$

u. s. f., und den Oeffnungen L_1, L_2, L_3 und Längen [Sperrungen] M_1, M_2, M_3 der drei Motoren stattfinden?

Die Antwort ist natürlich nicht schwer zu geben: Die fraglichen Relationen werden ausgedrückt durch die Formeln

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0 \mod 2\pi, \qquad l_1 + l_2 + l_3 = 0,$$

$$L_1 : \sin\lambda_1 = L_2 : \sin\lambda_2 = L_3 : \sin\lambda_3,$$

$$\frac{M_1}{L_1} - \frac{l_1}{\operatorname{tg}\lambda_1} = \frac{M_2}{L_2} - \frac{l_2}{\operatorname{tg}\lambda_2} = \frac{M_3}{L_3} - \frac{l_3}{\operatorname{tg}\lambda_3}.$$

Den Beweis, wie auch die Behandlung der ausgeschlossenen Grenzfälle, glauben wir dem Leser überlassen zu dürfen.

Auch diese Formeln liefern ein freilich nicht besonders empfehlenswerthes Verfahren zur Zusammensetzung der Dynamen.

Zweiter Abschnitt.

Einleitung.

Die Untersuchung unseres ersten Abschnittes lässt unerledigt die Frage nach dem algebraischen Aequivalent der abgeleiteten Sätze, nach deren Einordnung in das System der *analytischen* Geometrie. Diese Frage ist, vollständig jedenfalls, nicht so einfach zu beantworten, wie es zunächst vielleicht scheinen mag. Zwar die einzelnen Bestandtheile unserer Constructionen sind einfach genug; aber wenn es sich z. B. bei der stereometrischen Addition der Motoren darum handelt, durch siebenmalige Wiederholung einer an sich ganz einfachen Construction aus drei Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die eine beliebige Lage gegen das Coordinatensystem haben können, eine vierte Gerade $\mathfrak{Z}$ abzuleiten (Nr. 18, S. 87) so erweist sich die gewöhnliche analytische Geometrie doch als ein viel zu schwerfälliger Apparat. Es genügt bei concreten Aufgaben eben nicht, dass man die Schritte, die zur Lösung führen, einzeln thun kann, sondern man muss das Endergebniss der Rechnung vor sich haben, und überdies in einer Form, die übersichtlich genug ist, um noch weitere Schlussfolgerungen zu ermöglichen. So werden wir denn durch unseren Gegenstand dazu genöthigt, die analytische Geometrie selbst in bestimmter Richtung weiterzubilden; und wir werden dabei mit den allerelementarsten Aufgaben einsetzen müssen. Die darzulegenden Methoden werden sich dann auch bei anderen Problemen als nützlich erweisen, besonders bei solchen Aufgaben der analytischen Geometrie, die nicht so verwickelt sind, dass ihre Lösung durch geschlossene Endformeln überhaupt unthunlich wäre.

Als die wünschenswerthe Grundlage solcher algebraisch-geometrischer Untersuchungen erscheint dem Verfasser eine umfassende Theorie der *Bewegungsinvarianten*, als deren centrales Problem die Bestimmung aller ganzen irreducibelen Bewegungsinvarianten in einem unbegrenzten System von Punkten, Geraden (oder Gewinden) und Ebenen und der zwischen diesen Invarianten stattfindenden irreducibelen Relationen anzusehen

ist*). Eine solche Theorie liegt indessen zur Zeit noch nicht vor, und bei der nicht zu unterschätzenden Schwierigkeit der angedeuteten Aufgabe werden wir ohne eine solche auszukommen suchen müssen. Wir werden uns in der Art helfen, dass wir wenigstens die Ausdrücke, mit denen wir es thatsächlich zu thun haben, aus ihren elementaren Bestandtheilen aufbauen, die sich einzeln leicht als Bewegungsinvarianten erweisen lassen. Solche irreducibele Bewegungsinvarianten treten in unserer Untersuchung in verhältnissmässig geringer Zahl auf. Wir führen daher für sie eigene *Zeichen* ein, und wir erreichen damit den Grad von formaler Einfacheit und Uebersichtlichkeit der Formeln, der uns für unsere Zwecke unerlässlich zu sein scheint. Daneben bedienen wir uns da, wo Bewegungen in Frage kommen, einer Darstellung des Coefficientensystems einer orthogonalen Coordinatentransformation durch gewisse Parameter, auf Grund einer älteren Arbeit des Verfassers, deren Inhalt hier, soweit als nöthig, reproducirt wird.

Wesentliche Dienste leisten wird uns zur Abkürzung mancher sonst beschwerlichen und unübersichtlichen Rechnung die von Aronhold eingeführte und namentlich von Clebsch weiter entwickelte sogenannte symbolische Bezeichnungsweise und die darauf beruhende Rechnungsmethode. Die Anwendbarkeit dieser Methode auf unseren Gegenstand ist darin begründet, dass die besprochenen elementaren Bewegungsinvarianten (nicht aber, wie irrthümlich schon behauptet worden ist, Bewegungsinvarianten überhaupt) simultane Invarianten im Sinne der gewöhnlichen Invariantentheorie (der Invariantentheorie der allgemeinen projectiven Gruppe) sind.

Dass dem Gebrauch der symbolischen und anderer abkürzender Bezeichnungsweisen in der analytischen Geometrie in weiten Kreisen eine starke Abneigung entgegensteht, ist dem Verfasser sehr wohl bekannt, und er möchte auch keineswegs in Abrede stellen, dass diese Abneigung in manchen Fällen gerechtfertigt ist. Wo es sich um eine kleinere Gruppe von Wahrheiten handelt, lohnt es sich wirklich nicht, einen besonderen Calcul zu erlernen. Der Formalismus, der doch immer nur Mittel zum Zweck sein darf, ist nur allzuoft Selbstzweck geworden; und dass mit Bezug auf gewisse Fragen abstracter Natur andere Methoden der symbolischen überlegen sind, hat der Erfolg bewiesen. Es kann aber doch wohl keinem Zweifel unterliegen, dass es dem Geometer schlechterdings *Nichts* nützt, wenn er irgend eine end-

*) Wegen einer genaueren Formulirung vergleiche man eine Abhandlung des Verfassers, Leipz. Ber. 1896, S. 649, wo die entsprechende Aufgabe aus der ebenen Geometrie gelöst ist.

liche Zahl algebraischer Grössen durch eine ebenfalls endliche Zahl sogenannter ausführbarer Operationen ermitteln „kann“*). Nicht Methoden braucht der Geometer, die alles Mögliche umspannen, sondern etwas ganz Anderes: Algebraische Processe, die möglichst eng *seinen* Problemen angepasst sind; Processe, die in einem viel weiteren Umfange, als sogenannte allgemeine Methoden *ausführbar* sind im eigentlichen Sinne des Wortes, indem sie nämlich geschlossene Endformeln liefern; Methoden, die überdies auch möglichst *schnell* zu diesem Ziele führen, wo immer es sich erreichen lässt. Ein wesentliches Erforderniss dazu aber ist, bei umfangreicheren Untersuchungen jedenfalls, eine dem besonderen Gegenstande angemessene Formelsprache, ein Calcul, der es dem Geometer ermöglicht, seine Constructionen durch Zeichen auf dem Papier übersichtlich darzustellen. Gegenüber dieser Hauptforderung scheint uns selbst das gewiss auch für den Geometer sehr wichtige Problem der erschöpfenden Bestimmung gewisser vollständiger Invariantensysteme durch wirkliche Aufstellung ihrer Ausdrücke von untergeordneter Bedeutung zu sein.

Freilich, wer von abkürzenden Bezeichnungen rechten Nutzen ziehen will, der bedarf einer gewissen Uebung, und diese kann in unserem Falle wohl nur bei einem ziemlich kleinen Theile der Fachgenossen vorausgesetzt werden. Wir haben unter diesen Umständen ein billiges

*) Es darf wohl einmal die Frage aufgeworfen werden, ob nicht vielleicht die Abstraction überhaupt in unserem Denken einen zu breiten Platz einnimmt. Jedenfalls erscheint uns der ja nunmehr eingebürgerte Gebrauch der Worte „ausführbar“ und „können“ im obigen Sinne nicht durchaus glücklich zu sein. Der Physiker wird vorsichtig sein mit der Behauptung, dass er einen Apparat construiren *kann*; denn er hat stets die Schwierigkeiten gegenwärtig, die die Ausführung eines vielleicht sehr einfachen Gedankens oftmals mit sich bringt. Der Mathematiker kümmert sich weniger um die Tücke des Objects. Nun kann ja gewiss die Fiction eines Wesens von beliebig grosser (wiewohl „endlicher“) Geduld nicht entbehrt werden. Es versteht sich von selbst, dass man, wo ein Weiteres sich nicht erreichen lässt, mit der „endlichen Zahl ausführbarer Operationen“ zufrieden sein muss. Aber auch da, wo die genannte Voraussetzung gar nicht zutrifft, wird häufig ein Problem als „in der Hauptsache“ erledigt und weiteren Interesses baar angesehen, sobald es auf eine endliche Zahl „ausführbarer“ Operationen reducirt ist, während in Wirklichkeit das Meiste vielleicht noch zu thun bleibt. Man vergisst wohl zuweilen, dass es sich nicht um ein wirkliches Ausführen, ein wirkliches Können handelt. Dieselbe Anschauung liegt auch manchen Urtheilen zu Grunde, in denen die sogenannte Allgemeinheit einer Theorie unseres Erachtens viel zu einseitig als Werthmesser benutzt wird. Dem gegenüber darf vielleicht einmal die Bedeutung concreter und namentlich *elementarer* Aufgaben betont werden. Wir sollten nicht zu vornehm sein, uns mit Einfachem zu befassen, aber vornehm genug, gerade bei einfachen Aufgaben uns die Lösung nicht *zu leicht* zu machen.

Maass pädagogischer Forderungen in folgender Weise zu befriedigen gesucht.

Ausgehend von der Annahme, dass der Leser mit dem Gedankenkreise der projectiven Geometrie und namentlich mit dem Gebrauch von homogenen Punkt-, Linien- und Ebenencoordinaten vertraut ist, setzen wir zunächst, in § 1, die symbolische Rechnungsweise selbst auseinander, unter Beschränkung auf das Wenige, was für unsere Zwecke nöthig sein wird, und unter Benutzung solcher Beispiele, die zu dem Folgenden in Beziehung stehen. Wir führen zweitens die Untersuchnng durchweg im einfachsten Coordinatensystem, dem Cartesischen rechtwinkligen, wiewohl für einen grossen Theil unserer Ueberlegungen eine solche Specialisirung nicht erforderlich ist. Wir geben drittens in einer Reihe von Fällen neben den symbolischen auch die ausgerechneten Ausdrücke an. Ueberall aber wird es, nach den mitgetheilten Regeln, möglich sein, den Uebergang von den abkürzenden symbolischen Ausdrücken zu völlig entwickelten Formeln schnell zu vollziehen, und es wird sich daher ein jeder Mathematiker von Dem unterrichten können, was behauptet wird. Eine Verification dieser Behauptungen wird dann, durch allerdings mitunter beschwerliche Rechnungen, auch ohne Symbolik zu erbringen sein.

Die algebraische Begründung unserer „Geometrie der Dynamen", die wir nun vortragen wollen, ist ihrer ganzen Anlage nach völlig unabhängig von der im ersten Abschnitt mitgetheilten Begründung. Wir setzen aber, um Wiederholungen zu vermeiden, die Begriffe Linienkreuz, Keil, Quirl u. s. w. als aus dem ersten Abschnitt bekannt voraus, ebenso auch die auf sie bezüglichen Behauptungen (nicht aber deren Beweise). Auch glauben wir auf eine besondere algebraische Behandlung mehrerer Einzelheiten verzichten zu dürfen.

§ 16.

Coordinaten. Lineare und bilineare Formen.

Punkte und Ebenen.

Wir stellen einen *Punkt* im Raume dar durch rechtwinklige Cartesische Coordinaten. Diese schreiben wir, wie es (nach dem Vorgang von Hesse) auch sonst zuweilen geschieht, in Gestalt von Brüchen mit gemeinsamem Nenner $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, $\frac{x_3}{x_0}$, da andernfalls gewisse Gesetzmässigkeiten in den abzuleitenden Formeln nicht deutlich zum Vorschein kommen würden. Der Punkt x wird also dargestellt durch vier Verhältnissgrössen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 ,$$

sogenannte rechtwinklige homogene Coordinaten, deren gleichzeitiges Verschwinden aussagt, dass der betrachtete Punkt unbestimmt wird. Es werden durchweg nur endliche Werthe der Grössen x_i zugelassen; die uneigentlichen Punkte, die bei der in Elementarbüchern üblichen Darstellungsweise unendliche Coordinatenwerthe erhalten, sind gekennzeichnet durch das Verschwinden von x_0.

Eine lineare Gleichung zwischen den genannten vier Grössen, eine gleich Null gesetzte sogenannte *lineare Form*, stellt eine *Ebene* dar. Die Coefficienten u_i in dieser Gleichung, ebenfalls homogene Grössen, sind die Coordinaten der Ebene. Setzen wir also

$$(ux) = u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 , \tag{1}$$

so ist $(ux) = 0$ die Bedingung der vereinigten Lage des Punktes x und der Ebene u.

Mit (lx) bezeichnen wir die in den Punktcoordinaten x_i lineare Form, deren Coefficienten die Zahlenwerthe

$$l_0 = 1, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0$$

haben, so dass identisch

$$(lx) = x_0 \tag{2}$$

ist, und also $(lx) = 0$ die *Gleichung der unendlich fernen Ebene* bedeutet: Es ist vielfach nützlich, diese letzte Gleichung so darzustellen, dass sie sich in der Form den abgekürzten Gleichungen $(ax) = 0$, $(bx) = 0, \ldots$ irgend welcher anderer Ebenen anschliesst.

Die aus den Coordinaten von vier Punkten x, x', y, y' oder Ebenen u, u', v, v' gebildeten Determinanten bezeichnen wir mit

$$(xx'yy'), \quad (uu'vv');$$

das Verschwinden dieser Grössen drückt aus, dass die vier Punkte in (wenigstens) einer Ebene liegen oder dass die vier Ebenen durch einen Punkt gehen; die Gleichung

$$(luvw) = |u_1v_2w_3| = 0$$

insbesondere sagt also aus, dass die drei Ebenen u, v, w zu einer Geraden parallel sind.

Die Coordinaten u_i einer durch drei Punkte ξ, η, ζ bestimmten Ebene werden, natürlich abgesehen von einem unbestimmt bleibenden Factor, gefunden, wenn man

$$(ux) = (\xi\eta\zeta x)$$

setzt und die Coefficienten der Grössen x_i beiderseits vergleicht; entsprechend die Coordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen φ, ψ, χ aus

$$(ux) = (\varphi\psi\chi u).$$

Wir drücken diese Abhängigkeit von Punkt- und Ebenencoordinaten und umgekehrt aus durch die Zeichen

$$(3) \qquad u = \widehat{\xi\eta\zeta}, \quad x = \widehat{\varphi\psi\chi}$$

d. h. also $u_0 = -|\xi_1\eta_2\zeta_3|$, $u_1 = |\xi_2\eta_3\zeta_0|$, u. s. w.,

und *nicht* etwa $u_0 = |\xi_1\eta_2\zeta_3|$, $u_1 = -|\xi_2\eta_3\zeta_0|$ u. s. f.

Die Art, wie das hiermit eingeführte Symbol*) $\wedge$ in Rechnungen verwendet wird, zeigen die Formeln

$$(4) \qquad (\widehat{\xi\eta\zeta}\,\widehat{\varphi\psi\chi}) = (\widehat{\varphi\psi\chi}\,\widehat{\xi\eta\zeta}) = |(\varphi\xi)(\psi\eta)(\chi\zeta)|,$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\xi\eta\zeta\,\widehat{\varphi\psi\chi}) &= -(\widehat{\varphi\psi\chi}\,\xi\eta\zeta) = |(\varphi\xi)(\psi\eta)(\chi\zeta)|, \\ (\varphi\psi\chi\,\widehat{\xi\eta\zeta}) &= -(\widehat{\xi\eta\zeta}\,\varphi\psi\chi) = |(\varphi\xi)(\psi\eta)(\chi\zeta)|. \end{aligned}$$

Zwischen Ausdrücken der drei Typen (ux), $(uu'vv')$, $(xx'yy')$ — wozu wir hier auch (lx) und $(luvw)$ rechnen — bestehen mehrere identische Relationen. Es genügt hier zwei von diesen anzuführen, die den Typus verschiedener bei den weiterhin vorkommenden Rechnungen nöthiger Umformungen angeben. Die erste der gemeinten Identitäten ist der Multiplicationssatz vierreihiger Determinanten:

$$(6) \qquad (u_1u_2u_3u_4)(x_1x_2x_3x_4) - |(u_1x_1)(u_2x_2)(u_3x_3)(u_4x_4)| = 0;$$

die andere Identität, gleichfalls eine elementare Formel der Determinantentheorie, schreiben wir, entsprechend dem verschiedenen Gebrauche, den wir von ihr zu machen haben werden, in mehrerlei Gestalt:

$$(7)$$

$$(ux_0)(x_1x_2x_3x_4) + (ux_1)(x_2x_3x_4x_0) + (ux_2)(x_3x_4x_0x_1) + (ux_3)(x_4x_0x_1x_2) + (ux_4)(x_0x_1x_2x_3) = 0,$$

$$(ux)(x_1x_2x_4x_4) = (ux_1)(xx_2x_3x_4) + (ux_2)(x_1xx_3x_4) + (ux_3)(x_1x_2xx_4) + (ux_4)(x_1x_2x_3x),$$

$$(ux)(y\xi\eta\zeta) - (uy)(x\xi\eta\zeta) = (u\xi)(yx\eta\zeta) + (u\eta)(yx\zeta\xi) + (u\zeta)(yx\xi\eta).$$

Die dem Zeichen x in diesen Formeln beigefügten Indices dienen hier, und weiterhin in ähnlichen Fällen, natürlich zur Unterscheidung

*) Reiss, Math. Ann. Bd. II, S. 385 u. ff.

mehrerer Punkte, nicht aber, wie oben, zur Unterscheidung der Coordinaten eines und desselben Punktes. Will man die Coordinaten einzeln sichtbar machen, was meistens überflüssig ist, so muss man zu deren Unterscheidung noch weitere Indices hinzufügen, man muss dann also z. B. das Zeichen $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ durch das Determinantensymbol $|x_{10} x_{21} x_{32} x_{43}|$ ersetzen.

Gerade Linien.

Die gerade Linie $\mathfrak{P}$ erscheint entweder als Verbindungslinie $\mathfrak{P}_\xi^\eta$ zweier Punkte ξ, η, oder als Schnittlinie $\mathfrak{P}_\varphi^\psi$ zweier Ebenen φ, ψ. In beiden Fällen dienen als Coordinaten der Geraden, nach Plücker, die aus den Coordinaten der genannten Punkte oder Ebenen zu bildenden zweireihigen Determinanten, oder vielmehr deren Verhältnisse. Es ergiebt sich hieraus eine doppelte Bezeichnungsweise der sechs Liniencoordinaten: Wir entscheiden uns, willkürlich, für die eine, was bei einer Untersuchung, wie der unsrigen, bei der das in der projectiven Geometrie waltende correlative Verhältniss zwischen Punkten und Ebenen ohnehin gestört ist, wohl auch von vorn herein nahe liegt. Sei also die Gerade $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\xi^\eta$ gegeben als Verbindungslinie zweier Punkte ξ, η, so bezeichnen wir die Liniencoordinaten wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}_{01} &= \xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1, & \mathfrak{P}_{23} &= \xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3,\\
\mathfrak{P}_{02} &= \xi_0\eta_2 - \eta_0\xi_2, & \mathfrak{P}_{31} &= \xi_3\eta_1 - \eta_3\xi_1,\\
\mathfrak{P}_{03} &= \xi_0\eta_3 - \eta_0\xi_3, & \mathfrak{P}_{12} &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2;
\end{aligned}
\tag{8}
$$

liegt eine Gerade $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\varphi^\psi$ als Schnittlinie zweier Ebenen φ, ψ vor, so bezeichnen wir die Liniencoordinaten so:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}_{01} &= \varphi_2\psi_3 - \psi_2\varphi_3, & \mathfrak{P}_{23} &= \varphi_0\psi_1 - \psi_0\varphi_1,\\
\mathfrak{P}_{02} &= \varphi_3\psi_1 - \psi_3\varphi_1, & \mathfrak{P}_{31} &= \varphi_0\psi_2 - \psi_0\varphi_2,\\
\mathfrak{P}_{03} &= \varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2, & \mathfrak{P}_{12} &= \varphi_0\psi_3 - \psi_0\varphi_3.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Wie bei den Punkten und Ebenen, so werden wir auch bei den geraden Linien meistens nicht nöthig haben, die Coordinaten in den Formeln einzeln sichtbar zu machen; den durch Unterdrückung der Indices i, k gewonnenen Raum können wir dann, wie oben, durch andere Indices ξ, η oder φ, ψ ausfüllen, die die Entstehungsweise der einzelnen geraden Linien anschaulich machen. So kommen wir zu den folgenden Bezeichnungen für häufig auftretende Verbindungen der Coordinaten gerader Linien:

$$(\mathfrak{P}_\xi^{\xi'}\mathfrak{P}_\eta^{\eta'}) = (\mathfrak{P}_\eta^{\eta'}\mathfrak{P}_\xi^{\xi'}) = (\xi\xi'\eta\eta'), \tag{10}$$

$$(\mathfrak{P}_\xi^{\eta}\mathfrak{P}_\varphi^{\psi}) = (\mathfrak{P}_\varphi^{\psi}\mathfrak{P}_\xi^{\eta}) = (\varphi\xi)(\psi\eta) - (\varphi\eta)(\psi\xi), \tag{11}$$

$$(\mathfrak{P}_\varphi^{\varphi'}\mathfrak{P}_\psi^{\psi'}) = (\mathfrak{P}_\psi^{\psi'}\mathfrak{P}_\varphi^{\varphi'}) = (\varphi\varphi'\psi\psi'). \tag{12}$$

Lassen wir die beigefügten Indices wieder weg, und bezeichnen wir, in allen drei Fällen, die erste Gerade mit $\mathfrak{P}$, die zweite mit $\mathfrak{Q}$, so werden alle drei Ausdrücke dargestellt durch dieselbe Formel:

$$(13)\quad (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{Q}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{Q}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{Q}_{12} + \mathfrak{P}_{23}\mathfrak{Q}_{01} + \mathfrak{P}_{31}\mathfrak{Q}_{02} + \mathfrak{P}_{12}\mathfrak{Q}_{03}.$$

Das Verschwinden dieses Ausdrucks bedeutet, dass die Geraden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ einander schneiden; fallen beide Gerade zusammen, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$, so ergiebt sich die Identität zwischen Plücker'schen Liniencoordinaten:

$$(14)\qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{12} = 0.$$

Die Gesammtheit aller Geraden $\mathfrak{X}$, die eine gegebene Gerade $\mathfrak{P}$ schneiden, bildet eine dreifach ausgedehnte Linienmannigfaltigkeit, nach Herrn R. Sturm's Ausdruck ein *Gebüsch gerader Linien*, dargestellt durch die Gleichung $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$. Verschwinden in dieser Gleichung, der *„Gleichung der geraden Linie"*, die Coefficienten $\mathfrak{P}_{01}$, $\mathfrak{P}_{02}$, $\mathfrak{P}_{03}$, so ist die Gerade $\mathfrak{P}$ uneigentlich, sie gehört der unendlich fernen Ebene an.

Gewinde. Nullsysteme.

Wir betrachten nun ein System von sechs Verhältnissgrössen $\mathfrak{P}_{ik}$, die die Gleichung (14) nicht befriedigen. Bilden wir, unter dieser Voraussetzung, wieder die Gleichung $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, so entsteht, als Ort der veränderlichen Geraden $\mathfrak{X}$, das *Gewinde* oder der allgemeine *lineare Liniencomplex*. Setzen wir einmal $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_x^y$, das andere Mal $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_u^v$, so entstehen bilineare Beziehungen zwischen den Punkten x, y und den Ebenen u, v (d. h. zwischen den Coordinaten dieser Punkte und Ebenen), und diese definiren ein sogenanntes *Nullsystem;* es entstehen die bekannten Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{aligned}
&(\ *\ - \mathfrak{P}_{23}x_1 - \mathfrak{P}_{31}x_2 - \mathfrak{P}_{12}x_3)y_0 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{23}x_0\ \ *\ - \mathfrak{P}_{03}x_2 + \mathfrak{P}_{02}x_3)y_1 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{31}x_0 + \mathfrak{P}_{03}x_1\ \ *\ - \mathfrak{P}_{01}x_3)y_2 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{12}x_0 - \mathfrak{P}_{02}x_1 + \mathfrak{P}_{01}x_2\ \ *\ )y_3 = 0,
\end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned}
&(\ *\ - \mathfrak{P}_{01}u_1 - \mathfrak{P}_{02}u_2 - \mathfrak{P}_{03}u_3)v_0 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{01}u_0\ \ *\ - \mathfrak{P}_{12}u_2 + \mathfrak{P}_{31}u_3)v_1 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{02}u_0 + \mathfrak{P}_{12}u_1\ \ *\ - \mathfrak{P}_{23}u_3)v_2 + \\
&+ (\mathfrak{P}_{03}u_0 - \mathfrak{P}_{31}u_1 + \mathfrak{P}_{23}u_2\ \ *\ )v_3 = 0.
\end{aligned}$$

Hält man in der Gleichung (15) den Punkt x fest, so bestimmt diese Gleichung, als Ort von y, eine Ebene durch den Punkt x, die *Nullebene* des Punktes x; bezeichnet man deren Coordinaten mit u_i, so bestimmt (16), als Ort der Ebene v, einen in u gelegenen Punkt, den *Nullpunkt* der Ebene u, nämlich wieder den Punkt x. Zu jeder Ebene

gehört, so lange das Nullsystem nicht ausartet, d. h. so lange $J = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P})$ von Null verschieden bleibt, ein völlig bestimmter Punkt als Nullpunkt, und umgekehrt; insbesondere gehört zur unendlich fernen Ebene als Nullpunkt der uneigentliche Punkt

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_l^u) = 0, \tag{17}$$

also der Punkt

$$\mathfrak{P}_{01}u_1 + \mathfrak{P}_{02}u_2 + \mathfrak{P}_{03}u_3 = 0. \tag{17}$$

Durchläuft der Punkt x irgend eine gerade Linie $\mathfrak{X}$, so dreht sich — falls $J \neq 0$ — seine Nullebene immer um eine völlig bestimmte Gerade $\mathfrak{X}'$, die *Polare* der Geraden $\mathfrak{X}$ in Bezug auf das Nullsystem (15, 16), und dieser Geraden $\mathfrak{X}'$ ist durch denselben Process wieder die Gerade $\mathfrak{X}$ zugeordnet. Die Beziehung zwischen den einander zugeordneten Polaren $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ kann, bei Einführung einer veränderlichen Geraden $\mathfrak{Y}$, dargestellt werden durch irgend eine der in Bezug auf die Liniencoordinaten $\mathfrak{Y}_{ik}$ identischen Gleichungen

$$\begin{aligned}(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}) &= 2\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{P}\mathfrak{P})} - (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}),\\ (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) &= 2\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X}')(\mathfrak{P}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{P}\mathfrak{P})} - (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}),\end{aligned} \tag{18}$$

deren jede die andere nach sich zieht; d. h. es ist

$$\mathfrak{X}'_{ik} + \mathfrak{X}_{ik} = 2\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X})}{(\mathfrak{P}\mathfrak{P})} \cdot \mathfrak{P}_{ik} = 2\frac{(\mathfrak{P}'\mathfrak{X})}{(\mathfrak{P}\mathfrak{P})} \cdot \mathfrak{P}_{ik}, \tag{18b}$$

wofern der in die Grössen $\mathfrak{X}'_{ik}$ eingehende willkürliche Proportionalitätsfactor in geeigneter Weise bestimmt wird. —

Collineationen.

Eine *Collineation* S wird *in Punktcoordinaten* dargestellt durch ein Gleichungssystem der Form

$$x_i' = c_{i0}x_0 + c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{19}$$

mit von Null verschiedener Determinante: Wir stellen uns vor, dass durch diese Gleichungen einem gegebenen Punkt x ein anderer x' zugeordnet wird, so dass

$$x\,\{S\}\,x', \qquad x'\,\{S^{-1}\}\,x.$$

Um die Gesetze, nach denen verschiedene Collineationen (wie auch die sogleich zu betrachtenden Correlationen) hinter einander auszuführen oder „zusammenzusetzen“ sind, einfach ausdrücken zu können, ist es nützlich, eine abkürzende Bezeichnung einzuführen. Wir stellen zunächst den Punkt x' dar durch eine Gleichung $(u'x') = 0$, d. h. wir multipliciren die Grössen x_i' mit den Coordinaten u_i' einer unbestimmten

Ebene, und setzen die Summe gleich Null. Setzen wir dann noch, was für das Folgende bequem ist, $c_{ik} = \gamma_{ki}$, so wird die Collineation (19) dargestellt durch eine gleich Null gesetzte *bilineare Form mit einer Reihe von Punktcoordinaten x_i und einer Reihe von Ebenencoordinaten u_i'*, nämlich durch die Gleichung

$$\Sigma \gamma_{ik} x_i u_k' = 0 \qquad (i,k = 0,1,2,3). \tag{20}$$

Dieselbe Gleichung stellt dann, wie man sofort erkennt, auch die der Transformation S entgegengesetzte Transformation S^{-1} dar; diese aber als eine Zuordnung von Ebenen: Nennen wir u_i den Coefficienten von x_i in (20), so besteht offenbar zwischen den Ebenen u und u' die Beziehung

$$u' \{S^{-1}\} u, \qquad u \{S\} u'.$$

Der Ausdruck links in Nr. (20) hat nun gerade so viele Coefficienten wie das Product aus einer in Punktcoordinaten linearen Form

$$(ax) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

und einer in Ebenencoordinaten linearen Form

$$(u'p) = u_0' p_0 + u_1' p_1 + u_2' p_2 + u_3' p_3,$$

und dieses Product $(ax)(u'p)$ ist selbst eine specielle bilineare Form; man kann daher abkürzend, oder wie man sagt, symbolisch,

$$\Sigma \gamma_{ik} x_i u_k' = (ax)(u'p)$$

setzen, wofern man bestimmt, dass nach Ausrechnung des Products $(ax)(u'p)$ die einzelnen Producte $a_i p_k$ durch die entsprechenden Werthe γ_{ik} ersetzt werden sollen.

Wir bedienen uns dieser Bezeichnungsweise zunächst, um die Zusammensetzung zweier (oder mehrerer) Collineationen S, S' zu einer neuen S'' übersichtlich zu gestalten: Werden die Transformationen S und S' dargestellt durch die Gleichungen

$$\Sigma \gamma_{ik} x_i u_k' = (ax)(u'p) = 0,$$
$$\Sigma \gamma_{ik}' x_i' u_k'' = (a'x')(u''p') = 0,$$

so wird die aus beiden zusammengesetzte Transformation $S'' = SS'$ wiederum dargestellt durch eine gleich Null gesetzte bilineare Form

$$\Sigma \gamma_{ik}'' x_i u_k'' = (a''x)(u''p'') = 0.$$

Hier ist $\gamma_{ij}'' = \sum_k \gamma_{ik} \gamma_{kj}'$, oder

$$(a''x)(u''p'') = (ax)(a'p)(u''p'), \tag{21}$$

worin rechts nach Ausführung der angezeigten Multiplication die Producte $a_i p_k$ durch γ_{ik} und die Producte $a_k' p_j'$ durch γ_{kj}' zu ersetzen sind.

Sind die Transformationen S und S', und auch die zugehörigen bilinearen Formen identisch, $\gamma_{ik} = \gamma'_{ik}$, so ist die Formel (21) ebenfalls noch anwendbar: Man muss dann nur erst *nach* Ausrechnung des symbolischen Ausdrucks (21) die Producte $a_i p_k$ und ebenso die Producte $a'_i p'_k$ durch die Grössen γ_{ik} ersetzen, nicht aber etwa vorher die Symbole a_i und a'_i, oder p_i und p'_k verwechseln.

Des hiermit eingeführten Princips der gleichzeitigen Verwendung mehrerer Symbolpaare zur Darstellung derselben Grössen γ_{ik} bedienen wir uns ferner zur *Darstellung der Collineation S in Liniencoordinaten.*

Sei eine Gerade $\mathfrak{X}$ zunächst gegeben durch zwei ihrer Punkte x_1, x_2, so ist die entsprechende, nämlich $\mathfrak{X}$ durch S zugeordnete Gerade $\mathfrak{X}'$ bestimmt als Verbindungslinie der Punkte x_1', x_2', die den Punkten x_1, x_2 durch S zugeordnet sind. Stellen wir also unsere Collineation, auf zwei verschiedene Arten, symbolisch dar durch ein gleich Null gesetztes Product linearer Formen

$$(ax)(u'p) = (a'x)(u'p') = 0,$$

so hat die gesuchte Gerade die Gleichung

$$(ax_1)(a'x_2)(pp'y_1'y_2') = 0,$$

oder auch, da man wegen der Aequivalenz beider Symbolpaare a mit a' *und zugleich* p mit p' vertauschen darf, und da

$$(pp'y_1'y_2') = -(p'py_1'y_2')$$

ist, die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\{(ax_1)(a'x_2) - (ax_1)(a'x_2)\}(pp'y_1'y_2') = 0;$$

oder endlich, wenn u_1 und u_2 zwei Ebenen bedeuten, die die Gerade $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{x_1}^{x_2} = \mathfrak{X}_{u_1}^{u_2}$ enthalten, die gesuchte Gerade hat die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(aa'u_1u_2)(pp'y_1'y_2') = 0 \text{ *}). \tag{22}$$

Gehen wir jetzt zu Liniencoordinaten über, so folgt, dass die Collineation S in solchen dargestellt wird durch eine Gleichung der Form

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_a^{a'}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}_p^{p'}\mathfrak{Y}') = 0; \tag{23}$$

d. h. betrachten wir in dieser Gleichung, deren linke Seite

$$\tfrac{1}{2}\{(a_0a_1' - a_1a_0')\mathfrak{X}_{01} + \cdots + (a_2a_3' - a_3a_2')\mathfrak{X}_{23} + \cdots\}$$
$$\cdot\{(p_0p_1' - p_1p_0')\mathfrak{Y}_{23}' + \cdots + (p_2p_3' - p_3p_2')\mathfrak{Y}_{01}' + \cdots\}$$

nach der angegebenen Regel $a_ip_k = a'_ip'_k = \gamma_{ik}$ leicht ausgerechnet werden kann, die Gerade $\mathfrak{X}$ als gegeben, die Gerade $\mathfrak{Y}'$ als veränderlich,

*) Der durch die Rechnung eingeführte Factor $\frac{1}{2}$, der natürlich unterdrückt werden könnte, wird aus Zweckmässigkeitsgründen beibehalten.

so ist der Ort dieser Geraden $\mathfrak{Y}'$ die durch $\mathfrak{X}\{S\}\mathfrak{X}'$ bestimmte Gerade $\mathfrak{X}'$. Die Coordinaten der Geraden $\mathfrak{X}'$ werden also schliesslich

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}'_{01} &= (\gamma_{00}\gamma_{11} - \gamma_{01}\gamma_{10})\mathfrak{X}_{01} + \cdots \\ &\quad + (\gamma_{20}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{30})\mathfrak{X}_{23} + \cdots, \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{X}'_{23} &= (\gamma_{02}\gamma_{13} - \gamma_{03}\gamma_{12})\mathfrak{X}_{01} + \cdots \\ &\quad + (\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32})\mathfrak{X}_{23} + \cdots, \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Man wird diese Gleichungen natürlich auch ohne alle Symbolik leicht herleiten können; sie haben aber eine weniger einfache Gestalt als die mit ihnen völlig äquivalente symbolische Gleichung (23), deren concise Form und durchsichtiges Bildungsgesetz eine leichtere Handhabung in der Rechnung ermöglicht.

In derselben Weise verfahren wir ferner, wenn es sich um eine *Darstellung der Collineation S in Ebenencoordinaten* handelt. Wir betrachten die Ebene u als gegeben durch drei ihrer Punkte, $u = \overset{\frown}{x_1 x_2 x_3}$ (s. S. 127). Die durch $u\{S\}u'$ bestimmte Ebene u' ist dann die Verbindungsebene der drei Punkte, deren Gleichungen sind

$$(v' x'_k) = (a x_k)(v' p) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3);$$

sie wird also dargestellt durch die Gleichung

$$(a x_1)(a' x_2)(a'' x_3)(p p' p'' y') = 0,$$

wofür wir, unter Verwendung der Vertauschbarkeit der vermöge

$$(a x)(u' p) = (a' x)(u' p') = (a'' x)(u' p'')$$

äquivalenten Symbolpaare $a_i p_k$, $a'_i p'_k$, $a''_i p''_k$ auch schreiben können

$$\tfrac{1}{6}\,|\,(a x_1)(a' x_2)(a'' x_3)\,|\,(p p' p'' y') = 0.$$

Der Determinantenfactor links hat vermöge $u = \overset{\frown}{x_1 x_2 x_3}$ den Werth $(a a' a'' u)$ (s. oben Nr. 5); wir erhalten also schliesslich die Gleichung

$$\tfrac{1}{6}(a a' a'' u)(p p' p'' y') = 0, \tag{24}$$

die als Ort des Punktes y' *die* Ebene u' definirt, die der Ebene u durch die Collineation S zugeordnet wird, oder, bei gegebenem y' und veränderlichem u, als Ort der Ebene u *den* Punkt y, der aus y' durch die entgegengesetzte Collineation S^{-1} hervorgeht.

Endlich bilden wir, mit Hülfe von vier Systemen gleichwerthiger Symbole, in derselben Weise den Ausdruck der *Discriminante der Collineation S*, d. h. der Determinante des Gleichungssystems (19) oder der bilinearen Form (20), mit deren Hülfe wir die Collineation S dargestellt hatten:

(25) $$D = \tfrac{1}{24}(aa'a''a''')(pp'p''p''') = |\gamma_{ik}|\ ^*).$$

Correlationen.

In ähnlicher Weise wie die Collineationen stellen wir ferner die Correlationen analytisch dar. Zunächst wird eine *Correlation* S als Zuordnung von Ebenen zu Punkten, oder *als Punkt-Ebenentransformation* dargestellt durch ein Gleichungssystem analog den Gleichungen (19)

(26) $$u_i' = c_{i0}x_0 + c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

mit von Null verschiedener Determinante; wenn wir dann, wie oben, γ_{ki} an Stelle von c_{ik} schreiben, und beide Seiten der Gleichungen (26) mit den Coordinaten y_i' eines unbestimmten Punktes y' multipliciren, und die Summe gleich Null setzen, erhalten wir die Darstellung derselben Correlation durch eine gleich Null gesetzte *bilineare Form mit zwei Reihen von Punktcoordinaten*

(27) $$\Sigma\gamma_{ik}x_iy_k' = 0.$$

Dieselbe Gleichung stellt, wenn man den Punkt y' als gegeben, x als veränderlich betrachtet, die entgegengesetzte Correlation S^{-1}, und zwar ebenfalls als Punkt-Ebenentransformation dar. Die linke Seite von (27) lässt sich wiederum, symbolisch, als Product zweier linearer Factoren schreiben:

$$\Sigma\gamma_{ik}x_iy_k' = (ax)(by');$$

daraus ergiebt sich eine *Darstellung der Correlation S als Zuordnung zwischen Geraden* (oder Gewinden):

(28) $$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_a^{a'}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}_b^{b'}\mathfrak{Y}') = 0;$$

d. h.
$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{01}' &= (\gamma_{02}\gamma_{13} - \gamma_{03}\gamma_{12})\mathfrak{X}_{01} + \cdots \\ &\quad + (\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32})\mathfrak{X}_{23} + \cdots, \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{X}_{23}' &= (\gamma_{00}\gamma_{11} - \gamma_{01}\gamma_{10})\mathfrak{X}_{01} + \cdots \\ &\quad + (\gamma_{20}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{30})\mathfrak{X}_{23} + \cdots, \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Dieselbe Correlation ferner wird *als Ebenen-Punkttransformation* dargestellt durch die Gleichung

(29) $$\tfrac{1}{6}(aa'a''u)(bb'b''v') = 0,$$

endlich ihre *Discriminante* durch den Ausdruck

(30) $$D = \tfrac{1}{24}(aa'a''a''')(bb'b''b''') = |\gamma_{ik}|.$$

*) Auf den aus (6) sich ergebenden Zusammenhang der Formen (24), (25) mit den durch Wiederholung der Collineation S entstehenden bilinearen Formen und deren linearen Invarianten einzugehen haben wir keine Veranlassung. Man vergleiche darüber Clebsch und Gordan, Math. Ann. Bd. I S. 359 u. ff.

Wir übergehen die hier anzuschliessenden Ausdrücke für die Zusamensetzung mehrerer Collineationen und Correlationen, und ebenso auch eine Reihe von weiteren Sätzen, die bei einem näheren Eingehen auf die Theorie der Collineationen und Correlationen anzuführen wären, hier aber entbehrt werden können. — Wir wenden uns zur Untersuchung einiger besonderer Fälle.

Alternirende bilineare Formen.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass die betrachtete, zu einer *Correlation* gehörige bilineare Form *alternirend* ist. Wir nehmen an, es sei, für alle Werthsysteme x_i, y_k

$$(31) \qquad (ax)(by) + (ay)(bx) = 0;$$

d. h., wir nehmen an, es sei

$$\gamma_{01} = a_0 b_1 = -a_1 b_0 = -\gamma_{10}, \quad \gamma_{23} = a_2 b_3 = -a_3 b_2 = -\gamma_{32}, \text{ u. s. w.}$$

Führen wir dann für γ_{01} die neue Bezeichnung $\mathfrak{P}_{23}$ und für γ_{23} die neue Bezeichnung $\mathfrak{P}_{01}$ ein, so können wir schreiben

$$(32) \qquad (\mathfrak{P}\mathfrak{X}_x^y) = (ax)(by) = -(ay)(bx):$$

der Ausdruck stellt, gleich Null gesetzt, von Neuem das oben schon betrachtete *Nullsystem* (Nr. 15) dar. Aus den Gleichungen (28) und (29), die zeigen, wie zu einer Geraden oder Ebene die zugeordnete Gerade und der zugeordnete Punkt gefunden werden können, müssen also jetzt die früher aufgestellten einfacheren Gleichungen (18) und (16) sich ableiten lassen, die im vorliegenden Falle Dasselbe leisten.

Wir wollen die hierzu nöthigen Umformungen, da sie für einen in der symbolischen Rechnungsweise nicht geübten Leser wohl nicht ganz auf der Hand liegen, wirklich ausführen.

Wir setzen zunächst zur Abkürzung

$$(33) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{2}(aba'b') = \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{12},$$

und erhalten dann durch Entwickelung des Products $(aba'b')(xx'yy')$ nach Nr. (6) die Identität:

$$\begin{aligned}
&(ax)(bx') \cdot (a'y)(b'y') - J \cdot (xx'yy') = \\
&= (ax)(by) \cdot (a'x')(b'y') - (ax)(by') \cdot (a'x')(b'y) = \\
&= \tfrac{1}{2}\{(ax)(a'x') - (ax')(a'x)\}\{(by)(b'y') - (by')(b'y)\}.
\end{aligned}$$

Führen wir jetzt statt der nur in den Verbindungen $x_i x_k' - x_k x_i'$, $y_i y_k' - y_k y_i'$ auftretenden Punktcoordinaten Liniencoordinaten ein, so findet sich:

$$(34) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_a^{a'}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}_b^{b'}\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{P}_a^b\mathfrak{X}) \cdot (\mathfrak{P}_a^b\mathfrak{Y}) - J \cdot (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}).$$

Hier ist die linke Seite der unter (28) aufgeführte symbolische Ausdruck, die rechte unterscheidet sich von dem Ausdruck $(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y})$ unter (18) nur um den Factor J, der, wie wir sogleich sehen werden, zugleich mit der Discriminante D (Nr. 30) von Null verschieden ist.

Um ferner den Uebergang von der Formel (29) zu der Nr. (16) herzustellen, formen wir, unter Verwendung der Identität (7), das Product $(aa'a''u)(bb'b''v)$ um, indem wir an Stelle von u in den ersten Factor der Reihe nach b, b', b'', v eintreten lassen. Es ergiebt sich dann, bei gehöriger Berücksichtigung von Nr. (31), zunächst

$$2(aa'a''u)(bb'b''v) = 3(aa'a''b)(b'b''uv).$$

Durch erneute Anwendung derselben Identität folgt dann, wenn man rechts das Symbol b' in den anderen Factor eintreten lässt,

$$4(aa'a''b)(b'b''uv) = (aba'b')(a''b''uv).$$

Beide Gleichungen geben verbunden:

$$(35) \qquad \tfrac{1}{6}(aa'a''u)(bb'b''v) = J \cdot \tfrac{1}{2}(abuv),$$

womit die gewünschte Reduction geleistet wird. Setzt man beiderseits a''' an Stelle von u und b''' an Stelle von v, so folgt schliesslich noch

$$(36) \qquad D = \tfrac{1}{2^4}(aa'a''a''')(bb'b''b''') = J^2,$$

eine in der ausgerechneten Form

$$(36) \qquad |\mathfrak{P}_{ik}| = (\mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{23} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{31} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{12})^2$$

wohlbekannte Identität.

Die Ausdrücke (28), (29), (30) werden also, wenn $(ax)(by)$ eine alternirende Form ist, sämmtlich *reducibel*, sie lassen sich ausdrücken durch einfacher gebildete Grössen (die, wie jene, Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe sind).

Die quadratische Form $(u\lambda)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Neben den alternirenden bilinearen Formen mit Veränderlichenpaaren (x, y) oder (u, v) nehmen in der allgemeinen Formentheorie eine ausgezeichnete Stellung ein die *symmetrischen* bilinearen Formen, die, deren Coefficienten γ_{ik} den Gleichungen $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ genügen. Sie sind den alternirenden insofern analog, als auch sie, so lange ihre Discriminante nicht verschwindet, gleich Null gesetzt, involutorische Correlationen bedeuten, solche, die nach zweimaliger Ausführung die identische Transformation hervorbringen. Es sind das die in der Geometrie unter dem Namen von *Polarsystemen* auftretenden Correlationen, die mit den nicht ausgearteten Flächen zweiten Grades verbunden sind. In unserer Untersuchung aber haben wir mit symmetrischen Formen

dieser allgemeinen Art Nichts zu thun: Nur eine specielle Form, und zwar eine solche von verschwindender Discriminante werden wir zu betrachten haben, nämlich die in Ebenencoordinaten bilineare Form

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 ,$$

über deren Eigenschaften wir daher noch Einiges hinzufügen wollen.

Zunächst können wir auch diese bilineare Form symbolisch darstellen, und zwar als Product zweier linearer Formen mit gleichen Coefficienten: *Wir setzen*

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = (u\lambda)(v\lambda) ,$$

und bestimmen demgemäss, dass die Producte zweiten Grades der Symbole λ_i nach folgender Regel durch Zahlenwerthe ersetzt werden sollen:

$$\lambda_0^2 = 0, \quad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1, \quad \lambda_i \lambda_k = 0 \qquad (i \neq k) .$$

Bei Darstellung gewisser mit der angeführten Form verbundener anderer Formen (Covarianten) bedienen wir uns, zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten, wie oben, verschiedener Symbole λ_i, λ_i', λ_i'', ... die einzeln nur im zweiten Grade, in den Verbindungen $\lambda_i \lambda_k$ u. s. w. zugelassen werden, und die in den ausgerechneten Ausdrücken sämmtlich nach der angegebenen Regel durch Zahlen zu ersetzen sind.

Wir führen die Werthe an, die durch Ausrechnung der aus (28) und (29) durch Specialisirung hervorgehenden Formen

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_\lambda^{\lambda'} x)(\mathfrak{P}_\lambda^{\lambda'} y), \qquad \tfrac{1}{6}(\lambda\lambda'\lambda'' x)(\lambda\lambda'\lambda'' y)$$

sich ergeben; daneben führen wir noch eine kürzere Bezeichnungsweise ein, die wir in der Folge überall da verwenden werden, wo die symbolische Bezeichnungsart sich ohne Unbequemlichkeit vermeiden lässt.

(37) $$(u \mid v) = (u\lambda)(v\lambda) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \text{ *)},$$

(38a)

$$(\mathfrak{P}_x^{x'} \mid \mathfrak{P}_y^{y'}) = (xx' \mid yy') = \tfrac{1}{2}(\lambda\lambda' x x')(\lambda\lambda' y y') =$$
$$= \Sigma (x_0 x_1' - x_1 x_0')(y_0 y_1' - y_1 y_0'),$$

(38b)

$$(\mathfrak{P}_x^{x'} \mid \mathfrak{P}_v^{v'}) = (xx' \mid vv') = (\lambda\lambda' x x')(v\lambda)(v'\lambda') =$$
$$= \Sigma (x_0 x_1' - x_1 x_0')(v_2 v_3' - v_3 v_2'),$$

(38c)

$$(\mathfrak{P}_u^{u'} \mid \mathfrak{P}_v^{v'}) = \tfrac{1}{2}\{(u\lambda)(u'\lambda') - (u'\lambda)(u\lambda')\}\{(v\lambda)(v'\lambda') - (v'\lambda)(v\lambda')\}$$
$$= (u \mid v) \cdot (u' \mid v') - (u \mid v') \cdot (u' \mid v),$$

*) Das Zeichen | ist in ähnlichem Sinne, aber in geringerer Ausdehnung von H. Grassmann gebraucht worden. $(u \mid v)$ kann gelesen werden „u in v“.

(38) $$\tfrac{1}{6}(\lambda\lambda'\lambda''x)(\lambda\lambda'\lambda''y) = (lx)\cdot(ly) \quad \text{(Nr 2)}.$$

Die Summenzeichen in den Formeln (38) beziehen sich auf die cyclischen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3; der Inhalt dieser Formeln selbst kann da, wo es nicht nöthig ist, die Entstehung der darin auftretenden Symbole gerader Linien sichtbar zu machen, einfacher ausgedrückt werden durch die eine Formel

(39) $$\begin{aligned}(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_\lambda^{\lambda'}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}_\lambda^{\lambda'}\mathfrak{Y}) = \\ &= \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{03}.\end{aligned}$$ (Vgl. Nr. 8—13.)

Die *geometrische Bedeutung* des Verschwindens dieser Ausdrücke liegt auf der Hand: $(u\,|\,v) = 0$ besagt, dass die Ebenen u, v auf einander senkrecht stehen, ebenso $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) = 0$, dass die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ einander rechtwinklig kreuzen (oder schneiden). Ist, im ersten Falle, die eine der betrachteten Ebenen die unendlich ferne, so ist die Bedingung der Orthogonalität identisch erfüllt: Es besteht, für alle Werthe der Grössen u_i, die Gleichung

(40) $$(l\,|\,u) = (l\lambda)(u\lambda) = 0;$$

ebenso verschwindet der Ausdruck (38) identisch, wenn eine der Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ uneigentlich ist, der unendlich fernen Ebene angehört.

Die durch die Coordinaten der uneigentlichen Ebene $(lx) = 0$ und sonst nur durch die Coordinaten imaginärer Ebenen erfüllte Gleichung $(u\,|\,u) = 0$ stellt eine in der unendlich fernen Ebene gelegene Curve, den *absoluten Kegelschnitt* oder „unendlich fernen Kugelkreis“ dar.

Wir fügen noch zwei bei einigen Rechnungen nützliche Umformungen hinzu:

(41) $$\tfrac{1}{2}(\lambda\lambda'\lambda''x)(u\lambda)(\lambda'\lambda''yz) = -(lx)\cdot\{(ly)(uz) - (lz)(uy)\},$$

(42) $$(\lambda\lambda'\lambda''x)(u\lambda)(v\lambda')(w\lambda'') = (lx)\cdot(uvwl),$$

endlich die folgenden leicht abzuleitenden Identitäten

(43) $$(u_1u_2u_3l)(v_1v_2v_3l) - |(u_1\,|\,v_1)(u_2\,|\,v_2)(u_3\,|\,v_3)| = 0,$$

(44) $$\begin{aligned}&(u_2u_3u_4l)(u_1\,|\,v) - (u_3u_4u_1l)(u_2\,|\,v) + \\ &+ (u_4u_1u_2l)(u_3\,|\,v) - (u_1u_2u_3l)(u_4\,|\,v) = 0.\end{aligned}$$

Allgemeines. Cogredienz und Contragredienz.

Hiermit sind wir im Besitze der Mehrzahl der Begriffe und Bezeichnungen, die in den nächstfolgenden Untersuchungen zu verwenden sein werden. Es dürften aber, bevor wir zu Anwendungen übergehen, wohl noch einige erläuternde Bemerkungen am Platze sein.

Wir hatten die Collineationen und Correlationen im Raume dar-

gestellt durch gleich Null gesetzte sogenannte quaternäre (d. h. zwei Reihen von je vier Coordinaten x_i, u_i, oder x_i, y_i, oder endlich u_i, v_i enthaltende) bilineare Formen. Daraus folgt, dass die Zuordnung zwischen der Collineation $(ax)(up) = 0$ z. B. und der entsprechenden bilinearen Form $(ax)(up)$ unendlich-vieldeutig ist, indem nämlich jede Form, die von der angegebenen sich nur um einen Zahlenfactor unterscheidet, zu der Collineation $(ax)(up) = 0$ in derselben Beziehung steht, wie die Form $(ax)(up)$ selbst*). Es wird auch umgekehrt der bilinearen Form selbst eine geometrische Bedeutung nicht zukommen: wollte man eine solche haben, so müsste man einen Raum von vier Dimensionen zu Hülfe nehmen. Es hat daher auch bei den geometrischen Anwendungen, die wir hier im Auge haben, im Allgemeinen keinen Sinn, solche Verbindungen wie die Summe zweier bilinearer Formen mit von einander unabhängigen Coefficienten zu betrachten, während der durch Zusammensetzung („Composition", „Multiplication") aus zwei bilinearen Formen $(ax)(up)$, $(bx)(uq)$, entstandenen Form $(ax)(bp)(uq)$, nachdem man auch sie gleich Null gesetzt hat, eine solche Bedeutung zukommt: Die (projective) Geometrie des *dreifach* ausgedehnten Raumes enthält nur ein unvollständiges Bild der algebraischen Theorie der quaternären bilinearen Formen, die sich durch Specialisirung der von Frobenius und Anderen für den Fall einer unbestimmten Zahl von Veränderlichen ausgebildeten Theorie der bilinearen Formen ergiebt.

Ein Umstand, auf den wir hier schon die Aufmerksamkeit zu lenken wünschen, ist nun der, dass man gleichwohl unter besonderen Umständen auch quaternären bilinearen Formen selbst, und daher auch den Summen solcher Formen eine geometrische Deutung unterlegen kann: Man kann erstens unter geeigneten Voraussetzungen die im Allgemeinen mehrdeutige Beziehung zwischen Transformation und Form durch eine eindeutige ersetzen, zweitens kann man aber auch den bilinearen Formen geometrische Figuren anderer Art (also nicht Correlationen oder Collineationen) zuordnen, die dann eine geometrische Deutung auch der Addition solcher Formen ermöglichen. Wir werden namentlich sehen, dass die oben betrachteten alternirenden Formen, oder, was im Wesentlichen Dasselbe ist, die in Liniencoordinaten linearen Formen, und deren Addition, solche geometrische Deutungen in den Figuren und Constructionen finden, die wir in unserem ersten Abschnitt betrachtet haben.

---

*) Wir haben uns also oben nicht ganz genau ausgedrückt, wenn wir von *der* Discriminante einer Collineation redeten.

Das Auftreten zweier verschiedenartiger Systeme von vier Grössen, von denen die einen als Coordinaten von Punkten, die anderen als Coordinaten von Ebenen gedeutet werden, bezeichnet man in der projectiven Geometrie als *Contragredienz*, und man unterscheidet dem entsprechend zuweilen z. B. die durch die Gleichungen $(ax)(up) = 0$ und $\frac{1}{6}(aa'a''u)(pp'p''x) = 0$ dargestellten Transformationen als *contragrediente Transformationen*. Es kommt in dieser Unterscheidung nur die Thatsache zum Ausdruck, dass eine und dieselbe Collineation oder Correlation durch verschiedene Formeln dargestellt wird, je nachdem man sie auf Punkte oder Ebenen anwendet. Da man ebensowohl auch Linien und Gewinde, und weiter auch Curven und Flächen (oder die Coefficienten ihrer Gleichungen) diesen geometrisch definirten Transformationen unterwerfen kann, so scheint es uns für unsere Zwecke einfacher, die geometrische Ausdrucksweise auch in der Algebra festzuhalten, und von einer einzigen Transformation zu reden, die auf verschiedenartige Raumelemente angewendet wird. Welcher Natur diese Raumelemente sind, Punkte, Ebenen oder Gewinde, das zeigen in jedem Falle die Formeln selbst, durch die Bezeichnung der in sie eintretenden Veränderlichen.

§ 17.

Maassfunctionen.

Im gegenwärtigen Paragraphen stellen wir eine Reihe von Ausdrücken zusammen, die, wie die Entfernung zweier Punkte, der Winkel zweier Ebenen u. s. w. ihrem Begriffe nach absolute Bewegungsinvarianten sind, d. h. die sich nicht ändern, wenn man die betrachteten Figuren einer beliebigen Bewegung unterwirft, wie sie durch die üblichen Formeln für die Transformation rechtwinkliger Coordinaten dargestellt wird. Diese Ausdrücke unterscheiden sich — soweit sie bisher überhaupt betrachtet worden sind — von solchen, die man in Lehrbüchern der analytischen Geometrie findet, nur formal durch den Gebrauch der in § 1 eingeführten Zeichen, die einem mit der Invariantentheorie vertrauten Leser die Unveränderlichkeit der betrachteten Ausdrücke gegenüber Bewegungen auch äusserlich in Evidenz setzen. Die benutzten Zeichen aber haben wir in § 1 in der Weise erklärt, dass sie jederzeit durch entwickelte, die einzelnen Coordinaten sichtbar machende Ausdrücke ersetzt werden können. Vollständigkeit streben wir, wie ausdrücklich bemerkt sein möge, nicht an; wir wollen uns jedoch, da uns einige Ergänzungen der bekannten Formeln wünschenswerth erscheinen, und da wir uns auf diese Ergänzungen wohl

auch noch bei anderen Gelegenheiten zu beziehen haben werden, nicht genau an das binden, was für unsere besonderen Zwecke durchaus unentbehrlich ist*).

Die Entfernung zweier Punkte x, y,

genauer, die Entfernung des Punktes y vom Punkte x, ist gegeben durch den Ausdruck (vgl. § 16, Nr. 38a):

$$(1) \qquad \overline{xy} = -\overline{yx} = \frac{\sqrt{xy \mid xy}}{(lx)(ly)}. \quad **)$$

Die Entscheidung über den Wurzelwerth $\sqrt{xy \mid xy}$, der positiv oder negativ sein darf, entscheidet über die positive Richtung der Verbindungslinie der durch ihre Coordinaten gegebenen Punkte x und y: Es wird dadurch diese Gerade in einen Speer verwandelt, und damit wird über das positive oder negative Vorzeichen von $\overline{xy}$ entschieden. Sind auf derselben Geraden zwei andere Punkte x', y' gegeben, so lässt sich deren Entfernung *rational* ermitteln. Das Product der beiden zugehörigen Wurzelwerthe ist nämlich eine rational-bekannte Grösse: Man kann bestimmen, dass (auch dem Vorzeichen nach)

$$\sqrt{xy \mid xy}\sqrt{x'y' \mid x'y'} = (xy \mid x'y')$$

sein soll; man erreicht damit, dass die Entfernungen $\overline{xy}$ und $\overline{x'y'}$ auf demselben Speer gemessen werden. Die letzte Formel ist ein besonderer Fall der folgenden wohl ohne Weiteres verständlichen Gleichung

$$(2) \qquad \overline{xy} \cdot \overline{x'y'} \cdot \cos \operatorname{ang} (\mathfrak{P}_x^y \mathfrak{P}_{x'}^{y'}) = \frac{(xy \mid x'y')}{(lx)(ly)(lx')(ly')},$$

in der die Coordinaten von irgend vier eigentlichen Punkten vorkommen.

Der Abstand eines Punktes x von einer Ebene u.

$$(3) \qquad \operatorname{dist}(u, x) = -\operatorname{dist}(x, u) = \frac{(ux)}{\sqrt{u \mid u} \cdot (lx)}.$$

Durch Festlegung der Wurzelgrösse $\sqrt{u \mid u}$ wird die Ebene orien-

*) Einer in gewissem Sinne *vollständigen* Aufzählung der hier in Betracht kommenden metrischen Ausdrücke, wie sie für eine Dimension weniger vom Verfasser gegeben worden ist (Leipz. Ber. 1896, S. 659), müsste nämlich eine erschöpfende Aufzählung der ganzen algebraischen Bewegungsinvarianten vorausgehen, die in einem unbegrenzten System von Punkten, Geraden und Ebenen (d. h. im System der entsprechenden linearen Formen) vorkommen. Vgl. S. 122.

**) Wir schreiben $\sqrt{xy \mid xy}$ für $\sqrt{(xy)(xy)}$, da das Wurzelzeichen die Klammer entbehrlich macht.

tirt, es wird jeder ihrer Normalen eine bestimmte positive Richtung beigelegt.

Die Senkrechte vom Punkte x auf die Ebene u, deren Gleichung ist

$$(4) \qquad (u\,|\,xyy') = (u\lambda)(xyy'\lambda) = 0,$$

durchdringt die Ebene u in einem Punkte x_1, dessen Gleichung $(vx_1) = 0$ gegeben ist durch

$$(5) \qquad (vx_1) = (ux)(u\,|\,v) - (u\,|\,u)(vx).$$

Die Entfernung $\overline{x_1x}$ des Punktes x vom *Fusspunkte* x_1 des Lothes (4) wird dann, auch dem Vorzeichen nach, gleich der Entfernung $\mathrm{dist}\,(u, x)$ des Punktes x von der Ebene u, wenn man zwischen den beiden in Betracht kommenden Irrationalitäten die Abhängigkeit

$$\sqrt{x_1x\,|\,x_1x} = \sqrt{u\,|\,u}\cdot(lx)$$

annimmt. Zur Ableitung der durch Quadriren beider Seiten dieser Gleichung entstehenden Identität, auf Grund deren eben die genannte Abhängigkeit erklärt werden kann, benutze man die Formel (41) des vorigen Paragraphen.

Der Winkel zweier Ebenen u, v.

Die einfachsten goniometrischen Functionen dieses Winkels $(u, v) = -(v, u)$ werden gegeben durch die Ausdrücke

$$(6) \qquad \cos(u, v) = \frac{(u\,|\,v)}{\sqrt{u\,|\,u}\sqrt{v\,|\,v}},$$

$$(7) \qquad \sin(u, v) = \frac{\sqrt{(u\,|\,u)(v\,|\,v) - (u\,|\,v)^2}}{\sqrt{u\,|\,u}\sqrt{v\,|\,v}},$$

$$(8) \qquad \mathrm{tg}\,(u, v) = \frac{\sqrt{(u\,|\,u)(v\,|\,v) - (u\,|\,v)^2}}{(u\,|\,v)}.$$

Die Formel (6) zeigt, dass die Grösse $\cos(u, v)$ völlig bestimmt ist, sobald die beiden Ebenen u, v orientirt sind, die Formel (8), dass $\mathrm{tg}\,(u, v) = -\mathrm{tg}\,(v, u)$ von dieser Orientirung unabhängig ist, wohl aber abhängig von der Orientirung der Schnittlinie von u, v. — Sind u', v' zwei andere Ebenen derselben Axe, so lässt sich $\mathrm{tg}\,(u', v')$ *rational* bestimmen. Nachdem durch Entscheidung über $\sqrt{(u\,|\,u)(v\,|\,v) - (u\,|\,v)^2}$ ein Drehungssinn um die gemeinsame Schnittlinie der vier Ebenen u, v, u', v' als positiv bezeichnet ist, wird $\mathrm{tg}\,(u', v')$ auch dem Vorzeichen nach bestimmt. Man kann nämlich dann erklären, dass

$$\sqrt{(u\,|\,u)(v\,|\,v) - (u\,|\,v)^2}\cdot\sqrt{(u'\,|\,u')(v'\,|\,v') - (u'\,|\,v')^2} = \\ = (u\,|\,u')(v\,|\,v') - (u\,|\,v')(v\,|\,u')$$

sein soll. Die diese Gleichsetzung ermöglichende Identität ist ein besonderer Fall der allgemeineren Formel

$$\text{tg}(u, v) \cdot \text{tg}(u', v') \cdot \cos \text{ang}(\mathfrak{P}_u^v, \mathfrak{P}_{u'}^{v'}) = \frac{(u \mid u')(v \mid v') - (u \mid v')(v \mid u')}{(u \mid v) \cdot (u' \mid v')}, \tag{9}$$

die analog ist der oben aufgeführten Nr. (2)*).

Die Orientirung einer eigentlichen Geraden $\mathfrak{X}$

wird bewirkt durch Festlegung des Wurzelwerthes $\sqrt{\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}}$. Fügen wir diesen als Coordinate $\mathfrak{X}_0$ den Liniencoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ hinzu, so haben wir sieben Coordinaten des *Speeres*, die durch zwei quadratische Gleichungen

$$\mathfrak{X}_0^2 - \mathfrak{X}_{01}^2 - \mathfrak{X}_{02}^2 - \mathfrak{X}_{03}^2 = 0, \quad \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0$$

verbunden sind. Sind x, y zwei auf der Geraden des Speeres gelegene Punkte und u, v zwei diese Gerade enthaltende Ebenen, so ist sowohl die Entfernung $\overline{xy}$ als auch die Winkelfunction $\text{tg}(u, v)$ völlig, nämlich auf rationale Weise bestimmt: Beide Ausdrücke werden, wie die Gleichungen (38a) und (38c) des § 16 zeigen, gegeben durch die Formeln

$$\overline{xy} = \frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{P}_x^y)}{\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}} \cdot (lx) \cdot (ly)}, \tag{10}$$

$$\text{tg}(u, v) = \frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{P}_u^v)}{\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}} \cdot (u \mid v)}, \tag{11}$$

die beide nur die eine bereits erklärte Irrationalität $\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}}$ enthalten. Aber auch der Abstand eines auf dem Speere $\mathfrak{X}$ angenommenen Punktes x von einer zu $\mathfrak{X}$ senkrechten Ebene u ist eindeutig bestimmt: Man kann, unter der angegebenen Voraussetzung, erklären, dass

$$\sqrt{u \mid u}\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}\mathfrak{P}_l^u)$$

sein soll, und erhält dann für den genannten Abstand den Ausdruck

$$\text{dist}(u, x) = \frac{(ux) \cdot \sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_l^u) \cdot (lx)}. \tag{12}$$

Die Vorzeichen sind in diesen Formeln derart gewählt, dass der positiven Richtung der $\frac{x_1}{x_0}$-Axe als positiver Drehungssinn der von der

*) Man vergleiche wegen dieser und ähnlicher Formeln, auf die näher einzugehen wir keine Veranlassung haben, Baltzer's Determinanten (§ 16 der 4. Auflage).

positiven $\frac{x_2}{x_0}$-Axe nach der positiven $\frac{x_3}{x_0}$-Axe hin zugeordnet wird. Diese Festsetzung wird in allen folgenden Rechnungen festgehalten.

Der Winkel zweier Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Man hat, nach Analogie der Gleichungen (6 . . . 8), die Gleichungen

$$\cos \operatorname{ang} (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})}{\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}}\sqrt{\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}}}, \tag{13}$$

$$\sin \operatorname{ang} (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}}{\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}}\sqrt{\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}}}, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{ang} (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})}; \tag{15}$$

auch sind analoge Bemerkungen hinzuzufügen.

Der Winkel zwischen einer Ebene u und einer Geraden $\mathfrak{X}$.

Wir führen nur den Ausdruck für die Cotangente des genannten Winkels $(u, \mathfrak{X}) = -(\mathfrak{X}, u)$ an:

$$\operatorname{ctg} \operatorname{ang} (u, \mathfrak{X}) = \frac{\sqrt{(u \mid u)(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}) - (\mathfrak{X}\mathfrak{P}_l^u)^2}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_l^u)}. \tag{16}$$

Durch Festlegung der Wurzelgrösse im Zähler wird eine Gerade orientirt, die in u senkrecht zu $\mathfrak{X}$ gezogen ist.

Der Abstand einer Geraden $\mathfrak{X}$ von einem Punkte x.

Wir führen den weiterhin nicht zu benutzenden Ausdruck

$$\operatorname{dist} (x, \mathfrak{X}) = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_\lambda^x)^2}}{\sqrt{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}} \cdot (lx)} \tag{17}$$

nur als Seitenstück zu dem vorhergehenden auf. Man leitet ihn am schnellsten aus der weiterhin anzuführenden Formel für die Dreiecksfläche ab.

Der Abstand paralleler Ebenen.

Der Parallelismus zweier Ebenen u, v wird ausgedrückt durch das identische Verschwinden von $(luvw)$; wenn aber, wie hier, nur reelle Ebenen betrachtet werden, so genügt die eine Bedingungsgleichung

$$(u \mid u)(v \mid v) - (u \mid v)^2 = 0.$$

Man kann dann erklären, dass

$$\sqrt{u \mid u}\sqrt{v \mid v} = (u \mid v) \tag{18}$$

sein soll, und damit hat man die beiden Ebenen gleichartig orientirt. Für den Abstand der Ebene v von der Ebene u ergiebt sich nun, wenn o einen willkürlichen eigentlichen Punkt bedeutet, der Ausdruck

$$\text{dist}\,(u, v) = \frac{(uo)}{\sqrt{u \mid u} \cdot (lo)} - \frac{(vo)}{\sqrt{v \mid v} \cdot (lo)}. \tag{19}$$

Statt der beiden durch die Gleichung (18) verbundenen Irrationalitäten kann man hier in symmetrischer Weise eine einzige einführen; offenbar kann, wenn

$$(wx) = (uo)(vx) - (ux)(vo)$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{w \mid w} = (uo)\sqrt{v \mid v} - (vo)\sqrt{u \mid u} \tag{20}$$

erklärt werden; der Ausdruck (19) geht dann über in

$$\text{dist}\,(u, v) = \frac{\sqrt{w \mid w}}{(u \mid v) \cdot (lo)} = \\ = \frac{\sqrt{(uo)^2 \cdot (v \mid v) - 2(uo) \cdot (vo) \cdot (u \mid v) + (vo)^2 \cdot (u \mid u)}}{(u \mid v) \cdot (lo)}. \tag{21}$$

Lässt man den willkürlichen Punkt o mit dem Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten zusammenfallen, so kann der letzte Ausdruck so geschrieben werden:

$$\frac{\sqrt{(u_0 v_1 - u_1 v_0)^2 + (u_0 v_2 - u_2 v_0)^2 + (u_0 v_3 - u_3 v_0)^2}}{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}.$$

Man achte auf das Vorzeichen in der Gleichung (19): Der Ausdruck muss, wenn der Punkt o in der Ebene v angenommen wird, in den durch Nr. (3) erklärten Ausdruck für dist (u, o), nicht aber in den entgegengesetzten Werth dist (o, u) übergehen. Es ist also nicht erlaubt, an Stelle von (19) eine Definition zu geben, bei der die Ebenen u und v rechts ihre Stellen wechseln würden.

Sind die Ebenen u, v senkrecht zu einer im Voraus bekannten orientirten Geraden $\mathfrak{x}$, so wird der Abstand dist (u, v) eindeutig bestimmt:

$$\text{dist}\,(u, v) = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{P}_u^v) \cdot \sqrt{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{P}_l^u) \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{P}_l^v)}. \tag{22}$$

(Man vergleiche die Formeln Nr. 10, 11, 12.)

Die Dreiecksfläche.

Bezeichnen wir die Fläche des durch die Punkte x, y, z begrenzten ebenen Dreiecks mit $F(x, y, z)$, so ist

$$2F(x, y, z) = \frac{\sqrt{xyz \mid xyz}}{(lx)(ly)(lz)}. \tag{23}$$

Der Radicand im Zähler ist durch die Formel (3) des § 16 als $(xyz\lambda)^2$ erklärt. (Vgl. auch die Anmerkung auf Seite 143.) Ist $x'y'z'$ ein anderes Dreieck derselben Ebene, so kann

$$\sqrt{xyz\,|\,xyz}\sqrt{x'y'z'\,|\,x'y'z'} = (xyz\,|\,x'y'z')$$

erklärt werden, und damit erfolgt die Bestimmung jeder anderen Dreiecksfläche in derselben Ebene rational, und ebenso die Bestimmung der Fläche eines geradlinigen Polygons durch Addition der Flächen von Dreiecken, in die man das Polygon zerlegen kann.

Durch Festlegung des Wurzelwerthes im Zähler von (23) erfolgt die Orientirung der Ebene, in der das Dreieck liegt. Bezeichnen wir diese orientirte Ebene mit u, $\sqrt{u\,|\,u}$, und erklären wir gemäss der letzten Formel, dass dann

$$\sqrt{xyz\,|\,xyz}\sqrt{u\,|\,u} = (xyz\,|\,u) = (xyz\lambda)(u\lambda)$$

sein soll, so ergiebt sich für die Dreiecksfläche ein (nach Adjunction von $\sqrt{u\,|\,u}$) rationaler Ausdruck:

$$2F(x, y, z) = \frac{(xyz\,|\,u)}{(lx)(ly)(lz)\sqrt{u\,|\,u}}; \tag{24}$$

und durch diesen Ausdruck *muss* die Fläche des Dreiecks x, y, z erklärt werden, wenn man die an und für sich willkürliche, aber zweckmässige und auch allgemein übliche Festsetzung trifft, dass Dreiecke, die im positiven Sinne (in dem bereits erklärten positiven Drehungssinn der Winkel) umlaufen werden, eine positive Fläche erhalten.

In ähnlicher Weise ist die Dreiecksfläche rational zu erklären, wenn die Ebene u des Dreiecks auf einer durch Adjunction von $\sqrt{\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x}} = \sqrt{\xi\xi'\,|\,\xi\xi'}$ bereits orientirten Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{\xi}^{\xi'}$ senkrecht steht: Man findet für diesen Fall den Ausdruck

$$2F(x, y, z) = \frac{(l\xi)(xyz\xi') - (l\xi')(xyz\xi)}{(lx)(ly)(lz)\sqrt{\xi\xi'\,|\,\xi\xi'}}\ *). \tag{24b}$$

*) Der Leser möge sich nicht durch die herkömmliche Behandlungsweise solcher Dinge verleiten lassen, die Erörterung gewisser Wurzelgrössen, die zur Aufstellung der Formeln Nr. 10, 11, 12, 20, 22, 24 u. s. w. führt, für etwas Nebensächliches zu halten. Wenn man sich nicht von vorn herein Klarheit verschafft über die Abhängigkeit und die geometrische Bedeutung der Irrationalitäten, die schon bei den einfachsten Aufgaben auftreten, so vermag man nachher, wo diese Irrationalitäten vorkommen, nicht den kleinsten Schritt mit Sicherheit zu thun; eine Darstellung, bei der diese Abhängigkeiten nicht berücksichtigt werden, ist schlechthin *incorrect*. Leider wird diesem wichtigen Gegenstande, soweit der Verfasser es hat feststellen können, in Lehrbüchern der analytischen Geometrie nur sehr geringe Aufmerksamkeit zugewendet. Bringt man doch schon bei der Definition der sogenannten Normalform der Gleichung einer Ebene ganz unnöthiger Weise eine Discontinuität in die Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie.

Die Formeln (23) und (24) sind besondere Fälle der folgenden allgemeineren, die einer besonderen Erklärung wohl nicht bedürfen:

$$4F(x, y, z) \cdot F(x', y', z') \cdot \cos(\widehat{xyz}, \widehat{x'y'z'}) = \frac{(xyz \mid x'y'z')}{(lx)(ly)(lz)(lx')(ly')(lz')}, \tag{25}$$

$$2F(x, y, z) \cdot \cos(\widehat{xyz}, u) = \frac{(xyz \mid u)}{(lx)(ly)(lz)\sqrt{u \mid u}}. \tag{26}$$

Der Sinus eines durch drei Ebenen u, v, w begrenzten Dreiflaches.

Wir führen diese durch v. Staudt so benannte Grösse auf, gehen aber nicht ein auf ihre ja wohlbekannten Zerlegungen in ein Product gewöhnlicher Winkelfunctionen.

$$\mathrm{Sin}(u, v, w) = \frac{(luvw)}{\sqrt{u \mid u}\sqrt{v \mid v}\sqrt{w \mid w}}. \tag{27}$$

Diese Grösse $\mathrm{Sin}(u, v, w)$ ist also eine zweiwerthige Function, und sie wird eindeutig bestimmt erst, wenn man die drei Ebenen orientirt, oder wenigstens zwischen ihren Orientirungen eine geeignete Abhängigkeit festgesetzt hat.

Das Volumen des Tetraeders.

Wird mit $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$ das Volumen des Tetraeders bezeichnet, dessen Ecken die vier Punkte $x_1 \ldots x_4$ (mit den Coordinaten $x_{i0} \ldots x_{i3}$, $i = 1, 2, 3, 4$) sind, so ist, wie bekannt, und wie sich übrigens auch aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres ergiebt,

$$6V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 x_2 x_3 x_4)}{(lx_1)(lx_2)(lx_3)(lx_4)}. \tag{28}$$

Das Vorzeichen könnte an sich auch entgegengesetzt gewählt werden; bestimmt man es aber so, wie hier geschehen, so gelten die folgenden Regeln:

1) Nach beliebiger Orientirung der Ebene $x_1x_2x_3$ ist

$$6V = 2F(x_1, x_2, x_3) \cdot \mathrm{dist}(x_1\widehat{x_2x_3}, x_4).$$

2) Nach Orientirung der Kanten $\overrightarrow{x_1x_2}$, $\overrightarrow{x_3x_4}$ in dem durch die Pfeile angegebenen Sinne ist V positiv oder negativ, je nachdem der durch $\overrightarrow{x_3x_4}$ (bei Projection dieses Speeres auf eine zu x_1x_2 senkrechte Ebene) bestimmte Drehungssinn um $\overrightarrow{x_1x_2}$ der positive oder negative ist (*Möbius'sche Kantenregel*).

3) Nach beliebiger Orientirung der Kanten $\mathfrak{P}_{x_1}^{x_2}$ und $\mathfrak{P}_{x_3}^{x_4}$, sowie der gemeinsamen Normale dieser beiden Kanten ist

$$(29) \qquad 6V = -\overline{x_1 x_2} \cdot \overline{x_3 x_4} \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{P}_{x_1}^{x_2}, \mathfrak{P}_{x_3}^{x_4}) \cdot \sin \operatorname{ang}(\mathfrak{P}_{x_1}^{x_2}, \mathfrak{P}_{x_3}^{x_4}).$$

Natürlich gelten auch die Gleichungen, die sich hieraus durch Vertauschung zweier Ecken und gleichzeitigen Zeichenwechsel von V ergeben.

Ist das Tetraeder gegeben durch die den Ecken x_i gegenüberliegenden Seitenflächen u_i, so ist

$$(30) \qquad 6V(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{(u_1 u_2 u_3 u_4)^3}{(l u_2 u_3 u_4)(l u_3 u_4 u_1)(l u_4 u_1 u_2)(l u_1 u_2 u_3)}.$$

Eine absolute Bewegungsinvariante im System von vier Ebenen.

Entwickelt man das Product $(u_1 u_2 u_3 u_3)(x_1 x_2 x_3 x_4)$ nach Nr. 6, § 16, so ergiebt sich eine geometrische Deutung eines analog zu (28) gebildeten Ausdrucks

$$(31\,a) \qquad \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4}{6V} = \frac{(u_1 u_2 u_3 u_4)}{\sqrt{u_1 \mid u_1}\sqrt{u_2 \mid u_2}\sqrt{u_3 \mid u_3}\sqrt{u_4 \mid u_4}};$$

$h_1 \ldots h_4$ bedeuten hier die Längen der vier Höhen im Tetraeder, unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen. Eine andere geometrische Deutung desselben Ausdrucks ist enthalten in der sofort abzuleitenden Gleichung

$$(31\,b) \qquad \operatorname{Sin}(u_2, u_3, u_4) \cdot \operatorname{dist}(u_1, \overset{\frown}{u_2 u_3} u_4) = \frac{(u_1 u_2 u_3 u_4)}{\sqrt{u_1 \mid u_1}\sqrt{u_2 \mid u_2}\sqrt{u_3 \mid u_3}\sqrt{u_4 \mid u_4}};$$

eine dritte ergiebt sich aus der sogleich aufzustellenden Formel Nr. 33: Dividirt man, um rechts eine rationale Invariante zu erhalten, den betrachteten Ausdruck noch mit $\cos(u_1, u_2) \cdot \cos(u_3, u_4)$, so findet sich

$$(32) \qquad \begin{aligned} &-\operatorname{tg}(u_1, u_2) \cdot \operatorname{tg}(u_3, u_4) \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{P}_{u_1}^{u_2}, \mathfrak{P}_{u_3}^{u_4}) \cdot \sin \operatorname{ang}(\mathfrak{P}_{u_1}^{u_2}, \mathfrak{P}_{u_3}^{u_4}) = \\ &\qquad = \frac{(u_1 u_2 u_3 u_4)}{(u_1 \mid u_2)(u_3 \mid u_4)}. \end{aligned}$$

Man beachte die zwischen den Ausdrücken (29) und (32) stattfindende formale Analogie. (Vgl. auch § 19, Nr. 36.)

Der (kürzeste) Abstand von zwei nicht parallelen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Die Formel (29) liefert nach leichter Umgestaltung den Ausdruck für den Abstand der Geraden $\mathfrak{Y}$ von der Geraden $\mathfrak{X}$:

$$(33) \qquad \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = -\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{\sqrt{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}}.$$

Die hier auftretende Quadratwurzel ist dieselbe wie in der Gleichung (15); nachdem man also einmal über den Zusammenhang zwischen Richtung einer Geraden und Drehungssinn um die Gerade entschieden hat, ist nur in einer von beiden Formeln das Zeichen der Wurzel willkürlich, was gelegentlich schon ausser Acht gelassen worden ist. Sind die Geraden $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zu einer schon orientirten Geraden $\mathfrak{z}$ senkrecht, so sind beide Grössen tg ang $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und dist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ rational zu erklären. Wir führen, um diese und einige andere Formeln einfach darstellen zu können, noch einige *neue Bezeichnungen* ein, für Grössen, deren nähere Betrachtung wir bis zum nächsten Paragraphen verschieben wollen, um hier die Entwickelung nicht unterbrechen zu müssen.

Wir setzen, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Zeichen für irgend drei Gerade oder auch Gewinde sind, (d. h. wenn $\mathfrak{x}_{ik}$ u. s. w. deren Coordinaten bedeuten):

$$(34) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{01} & \mathfrak{x}_{02} & \mathfrak{x}_{03} \\ \mathfrak{y}_{01} & \mathfrak{y}_{02} & \mathfrak{y}_{03} \\ \mathfrak{z}_{01} & \mathfrak{z}_{02} & \mathfrak{z}_{03} \end{vmatrix},$$

$$(35) \qquad \begin{aligned} \{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\} = & \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{23} & \mathfrak{x}_{02} & \mathfrak{x}_{03} \\ \mathfrak{y}_{23} & \mathfrak{y}_{02} & \mathfrak{y}_{03} \\ \mathfrak{z}_{23} & \mathfrak{z}_{02} & \mathfrak{z}_{03} \end{vmatrix} + \\ + & \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{01} & \mathfrak{x}_{31} & \mathfrak{x}_{03} \\ \mathfrak{y}_{01} & \mathfrak{y}_{31} & \mathfrak{y}_{03} \\ \mathfrak{z}_{01} & \mathfrak{z}_{31} & \mathfrak{z}_{03} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{01} & \mathfrak{x}_{02} & \mathfrak{x}_{12} \\ \mathfrak{y}_{01} & \mathfrak{y}_{02} & \mathfrak{y}_{12} \\ \mathfrak{z}_{01} & \mathfrak{z}_{02} & \mathfrak{z}_{12} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Seien nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ nicht parallele gerade Linien, und $\mathfrak{u}$ deren gemeinsame Normale, oder eine zu dieser parallele Gerade, so ist, wie man unschwer findet,

$$(36) \qquad \sqrt{(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})^2}\sqrt{\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{u}} = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{u})$$

zu erklären; die gesuchten Ausdrücke werden demnach

$$(37) \qquad \text{tg ang}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{u})}{(\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{y})\sqrt{(\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{u})}},$$

$$(38) \qquad \text{dist}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = -\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\sqrt{\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{u}}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{u})}.$$

Eine der Formel (9) analoge Gleichung lässt sich unschwer aufstellen.

Die gemeinsame Normale von zwei nicht parallelen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Die Gleichung $(\mathfrak{U}\mathfrak{Z}) = 0$ dieser Geraden in Liniencoordinaten wird, wenn $\mathfrak{Z}$ eine veränderliche Gerade bedeutet, dargestellt durch den gleich Null gesetzten Ausdruck

$$(39)\quad (\mathfrak{U}\mathfrak{Z}) = \{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2\}\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y})(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}).$$

(Vgl. Nr. 34, 35); es ist also, wenn $\mathfrak{U}$ auf diese Weise erklärt wird, $(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{U}\mathfrak{Y}) = 0$, $(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{Y}) = 0$, $(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}) = 0$, wie man leicht bestätigen kann. Es folgt daraus, dass

$$(40)\quad \sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}} = \{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2\}^{\frac{3}{2}}$$

erklärt werden kann, dass also in der That die Festlegung der rechts auftretenden Quadratwurzel die Orientirung der Geraden $\mathfrak{U}$ bewirkt.

Der Abstand paralleler Geraden.

Sind die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ parallel, so verschwindet die Covariante $(\mathfrak{U}\mathfrak{Z})$ identisch, und der Ausdruck (33) nimmt die unbestimmte Form $0:0$ an. Man kann in diesem Falle den Abstand der beiden Geraden auf mehrere Weisen ermitteln, z. B. indem man die eine mit einer willkürlichen Ebene zum Schnitt bringt, und den Abstand des Schnittpunktes von der anderen Geraden berechnet. Hier mag eine leicht elementar zu begründende Formel genügen. Wir setzen zur Abkürzung

$$(41)\quad \{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}\} = \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{12},\ ^*)$$

und finden:

$$(42)\quad \operatorname{dist}(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})\{\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}\} - 2(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})\{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}\} + (\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y})\{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}\}}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})}.$$

Man berücksichtige bei Aufstellung dieser Gleichung, dass bei parallelen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$

$$\sqrt{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}}\sqrt{\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}} = (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})$$

erklärt werden kann. Die Bedeutung der Irrationalität im Zähler von (42) liegt auf der Hand.

Sind die parallelen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ Normalen einer schon orientirten Geraden $\mathfrak{U}$, $\sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}}$, so muss der Abstand $\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ wieder rational erklärt werden. Man bezeichne mit $\mathfrak{Y}_1$ die gemeinsame Normale von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Y}$, deren Gleichung nach Nr. (39) ist $\{\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} = 0$. Es wird dann, nach Nr. (38),

*) Dieser Ausdruck ist im Allgemeinen keine Bewegungsinvariante.

$$\text{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \text{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1) = -\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1)\sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{U})},$$

oder, nach leichter Rechnung

$$\text{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{U}\}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})\sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}}}. \tag{43}$$

Der Sinus des durch drei Gerade (Speere) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bestimmten Dreikants.

$$\text{Sin}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})}{\sqrt{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}}\sqrt{\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}}\sqrt{\mathfrak{Z}\,|\,\mathfrak{Z}}}. \tag{44}$$

Man vergleiche hierzu die Formel Nr. (27). Das Dreikant ist nur seiner Gestalt nach bestimmt: sein Scheitel ist ein willkürlicher Punkt o.

§ 18.

Gewinde, Vectoren, Stäbe.

Wir nehmen nun die in § 16 abgebrochene Untersuchung der Gewinde oder linearen Liniencomplexe nochmals auf, um sie ein Stück weiter zu führen in der Richtung, die durch die fernerhin anzustellenden Betrachtungen über Stäbe, Keile, Quirle u. s. w. angezeigt wird. Einige Ueberlegungen, die zur Ergänzung des Inhalts der §§ 16 und 17 dienen, werden hier ihre Stelle finden. Endlich schliessen wir, nach Betrachtung der geometrischen Addition der Vectoren, hier eine analytische Darstellung der geometrischen Addition der Stäbe an. Diese Gegenstände werden auch in Lehrbüchern der Mechanik behandelt*); aber die Art, wie dies geschieht, giebt keinen geeigneten Unterbau ab für unsere weiteren Constructionen. Immerhin glauben wir mit Rücksicht darauf, dass wir zum Theil Bekanntes nur in neuer Form vorzutragen haben, uns kurz fassen zu dürfen: Der Leser, der die übliche Darstellung kennt, wird, wenn er sich den Inhalt der §§ 16 und 17 angeeignet hat, unserer Darlegung ohne Schwierigkeit zu folgen im Stande sein.

Das Gewinde.

Ein *Nullsystem* wird, nach § 16, auf zwei verschiedene Arten dadurch analytisch dargestellt, dass man die eine oder andere von zwei alternirenden bilinearen Formen gleich Null setzt. Wir bezeichnen diese beiden alternirenden Formen, von denen die eine die Coordinaten zweier

*) S. besonders Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. I.

Punkte x, y, und die andere die Coordinaten zweier Ebenen u, v enthält, mit

(1) $$(ax)(by) = -(ay)(bx),$$

(2) $$(up)(vq) = -(vp)(uq).$$

Das zugehörige *Gewinde*, gebildet von den *Leitlinien* des Nullsystems, wird dargestellt durch eine gleich Null gesetzte lineare Form in Liniencoordinaten; wir bezeichnen diese mit

(3) $$(\mathfrak{P}\mathfrak{X})$$

Der Forderung nun, dass diese drei Formen zu demselben Nullsystem und Gewinde gehören, wird man am einfachsten genügen, wenn man annimmt, dass

(4) $$\tfrac{1}{2}(abuv) = (up)(vq) = (\mathfrak{P}\mathfrak{X}_u^v),$$

woraus folgt, dass ebenso

(5) $$\tfrac{1}{2}(pqxy) = (ax)(by) = (\mathfrak{P}\mathfrak{X}_x^y).$$

Für die Invariante J des Nullsystems oder Gewindes, die wir als von Null verschieden annehmen, ergeben sich dann die Ausdrücke

(6) $$J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{8}(aba'b') = \tfrac{1}{4}(ap)(bq) = \tfrac{1}{8}(pqp'q').$$

Die Thatsache, dass die durch die Gleichungen $(ax)(by) = 0$, $(up)(vq) = 0$ dargestellte Correlation zweimal hinter einander angewendet zur Identität führt, wird auf verschiedene Weisen ausgedrückt durch jede der Gleichungen

(7) $$(ax)(bq)(up) = J \cdot (ux) = (bx)(ap)(uq),$$

(8) $$\tfrac{1}{6}(aa'a''u)(bb'b''v) = J \cdot \tfrac{1}{2}(abuv),$$

(9) $$\tfrac{1}{6}(pp''p''x)(qq'q''y) = J \cdot \tfrac{1}{2}(pqxy).$$

In Linien- oder Gewindecoordinaten wird die Correlation des Nullsystems dargestellt durch die Gleichungen

(10) $$J \cdot \{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y})\} = (\mathfrak{P}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{X}')(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}),$$

wenn man annimmt, dass diese identisch sind in Bezug auf die laufenden Liniencoordinaten $\mathfrak{Y}_{ik}$ (vgl. § 16, Nr. 18). In dieser bemerkenswerthen Form geschrieben sagt (10) zugleich aus, dass das Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}) = 0$ in einem Büschel liegt mit je zwei Gewinden $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$, $(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}) = 0$, insbesondere auch mit je zwei Geraden, die in Bezug auf das Nullsystem $(ax)(by) = 0$, $(up)(vq) = 0$ einander polar zugeordnet sind.

$J = 0$ sagt aus, dass das Nullsystem ausartet und dass das zugehörige Gewinde in ein *Liniengebüsch* übergeht, in die Gesammtheit aller Geraden, die eine (eigentliche oder uneigentliche) Gerade schneiden.

Man kann in diesem Falle auch, allerdings nicht ganz exact, sagen, das Nullsystem selbst gehe in diese Gerade über.

Mit jedem Nullsystem ist eine uneigentliche Gerade (gegenüber Aehnlichkeitstransformationen invariant) verbunden, die Gerade

$$(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{X}) = 0, \tag{11}$$

die Nebenaxe des Nullsystems. Diese Gerade, oder eigentlich das zugehörige Liniengebüsch, bestimmt mit dem Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$ selbst zusammengenommen ein *Büschel coaxialer Gewinde*, das noch eine zweite Gerade (ein zweites Liniengebüsch) enthält. Diese Gerade, nach Obigem die Polare der Nebenaxe in Bezug auf das Nullsystem, ist *die Hauptaxe des Nullsystems*; ihre Gleichung lautet

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{P})\cdot(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) - J\cdot(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{X}) = 0. \tag{12}$$

Beide gerade Linien, die Hauptaxe und die Nebenaxe bilden die Figur, die wir in unserem ersten Abschnitt als (eigentliches) *Linienkreuz* bezeichnet hatten; die *Querlinien* dieses Linienkreuzes, die natürlich Leitlinien des Nullsystems oder Gerade des zugehörigen Gewindes sind, bilden *das Normalennetz der Hauptaxe:*

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0, \quad (\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{X}) = 0. \tag{13}$$

Die bei einem (nicht ausgearteten) reellen Nullsystem stets endliche Grösse

$$\mathfrak{J} = \frac{J}{(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{P})} = \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{P})}{2(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{P})} \tag{14}$$

ist eine absolute Invariante des Nullsystems gegenüber der Gruppe der Bewegungen, bekannt unter dem Namen *Parameter des Nullsystems oder Gewindes.* Sie kann mit Hülfe der Formeln Nr. 15 und 33 des vorigen Paragraphen sofort in die Gestalt

$$\mathfrak{J} = -\frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{X})}{(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{X})} = \operatorname{dist}(\mathfrak{U},\mathfrak{X})\cdot\operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{U},\mathfrak{X}) \tag{15}$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{X}$ irgend einen Leitstrahl des Nullsystems bedeutet, der die Hauptaxe $\mathfrak{U}$ (und folglich auch die Nebenaxe) nicht trifft. Es ergeben sich daraus mehrere bekannte metrische Erzeugungsweisen des Nullsystems, und namentlich die Thatsache, dass dieses bei einer jeden Schraubung um seine Hauptaxe in Ruhe bleibt*).

Die Gleichung (12) lehrt, beiläufig bemerkt, die analytische Darstellung des Nullsystems, wenn die Hauptaxe $\mathfrak{U}$ und eine Gerade $\mathfrak{Y}$ als Leitlinie gegeben ist, die $\mathfrak{U}$ weder schneidet noch senkrecht kreuzt:

$$(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{Y})(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{U}\mathfrak{Y})(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{X}) = 0; \tag{16}$$

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage (Leipzig, 3. Aufl. 1892). Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II. (Leipzig 1891).

ebenso führt (10) zur Darstellung des Nullsystems, wenn ein Paar von einander verschiedener polar zugeordneter Gewinde und eine Leitlinie gegeben ist, die diesen Gewinden nicht angehört. —

Alternirende Formen, wie Nr. (1) und (2), oder in Liniencoordinaten lineare Formen, wie Nr. (3), werden wir im Folgenden immer wieder zu verwenden haben. Es empfiehlt sich daher, für diese Formen, die ja in gewissem Sinne äquivalent sind, jedenfalls einander gegenseitig bestimmen, ein gemeinsames Wort einzuführen: Wir nennen sie *Alternanten*, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob die Invariante J von Null verschieden ist oder verschwindet.

Die Figur zweier Gewinde.

Nur ganz kurz gehen wir ein auf mehrere Invarianten zweier oder dreier Gewinde, die bei unseren späteren Betrachtungen auftreten. Um zunächst die (längst bekannte) geometrische Bedeutung des Verschwindens der (zur allgemeinen projectiven Gruppe gehörigen) simultanen Invariante $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$ zweier (nicht ausgearteter) Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ — genauer: der Alternanten $(\mathfrak{P}\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ — festzustellen, unterwerfen wir etwa das zweite der Correlation, die mit dem ersten verbunden ist. Wir erhalten ein neues Gewinde $(\mathfrak{Q}'\mathfrak{X}) = 0$, dessen Gleichung nach Nr. 10 ist

$$(\mathfrak{Q}'\mathfrak{X}) = \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \cdot (\mathfrak{P}\mathfrak{X})}{J_{\mathfrak{P}}} - (\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0.$$

Verschwindet also die Invariante $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$, oder sind, wie wir sagen, die Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ *conjugirt*, so ist jedes der beiden Gewinde sich selbst polar zugeordnet in Bezug auf das Nullsystem des anderen. Führt man nach der Correlation des Gewindes $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, also — bei Benutzung gerader Linien als Objecte der Transformation — nach der Correlation

$$(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}) = \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y})}{J_{\mathfrak{P}}} - (\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$$

die Correlation des Gewindes $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ aus, also die Correlation

$$(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}) = \frac{(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}')(\mathfrak{Q}\mathfrak{Y})}{J_{\mathfrak{Q}}} - (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}),$$

so entsteht eine Collineation, die der Geraden $\mathfrak{X}$ die Gerade $\mathfrak{X}''$ zuordnet vermöge

$$(\mathfrak{X}''\mathfrak{Y}) = \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})(\mathfrak{P}\mathfrak{X})(\mathfrak{Q}\mathfrak{Y})}{J_{\mathfrak{P}} J_{\mathfrak{Q}}} - \frac{(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})(\mathfrak{Q}\mathfrak{Y})}{J_{\mathfrak{Q}}} - \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y})}{J_{\mathfrak{P}}} + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}).$$

Verschwindet $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$, so ändert sich diese Zuordnung nicht bei Vertauschung von $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$ und $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$. Man erkennt leicht,

dass diese Collineation dann involutorisch ist, und insbesondere die Punkte und ebenso auch die Ebenen der beiden Gewinden $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ gemeinsamen Leitlinien involutorisch paart*).

$(\mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}) = 0$ sagt natürlich aus, dass die Hauptaxen der Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ einander rechtwinklig kreuzen; das gleichzeitige Verschwinden der Invarianten $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{P}\ \mathfrak{Q})$ besagt, dass diese Hauptaxen einander rechtwinklig schneiden.

Die Figur dreier Gewinde.

Wir haben im vorigen Paragraphen zwei verschiedene alternirende trilineare Invarianten im System von drei Geraden oder Gewinden $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{R}\mathfrak{X}) = 0$ kennen gelernt, nämlich die Invarianten $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R})$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\}$ — Nr. (34) und (35), § 17.

Wir wollen jetzt noch zeigen, wie sich diese Invarianten in das im § 16 eingeführte System symbolischer Bezeichnungen einordnen; d. h. wir wollen die Invarianteneigenschaft dieser Ausdrücke dadurch in Evidenz setzen, dass wir sie, im Sinne der projectiven Invariantentheorie, darstellen als simultane Invarianten der obigen drei linearen Formen und der beiden Formen (lx), $(u\lambda)^2$, die, gleich Null gesetzt, die unendlich ferne Ebene und den sogenannten unendlich fernen Kugelkreis oder absoluten Kegelschnitt vorstellen.

Wir gehen, um zu einer symbolischen Darstellung zunächst von $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R})$ zu gelangen, von der naheliegenden Bemerkung aus, dass, wenn p_1, p_2; q_1, q_2; r_1, r_2 dreimal zwei (eigentliche) Punkte bedeuten, und z. B.

$$2(up) = (lp_1)(up_2) - (lp_2)(up_1)$$

gesetzt wird, der Quotient

$$\frac{(opqr)}{(lo)}$$

unabhängig ist von dem eingeführten willkürlichen Punkt o. Lässt man nun diesen Punkt o mit irgend einem der sechs Punkte $p_1 \ldots r_2$ zusammenfallen, so lässt sich jedesmal die Division mit (lo) ausführen, und es entstehen drei verschiedene Ausdrücke für den genannten Quotienten, deren Gleichheit mit Hülfe der Identität (7), § 16, un-

*) Man hat deshalb die durch das Bestehen der Gleichung $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = 0$ gekennzeichnete Lagenbeziehung zweier Gewinde ursprünglich als *involutorische Lage* bezeichnet (Plücker). Ein eigenes Wort hierfür ist aber nunmehr überflüssig geworden, da es sich um einen besonderen Fall der Beziehung handelt, die man in der Invariantentheorie jetzt allgemein als Conjugirt-Sein algebraischer Formen bezeichnet. Auch wird der Ausdruck „involutorisch" sinnlos, wenn $J_{\mathfrak{P}}$ und $J_{\mathfrak{Q}}$ verschwinden.

mittelbar nachgewiesen werden kann. Diese Rechnung ist auch ausführbar, wenn die zu den genannten Punkten p_1 u. s. w. gehörigen linearen Formen (up_1) u. s. f. blosse Symbole, z. B. symbolische Factoren alternirender Formen sind. Wir setzen demgemäss (vgl. Nr. 4, 5)

$$(17)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{P}\mathfrak{X}_u^v) &= (up_1)(vp_2) = -(up_2)(vp_1) = \tfrac{1}{2}(a_1a_2uv),\\ (\mathfrak{P}\mathfrak{X}_x^y) &= (a_1x)(a_2y) = -(a_2x)(a_1y) = \tfrac{1}{8}(p_1p_2xy),\end{aligned}$$

u. s. w., indem wir bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ die Zeichen q, b und r, c an Stelle von p, a treten lassen.

Nun findet sich sofort

$$(18)\qquad (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}) =$$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{2}(lq_1)(lr_1)(p_1p_2q_2r_2) = \tfrac{1}{2}(lr_1)(lp_1)(q_1q_2r_2p_2) = \tfrac{1}{2}(lp_1)(lq_1)(r_1r_2p_2q_2) =\\ &= (lq_1)(lr_1)(a_1q_2)(a_2r_2) = (lr_1)(lp_1)(b_1r_2)(b_2p_2) = (lp_1)(lq_1)(c_1p_2)(c_2q_2) =\\ &= \tfrac{1}{4}(la_1b_1b_2)(la_2c_1c_2) = \tfrac{1}{4}(lb_1c_1c_2)(lb_2a_1a_2) = \tfrac{1}{4}(lc_1a_1a_2)(lc_2b_1b_2).\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens dieser Invariante liegt auf der Hand: Die Hauptaxen der drei Gewinde $(\mathfrak{P}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{R}\mathfrak{X}) = 0$ sind in diesem Falle zu einer Ebene parallel, oder, was Dasselbe besagt, die Nebenaxen gehören einem Büschel an.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die andere Invariante $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\}$ symbolisch darstellen. Man findet ohne Mühe

$$(19)\qquad \{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\} =$$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{4}(q_1q_2p_1\,|\,r_1r_2p_2) = \tfrac{1}{4}(r_1r_2q_1\,|\,p_1p_2q_2) = \tfrac{1}{4}(p_1p_2r_1\,|\,q_1q_2r_2) =\\ &= (b_1p_1)(c_1p_2)(b_2\,|\,c_2) = (c_1q_1)(a_1q_2)(c_2\,|\,a_2) = (a_1r_1)(b_1r_2)(a_2\,|\,b_2) =\\ &= \tfrac{1}{2}(a_1a_2b_1c_1)(b_2\,|\,c_2) = \tfrac{1}{2}(b_1b_2c_1a_1)(c_2\,|\,a_2) = \tfrac{1}{2}(c_1c_2a_1b_1)(a_2\,|\,b_2).\end{aligned}$$

Auf die geometrische Bedeutung des Verschwindens dieser Invariante werden wir später in dem Falle eingehen, in dem die drei Gewinde sich auf Gerade (oder eigentlich Liniengebüsche) reduciren. Hier aber können wir schon bemerken, dass das gleichzeitige Verschwinden der beiden Invarianten $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R})$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\}$ eine Eigenschaft der Hauptaxen der drei Gewinde darstellt. Es lassen dann diese Hauptaxen eine gemeinsame Normale zu, oder sie sind, im Grenzfall, zu einander parallel. Das Büschel coaxialer Gewinde, das die gemeinsame Normale von zwei nicht parallelen Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ als Hauptaxe hat, wird dargestellt durch

$$(20)\qquad \lambda(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) + \mu\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} = 0.$$

Vgl. § 17, Nr. 39, und den zugehörigen Text.

Der Vector. Das Vectorendreieck.

Ein Vector $\mathfrak{V}$ ist ein Paar von eigentlichen Punkten, das beliebig parallel verschoben werden darf. Die Beziehung zwischen zwei Paaren ξ, ξ' und η, η' von Punkten, die als Anfangs- und Endpunkte desselben Vectors

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{\xi}^{\xi'} = \mathfrak{V}_{\eta}^{\eta'}$$

auftreten können, ist nun offenbar:

$$\frac{(u\xi')}{(l\xi')} - \frac{(u\xi)}{(l\xi)} = \frac{(u\eta')}{(l\eta')} - \frac{(u\eta)}{(l\eta)}. \tag{21}$$

Bezeichnen wir diese beiden einander gleichen Ausdrücke mit (up), so ist die Länge des Vectors $\mathfrak{V}$, die Grösse $\overline{\xi\xi'} = \overline{\eta\eta'}$, gleich

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \frac{\sqrt{\xi\xi' \;\; \xi\xi'}}{(l\xi)(l\xi')} = \frac{\sqrt{\eta\eta' \mid \eta\eta'}}{(l\eta)(l\eta')}. \tag{22}$$

Haben zwei Vectoren denselben Anfangspunkt o, und setzen wir

$$\mathfrak{V}_o^{\xi} + \mathfrak{V}_o^{\eta} = \mathfrak{V}_o^{\zeta},$$

so ist der Endpunkt ζ der geometrischen Summe $\mathfrak{V}_o^{\zeta}$ gegeben durch

$$\frac{(u\zeta)}{(l\zeta)} = \frac{(u\xi)}{(l\xi)} + \frac{(u\eta)}{(l\eta)} - \frac{(uo)}{(lo)}. \tag{23}$$

A. Jedem Vector $\mathfrak{V}$ lässt sich eindeutig-umkehrbar eine Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ zuordnen, deren Covarianten

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{X}_l^u), \quad (\mathfrak{V}\,|\,\mathfrak{X}) \tag{24}$$

identisch verschwinden.

Vectoren werden geometrisch addirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt, und umgekehrt).*

Wenn der Vector $\mathfrak{V}$ durch ein Punktepaar ξ, ξ' gegeben ist, so setzen wir

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{V}_{\xi}^{\xi'}\mathfrak{X}) = \frac{(\mathfrak{P}_{\xi}^{\xi'} \mid \mathfrak{X})}{(l\xi)(l\xi')}. \tag{25}$$

---

*) Dieser Satz sagt natürlich nichts Anderes aus, als dass man einen Vector durch drei Coordinaten darstellen kann, und dass man Vectoren geometrisch addirt, indem man ihre Coordinaten addirt. Indessen würde der an sich gewiss einfachere übliche Ausdruck hier nicht sachgemäss sein; es handelt sich für uns nicht darum, die ganz triviale Zusammensetzung der Vectoren um ihrer selbst willen zu untersuchen, sondern darum, deren Zusammenhang mit tiefer liegenden Constructionen zu begreifen, und dazu haben wir den Satz des Textes nöthig. Aehnliches gilt von der weiterhin zu besprechenden Rechnung mit Stäben (oder Keilen), die ebenfalls, aus ihrem Zusammenhange genommen, einfacher dargestellt werden kann, z. B. durch die Grassmann'schen Methoden.

Die Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ ist hierdurch völlig bestimmt; die Coefficienten $\mathfrak{V}_{01}$, $\mathfrak{V}_{02}$, $\mathfrak{V}_{03}$ dieser Form haben den Werth Null, und es verschwinden daher in der That die Ausdrücke (24) identisch.

Ist umgekehrt eine Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ gegeben, die einer der beiden Gleichungen $(\mathfrak{V}\mathfrak{X}_l^u) = 0$, $(\mathfrak{V}\,|\,\mathfrak{X}) = 0$ genügt, so verschwinden die Coefficienten $\mathfrak{V}_{01}$, $\mathfrak{V}_{02}$, $\mathfrak{V}_{03}$, und es besteht von selbst auch die andere Gleichung; der zugehörige Vector, der seinen Anfangspunkt ξ in einem beliebig anzunehmenden eigentlichen Punkte hat, ist $\mathfrak{V}_\xi^{\xi'}$, wobei der Endpunkt ξ' aus der Gleichung

$$(u\xi') = (u\xi) + (\mathfrak{V}\mathfrak{P}_\xi^\lambda)(u\lambda) \tag{26}$$

zu entnehmen ist. Es folgt ferner, dass von den beiden Gleichungen (23) und

$$(\mathfrak{V}_o^\xi\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}_o^\eta\mathfrak{X}) = (\mathfrak{V}_o^\zeta\mathfrak{X}) \tag{27}$$

jede die andere nach sich zieht. Die Formel (27) kann uns also ebenfalls als ein algebraisches Bild der Construction des *Vectorenparallelogramms* dienen. In gleicher Weise findet die noch etwas einfachere Construction des *Vectorendreiecks* ihren Ausdruck in der in Bezug auf ξ, η, ζ und $\mathfrak{X}$ identischen Gleichung

$$(\mathfrak{V}_\eta^\xi\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}_\zeta^\xi\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}_\xi^\eta\mathfrak{X}) = 0. \tag{28}$$

Ist die Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ gegeben, so ist die Länge (Nr. 22) des zugehörigen Vectors gleich

$$\sqrt{\mathfrak{V}_{23}{}^2 + \mathfrak{V}_{31}{}^2 + \mathfrak{V}_{12}{}^2} = \frac{1}{(lo)}\sqrt{(\mathfrak{V}\mathfrak{P}_o^\lambda)^2}, \tag{29}$$

wofern o einen beliebig angenommenen eigentlichen Punkt bedeutet. Man leitet den Ausdruck rechts leicht aus den Formeln (22) und (26) ab, indem man dabei die Formeln (3), (40) und (41) des § 16 benutzt; bei Ersetzung der Symbolpaare λ durch ihre Zahlenwerthe entsteht der Ausdruck links in Nr. (29), der sich unmittelbar auch aus (22) ergiebt, wenn man bemerkt, dass die Grössen $\mathfrak{V}_{23}$, $\mathfrak{V}_{31}$, $\mathfrak{V}_{12}$ mit den oben p_1, p_2, p_3 genannten Grössen identisch sind.

Die Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ stellt, gleich Null gesetzt, die Nebenaxe des uneigentlichen Linienkreuzes dar, das wir, im engeren Sinne des Wortes, als *Träger* des Vectors $\mathfrak{V}$ bezeichnet hatten.

Der Stab. Das Parallelogramm der Stäbe.

Ein Stab ist ein Paar eigentlicher Punkte ξ, ξ', die auf ihrer Verbindungslinie beliebig verschoben werden dürfen. Die geometrische Addition von Stäben mit gemeinsamem Anfangspunkt erfolgt, auch

analytisch, nach der für Vectoren geltenden Regel (Nr. 23). Wie den Vectoren, so können auch den Stäben *Alternanten* eindeutig umkehrbar so zugeordnet werden, dass die geometrische Addition von Stäben mit gemeinsamem Anfangspunkt und die Addition der entsprechenden Alternanten parallel laufende Operationen sind.

Wir setzen, wenn der Stab $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\xi^{\xi'}$ gegeben ist,

$$(30) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}_\xi^{\xi'}\mathfrak{X}) = \frac{(\mathfrak{P}_\xi^{\xi'}\mathfrak{X})}{(l\xi)(l\xi')}$$

also

$$(31) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{X}_x^y) = \frac{(\xi\xi' xy)}{(l\xi)(l\xi')}, \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{X}_u^v) = \frac{(u\xi)(v\xi') - (u\xi')(v\xi)}{(l\xi)(l\xi')},$$

in Folge wovon natürlich die Gleichung $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}) = 0$ besteht.

Ist umgekehrt eine Alternante gegeben, die dieser letzten Bedingung genügt, deren Covariante $(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{X})$ oder $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_l^u)$ aber nicht identisch verschwindet, so giebt es unendlich viele eigentliche Punkte ξ, die so liegen, dass $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_\xi^x)$ identisch verschwindet, d. h. die auf der Geraden $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = 0$ enthalten sind. Der Endpunkt ξ' des der Alternante $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ zugeordneten Stabes $\mathfrak{S}_\xi^{\xi'}$ ist dann gegeben durch die Gleichung

$$(32) \qquad (u\xi') = (u\xi) + (l\xi)(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_l^u),$$

die Länge dieses Stabes durch

$$(33) \qquad \overline{\xi\xi'} = \sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}.$$

Ist für drei Stäbe mit gemeinsamem Anfangspunkt o

$$\mathfrak{S}_o^\xi + \mathfrak{S}_o^\eta = \mathfrak{S}_o^\zeta,$$

so besteht als Folge von (23) die Gleichung

$$(34) \qquad \frac{(o\xi xy)}{(lo)(l\xi)} + \frac{(o\eta xy)}{(lo)(l\eta)} = \frac{(o\zeta xy)}{(lo)(l\zeta)} \qquad \text{oder}$$

$$(34) \qquad (\mathfrak{S}_o^\xi\mathfrak{X}) + (\mathfrak{S}_o^\eta\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}_o^\zeta\mathfrak{X}),$$

und umgekehrt zeigt die Gleichung (32), dass eine Gleichung dieser letzten Form auch wieder die Gleichung (23) nach sich zieht; es besteht also in der That zwischen Alternanten und Stäben eine Zuordnung von der behaupteten Art; in der neben (23) tretenden Formel (34) aber haben wir ein zweites analytisches Bild der als *Parallelogramm der Stäbe* bezeichneten Construction.

Die Gerade $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = 0$ ist die Hauptaxe des eigentlichen Linienkreuzes, das wir *Träger* des Stabes $\mathfrak{S}$ genannt hatten. Dieses Linienkreuz trägt, im weiteren Sinne, u. A. auch den Vector, dessen Be-

grenzungspunkte die Punkte $\xi\xi'$ sind oder doch sein können. Die Alternante, die zu diesem dem Stabe $\mathfrak{S}$ der Länge nach gleichen Vector gehört, ist

$$(35) \qquad (\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{X}).$$

19.

Geometrische Summen von Stäben, Keilen und Quirlen.

Summen von Stäben.

Gehen wir, durch geometrische Addition mehrerer Stäbe $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ zu einer (i. A. formalen) Summe von Stäben

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots$$

über, so entspricht dieser Operation, wie aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres sich ergiebt, die Addition der den einzelnen Stäben zugeordneten Alternanten: Wir bilden eine neue Alternante,

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}) + (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}) + \cdots,$$

und wir ordnen diese, die nun eine alternirende Form von allgemeiner Art (mit sechs nicht mehr beschränkten Coefficienten $\mathfrak{S}_{ik}$) sein wird, der geometrischen Summe $\mathfrak{S}$ zu.

Ist umgekehrt eine beliebige (reelle) Alternante gegeben, so bezeichnen wir diese mit $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$, und unterscheiden folgende Fälle*):

(a) $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}) \neq 0$. $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ lässt sich auf eine einzige Weise in eine *Normalform*

$$(1) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{X})$$

setzen, derart, dass $(\mathfrak{U}\mathfrak{U}) = 0$, $(\mathfrak{V}\mathfrak{V}) = 0$, und dass $(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = 0$ eine eigentliche Gerade ist, die zusammengenommen mit $(\mathfrak{V}\mathfrak{X}) = 0$ — die eine uneigentliche Gerade wird — die Figur eines *Linienkreuzes* bildet. Setzen wir

$$(2) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}),$$

so folgt

$$(3) \qquad (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}\mathfrak{X}) - \frac{J}{(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S})}(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{X}), \quad (\mathfrak{V}\mathfrak{X}) = \frac{J}{(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S})}(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{X}).$$

$(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = 0$ ist also die *Hauptaxe* des Gewindes $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{V}\mathfrak{X}) = 0$ dessen *Nebenaxe*. Die Alternante $(\mathfrak{U}\mathfrak{X})$ ist nach § 18 einem völlig bestimmten Stab zugeordnet von der Länge

$$(4) \qquad \sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}} = \sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}},$$

*) Man vergleiche, etwa in dem citirten Werke von Schell, die sonst übliche Behandlungsweise des Gegenstandes.

$(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ einem dem Stabe parallel gerichteten Vector von der Länge

$$(5) \qquad \frac{1}{(lo)}\sqrt{(\mathfrak{V}\mathfrak{P}_o^{\lambda})^2} = \frac{J}{\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}}.$$

Dass die Quadratwurzel rechts mit dem richtigen Vorzeichen versehen ist, werden wir weiter unten nachweisen.

Umgekehrt entspricht einer Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$, die einem Vector zugeordnet werden kann, zugleich auch eine geometrische Summe von Stäben von besonderer Beschaffenheit: vgl. (c).

(b) $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}) = 0$, $(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}) \neq 0$. Der Summe $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ entspricht ein einzelner Stab; $(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}\mathfrak{X})$.

(c) $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}) = 0$, $(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}) = 0$, aber $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ nicht identisch gleich Null. Der Form $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ kann ein *Stäbepaar* zugeordnet werden. Man nehme einen Stab $(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X})$ im Uebrigen beliebig, aber so an, dass $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1) = 0$; dann gehört $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X})$ zu einem neuen Stab $\mathfrak{S}_2$, und es ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$. Beide Stäbe sind parallel, und haben entgegengesetzt gleiche Längen. Führen wir durch die Substitutionen

$$(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}_x^y) = \frac{(\xi_1\eta_1 xy)}{(l\xi_1)(l\eta_1)}, \qquad (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}_x^y) = \frac{(\xi_2\eta_2 xy)}{(l\xi_2)(l\eta_2)}$$

die durch die Relation

$$\frac{(u\xi_1)}{(l\xi_1)} + \frac{(u\xi_2)}{(l\xi_2)} = \frac{(u\eta_1)}{(l\eta_1)} + \frac{(u\eta_2)}{(l\eta_2)}$$

verbundenen Anfangs- und Endpunkte der beiden Stäbe $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ ein, so ergiebt sich für das *Moment* M des Stäbepaares $\mathfrak{S}$, nämlich für die Fläche

$$2F(\xi_1, \eta_1, \xi_2) = 2F(\xi_1, \eta_1, \eta_2)$$
$$= 2F(\xi_1, \xi_2, \eta_2) = 2F(\eta_1, \xi_2, \eta_2)$$

des Parallelogramms $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ (s. S. 26) nach § 17, Nr. 23 der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(\xi_1\eta_1\xi_2\,|\,\xi_1\eta_1\xi_2)}}{(l\xi_1)(l\eta_1)(l\xi_2)} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}_{\xi_2}^{\lambda})^2}}{(l\xi_2)} = \frac{\sqrt{[(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}_{\xi_2}^{\lambda}) + (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}_{\xi_2}^{\lambda})]^2}}{(l\xi_2)},$$

also, da dieser sich nicht ändert, wenn man für ξ_2 einen beliebigen eigentlichen Punkt o setzt, der Ausdruck

$$(6) \qquad M = \frac{1}{(lo)}\sqrt{(\mathfrak{S}\mathfrak{P}_o^{\lambda})^2}.$$

Das Moment des Stäbepaares ist daher — auch dem Vorzeichen nach — gleich der Länge des Vectors, den man der speciellen Alternante $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ zuordnen kann. (Vgl. Nr. 29, § 18.)

(d) $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = 0$, für alle $\mathfrak{X}_{ik}$, d. h. $\mathfrak{S}_{ik} = 0$: Die vorgelegte Summe von Stäben hat den Werth Null. —

Wollen wir das unter (c) Erkannte auf den allgemeinen Fall (a) anwenden, so müssen wir berücksichtigen, dass die Festlegung der Grösse $\sqrt{\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U}}$ über das Vorzeichen der mit $2F$ bezeichneten Fläche, also über das Vorzeichen des Momentes M des zu der Alternante $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ gehörigen Stäbepaares entscheidet. Wir müssen also jetzt die Grösse $2F = M$, statt nach der Formel Nr. 23 des § 17, nach der dort angegebenen Formel Nr. 24b berechnen. Es ergiebt sich dann, wenn nunmehr

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{X}^y_x) = (\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}^y_x) + (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}^y_x) = \frac{(\xi_1\eta_1 xy)}{(l\xi_1)(l\eta_1)} + \frac{(\xi_2\eta_2 xy)}{(l\xi_2)(l\eta_2)}$$

und, wie in § 18 (Nr. 5), $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}^y_x) = \frac{1}{2}(pqxy)$ gesetzt, und berücksichtigt wird, dass $\mathfrak{S}$ an Stelle von $\mathfrak{U}$ treten kann — da vermöge $(\mathfrak{U}\mathfrak{X}''_l) = (\mathfrak{S}\mathfrak{X}^u_l)$ die dabei neu hinzukommenden Glieder verschwinden —

$$M = 2F(\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2) = \frac{(lp)\,(\xi_1\eta_1\xi_2 q) - (lq)\,(\xi_1\eta_1\xi_2 p)}{2(l\xi_1)(l\eta_1)(l\xi_2)\sqrt{\tfrac{1}{4}(pq\,|\,pq)}} =$$

$$= \frac{(lp)(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}^q_{\xi_2}) - (lq)(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}^p_{\xi_2})}{2(l\xi_2)\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}} = \frac{(lp)(\mathfrak{V}\mathfrak{X}^q_o) - (lq)\,(\mathfrak{V}\mathfrak{X}^p_o)}{2(lo)\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}} =$$

$$= \frac{(\mathfrak{V}\mathfrak{X}^q_p)}{2\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}} = \frac{(\mathfrak{V}\mathfrak{S})}{\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}} = \frac{J}{(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S})}\cdot\frac{(\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S})}{\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}} = \frac{J}{\sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}}}.$$

Dies ist der oben unter (5) angegebene Ausdruck: Das Moment des zu $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ gehörigen Stäbepaares (d. i. die Fläche $2F$) wird daher auch dem Vorzeichen nach gemessen durch die Länge des Vectors $\mathfrak{V}$, über dessen Vorzeichen wiederum das Vorzeichen des bei Reduction von $\mathfrak{S}$ auf die Normalform auftretenden Stabes $\mathfrak{U}$ entscheidet.

Die in den Fällen (a) und (c) vorgenommenen Zerlegungen von $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ sind untergeordnet der unter allen Umständen möglichen Darstellung von $(\mathfrak{S}\mathfrak{X})$ in der Form

$$(7) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{X}^y_x) = (\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}^y_x) + (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}^y_x) = \frac{(\xi_1\eta_1 xy)}{(l\xi_1)(l\eta_1)} + \frac{(\xi_2\eta_2 xy)}{(l\xi_2)(l\eta_2)},$$

die der Darstellung von $\mathfrak{S}$ als geometrischer Summe zweier Stäbe $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ entspricht. Eine Vergleichung der Nr. (7) mit der Formel Nr. (10) des vorigen Paragraphen lässt erkennen, dass im Falle (a) die Geraden $(\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}) = 0$ und $(\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}) = 0$ einander polar zugeordnet sind in Bezug auf das mit $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}) = 0$ verbundene Nullsystem; zugleich ergiebt sich die Lösung der Aufgabe, die Zerlegung (7) auszuführen, wenn die der Ungleichung $(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_1) \neq 0$ genügende Gerade $\mathfrak{X}_1$ des Stabes $\mathfrak{S}_1$ gegeben ist:

$$(8) \qquad (\mathfrak{S}_1\mathfrak{X}) = \frac{J\cdot(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X})}{(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_1)}, \quad (\mathfrak{S}_2\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}\mathfrak{X}) - \frac{J(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X})}{(\mathfrak{S}\mathfrak{X}_1)}.$$

Endlich ergiebt sich der *Satz von Chasles*, wonach das von den Stäben $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ begrenzte Tetraeder ein constantes Volumen hat:

$$(9) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}) = (\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2) = \frac{(\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2)}{(l\xi_1)(l\eta_1)(l\xi_2)(l\eta_2)}.$$

Dass J zugleich das Product aus den Längen des Stabes $\mathfrak{U}$ und des Vectors $\mathfrak{V}$ ist, zeigen schon die Formeln (4), (5).

Der Keil. Das Keiltrapez.

Ist ein *Keil* $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$ gegeben durch die ihn begrenzenden Ebenen φ, φ', so ordnen wir ihm eine Alternante zu vermöge der Definitionsgleichung

$$(10) \qquad (\mathfrak{K}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}\mathfrak{X}_u^v) = \frac{(\varphi\varphi' uv)}{(\varphi\,|\,\varphi')} \text{ *}).$$

Die *Oeffnung* des Keiles ist dann

$$(11) \qquad \operatorname{tg}(\varphi, \varphi') = \frac{\sqrt{(\varphi\,|\,\varphi)(\varphi'\,|\,\varphi') - (\varphi\,|\,\varphi')^2}}{(\varphi\,|\,\varphi')} = \sqrt{\mathfrak{K}\,|\,\mathfrak{K}};$$

verschwindet diese Grösse und ist folglich der (reelle) Keil $\mathfrak{K}$ uneigentlich, so ist der Ausdruck für die *Sperrung* dieses Keiles der Formel (21) des § 17 zu entnehmen; er kann geschrieben werden

$$(12) \qquad \operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{(lo)}\sqrt{(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_o^{\lambda})^2}.$$

Umgekehrt entspricht jeder Alternante $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$, die der Bedingung $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}) = 0$ genügt, ein völlig bestimmter Keil: Wird die eigentliche Ebene φ als Anfangsebene der Bedingung $(\mathfrak{K}\mathfrak{X}_{\varphi}^{u}) = 0$ gemäss, aber im Uebrigen beliebig angenommen, so ist die Endebene φ' gegeben durch

$$(13) \qquad (\varphi' x) = (\varphi x) + (\varphi\lambda)(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\lambda}^{x}).$$

Dass die Form $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ sich nicht ändert, wenn man die Ebenen φ, φ' um ihre Schnittlinie $(\mathfrak{K}\mathfrak{X}) = 0$ dreht, ist eine leichte Folgerung aus diesen Formeln.

Wir drücken nun *die Construction des Keiltrapezes* analytisch aus.

Es mögen zwei Keile $\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi}$ und $\mathfrak{K}_{\omega}^{\psi}$, die nicht beide uneigentlich sind, mit gemeinsamer Anfangsebene ω gegeben sein, und es mögen die Zeichen φ', ψ', χ die in § 4 des ersten Abschnittes (S. 32) festgesetzte Bedeutung haben, so dass

$$\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi} + \mathfrak{K}_{\omega}^{\psi} = \mathfrak{K}_{\omega}^{\chi}.$$

*) In Grassmann's Bezeichnungsweise wird der Keil dargestellt durch den Quotienten aus dem äusseren und dem inneren Product zweier Ebenen.

Dann folgt

$$(14) \qquad (\varphi' x) = \frac{(\varphi x)}{(\omega \mid \varphi)} - \frac{(\omega x)}{(\omega \mid \omega)}, \quad (\psi' x) = \frac{(\psi x)}{(\omega \mid \psi)} - \frac{(\omega x)}{(\omega \mid \omega)},$$

$$(15) \qquad \frac{(\chi x)}{(\omega \mid \chi)} = \frac{(\varphi x)}{(\omega \mid \varphi)} + \frac{(\psi x)}{(\omega \mid \psi)} - \frac{(\omega x)}{(\omega \mid \omega)},$$

womit die Endebene χ der geometrischen Summe $\mathfrak{K}_\omega^\chi$ gefunden ist*). Aus (15) aber folgt

$$(16) \qquad \frac{(\omega \chi u v)}{(\omega \mid \chi)} = \frac{(\omega \varphi u v)}{(\omega \mid \varphi)} + \frac{(\omega \psi u v)}{(\omega \mid \psi)}$$

oder

$$(16) \qquad (\mathfrak{K}_\omega^\chi \mathfrak{X}) = (\mathfrak{K}_\omega^\varphi \mathfrak{X}) + (\mathfrak{K}_\omega^\psi \mathfrak{X});$$

und aus (13) ergiebt sich, dass auch umgekehrt eine Gleichung der Form (16) eine solche der Form (15) nach sich zieht. Dass Dasselbe auch dann noch gilt, wenn die betrachteten Keile uneigentlich sind, ist ebenfalls leicht zu sehen. Sucht man nämlich den einem uneigentlichen Keil $\mathfrak{K}$ entsprechenden Vector, und dann die zu diesem gehörige Alternante (§ 18), so erhält man eben die Form $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$.

Geometrische Summen von Keilen.

Das über die Reduction einer nun mit $\mathfrak{K}$ zu bezeichnenden geometrischen Summe von Keilen auf die Normalform und über die Darstellung der zugehörigen Alternante $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ in der Form

$$(17) \qquad (\mathfrak{K}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{X})$$

zu Sagende ist so analog dem mit Bezug auf Summen von Stäben Bemerkten, dass wir wohl nicht nöthig haben, näher auf diesen Gegenstand einzugehen. Nur auf eine der Gleichung (9) verwandte Formel wollen wir aufmerksam machen, da diese zu einem dem Satze von Chasles verwandten, aber allerdings nicht ganz so einfachen geometrischen Satz führt: Setzen wir

$$(18) \qquad (\mathfrak{K}\mathfrak{X}_u^v) = (\mathfrak{K}_1 \mathfrak{X}_u^v) + (\mathfrak{K}_2 \mathfrak{X}_u^v) = \frac{(\varphi_1 \psi_1 u v)}{(\varphi_1 \mid \psi_1)} + \frac{(\varphi_2 \psi_2 u v)}{(\varphi_2 \mid \psi_2)},$$

so folgt

$$(19) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{K}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2) = \frac{(\varphi_1 \psi_1 \varphi_2 \psi_2)}{(\varphi_1 \mid \psi_1)(\varphi_2 \mid \psi_2)}.$$

Wir haben auf S. 148 mehrere geometrische Deutungen der absoluten Invariante rechts angegeben, die hiernach einen nur von $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ abhängigen Werth hat.

---

*) Man kann natürlich in solchen Formeln wie (14) und (15) links einen von x freien Factor beliebig hinzufügen. Insbesondere kann man in (15) links den Nenner weglassen; es wird dann $(\omega \mid \chi) = 1$; die der Homogeneität wegen erfolgte Zufügung dieses Nenners ändert also Nichts.

Der Quirl.

Unsere nächste Aufgabe sei die analytische Darstellung des Quirls. Wir ordnen dem durch Anfangspunkt ξ und Endebene ψ oder durch Anfangsebene φ und Endpunkt η gegebenen Quirl

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\xi^\psi = \mathfrak{Q}_\varphi^\eta$$

eine Alternante $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ zu, indem wir setzen

$$(20)\qquad (\mathfrak{Q}\mathfrak{X}_x^y) = -\frac{(\xi x y \mid \psi)}{(\xi\psi)} = \frac{(\varphi \mid \eta x y)}{(\varphi\eta)}, \qquad \text{oder}$$

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}_u^v) = \frac{(v\xi)(\psi \mid u) - (u\xi)(\psi \mid v)}{(\xi\psi)} = \frac{(\varphi \mid v)(u\eta) - (\varphi \mid u)(v\eta)}{(\varphi\eta)}.$$

Die *Länge* des Quirls wird dann gegeben durch den Ausdruck

$$(21)\qquad \operatorname{dist}(\xi, \psi) = \operatorname{dist}(\varphi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{Q}}}.$$

Sind die Punkte ξ, η uneigentlich und ist also auch der Quirl $\mathfrak{Q}$ uneigentlich, so wird die Länge des Quirls unendlich, und an Stelle dieser Grösse tritt die *Oeffnung*

$$(22)\qquad \operatorname{tg}(\mathfrak{P}_o^\xi, \psi) = \operatorname{tg}(\varphi, \mathfrak{P}_o^\eta) = \frac{(lo)}{\sqrt{(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_o^\lambda)^2}}.$$

Um den Ausdruck rechts aus dem durch die Nr. 16 in § 17 gegebenen Ausdruck

$$\frac{(lo)(\psi\xi)}{\sqrt{(\psi \mid \psi)(o\xi \mid o\xi) - (lo)^2(\psi\xi)^2}}$$

herzuleiten, benutze man die in § 16 unter Nr. 7 und Nr. 41 aufgeführten Umformungen:

$$\begin{aligned} 2(\psi\xi)^2(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_o^\lambda)^2 &= 2(\xi o\lambda\lambda')(\xi o\lambda\lambda'')(\psi\lambda')(\psi\lambda'') = \\ &= (\psi\lambda')(\xi o\lambda\lambda'')\{(\xi o\lambda\lambda')(\psi\lambda'') - (\xi o\lambda''\lambda')(\psi\lambda)\} = \\ &= (\psi\lambda')(\xi o\lambda\lambda'')\{(\lambda\lambda'\lambda'' o)(\psi\xi) + (\xi o\lambda\lambda'')(\psi\lambda')\} = \\ &= -2(lo)^2(\psi\xi)^2 + 2(\psi \mid \psi)(\xi o \mid \xi o). \end{aligned}$$

Ist der vorgelegte Quirl der *Quirl Null*, so verschwindet die zugehörige Alternante identisch. —

Wir nehmen jetzt an, es sei eine nicht identisch verschwindende aber der Bedingung $(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}) = 0$ genügende Alternante $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ gegeben, und wir bestimmen unter dieser Voraussetzung die zugehörigen Quirlfiguren.

Sei zuerst der Punkt ξ auf der Geraden $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ angenommen, so dass $(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_\xi^x) = 0$, so wird die zu ξ als Anfangspunkt des Quirles $\mathfrak{Q}$ gehörige Endebene ψ gefunden mit Hülfe der Gleichung

$$(23)\qquad (\psi x) = (\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}_\xi^x) - (l\xi)(lx);$$

ebenso wenn der Endpunkt η gegeben ist, die Anfangsebene φ aus

$$(\varphi x) = (\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}_\eta^x) + (l\eta)(lx). \tag{24}$$

Beide Formeln gelten natürlich nur unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{Q}$ ein *eigentlicher* Quirl ist.

Sei zweitens die Ebene φ als Anfangsebene des Quirles $\mathfrak{Q}$ senkrecht zur Geraden $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = 0$ angenommen, nämlich so, dass $(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}_\varphi^u) = 0$, so wird der zugehörige Endpunkt η des Quirls gegeben durch

$$(u\eta) = (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}_\varphi^u) - (\varphi \mid u); \tag{25}$$

ebenso wird der Anfangspunkt ξ gefunden, wenn die Endebene ψ bekannt ist:

$$(u\xi) = (\mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}_\psi^u) + (\psi \mid u). \tag{26}$$

Diese beiden Formeln gelten auch für *uneigentliche* Quirle; sie liefern dann uneigentliche Punkte ξ, η.

Quirlvierflach und Quirltrapez.

Wir betrachten jetzt die geometrische Summe zweier eigentlicher Quirle mit gemeinsamem Anfangspunkt o im Endlichen, und wir bestimmen die Gleichung der durch

$$\mathfrak{Q}_o^\varphi + \mathfrak{Q}_o^\psi = \mathfrak{Q}_o^\chi$$

definirten Ebene χ, indem wir die *Construction des Quirlvierflachs* analytisch ausdrücken. Wenn, wie in § 8, die durch o parallel zu φ und ψ gelegten Ebenen mit φ', ψ' bezeichnet werden, so können wir setzen

$$(\varphi' x) = \frac{(\varphi x)}{(\varphi o)} - \frac{(lx)}{(lo)}, \quad (\psi' x) = \frac{(\psi x)}{(\psi o)} - \frac{(lx)}{(lo)}, \tag{27}$$

$$\frac{(\chi x)}{(\chi o)} = \frac{(\varphi x)}{(\varphi o)} + \frac{(\psi x)}{(\psi o)} - \frac{(lx)}{(lo)}; \tag{28}$$

hieraus aber folgt sofort

$$(\mathfrak{Q}_o^\varphi \mathfrak{X}) + (\mathfrak{Q}_o^\psi \mathfrak{X}) = (\mathfrak{Q}_o^\chi \mathfrak{X}), \tag{29}$$

und umgekehrt zieht eine Gleichung dieser letzten Form wieder eine solche der Form (28) nach sich.

Ebenso einfach und ganz analog gestaltet sich die analytische Darstellung der *Construction des Quirltrapezes.* Es sei ω eine eigentliche Ebene und

$$\mathfrak{Q}_\omega^\xi + \mathfrak{Q}_\omega^\eta = \mathfrak{Q}_\omega^\zeta;$$

ξ' und η' seien die Fusspunkte der von ξ und η auf ω gefällten Lote. Wir haben dann

$$(30) \qquad (u\xi') = \frac{(u\xi)}{(\omega\xi)} - \frac{(\omega \mid u)}{(\omega \mid \omega)}, \quad (u\eta') = \frac{(u\eta)}{(\omega\eta)} - \frac{(\omega \mid u)}{(\omega \mid \omega)},$$

$$(31) \qquad \frac{(u\zeta)}{(\omega\zeta)} = \frac{(u\xi)}{(\omega\xi)} + \frac{(u\eta)}{(\omega\eta)} - \frac{(\omega \mid u)}{(\omega \mid \omega)},$$

und diese letzte Gleichung ist wiederum äquivalent mit der folgenden:

$$(32) \qquad (\mathfrak{D}_\omega^\xi \mathfrak{X}) + (\mathfrak{D}_\omega^\eta \mathfrak{X}) = (\mathfrak{D}_\omega^\zeta \mathfrak{X}).$$

Eine einfache *Anwendung* der abgeleiteten Formeln bildet der auf S. 69 angegebene Satz von den Quirlen, die durch die Ecken und Seitenflächen eines Tetraeders bestimmt werden. Dieser Satz findet nämlich seinen analytischen Ausdruck in der folgenden Identität

$$(33) \quad (x_1 y z | x_2 x_3 x_4) - (x_2 y z | x_3 x_4 x_1) + (x_3 y z | x_4 x_1 x_2) - (x_4 y z | x_1 x_2 x_3) = 0,$$

in der $x_1 \ldots x_4$, y, z irgend sechs Punkte bedeuten.

Geometrische Summen von Quirlen.

Auch hier heben wir nur hervor, dass einer geometrischen Summe von Quirlen eine Alternante $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ allgemeiner Art eindeutig umkehrbar entspricht, die immer in die Normalform

$$(34) \qquad (\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{X})$$

gesetzt werden kann, so dass $(\mathfrak{U}\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{V}\mathfrak{X})$ zu einem eigentlichen und einem uneigentlichen Quirl desselben Trägers gehören. Setzen wir, nach Analogie der Formeln (7) und (18),

$$(35) \qquad (\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{X}_x^y) + (\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{X}_x^y) = -\frac{(\xi_1 x y \mid \psi_1)}{(\xi_1 \psi_1)} - \frac{(\xi_2 x y \mid \psi_2)}{(\xi_2 \psi_2)},$$

so folgt (vgl. § 16, Nr. 38b)

$$(36) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2) = -\frac{(\xi_1 \xi_2 \mid \psi_1 \psi_2)}{(\psi_1 \xi_1)(\psi_2 \xi_2)} = -\frac{\overline{\xi_1 \xi_2} \cdot \sin(\psi_1 \psi_2) \cdot \cos \operatorname{ang}(\mathfrak{P}_{\xi_1}^{\xi_2}, \mathfrak{P}_{\psi_1}^{\psi_2})}{\operatorname{dist}(\psi_1, \xi_1) \operatorname{dist}(\psi_2, \xi_2)}.$$

Wir erhalten also einen weiteren dem Satze von Chasles analogen Satz: Der Quotient rechts hat einen von der ausgeführten Zerlegung unabhängigen und zwar rationalen Werth.

Zusammenfassung.

Die angestellten Ueberlegungen enthalten eine directe analytische Begründung des Satzes, dass die als „geometrische Addition" der Stäbe, Keile und Quirle bezeichneten Constructionen das associative Gesetz befolgen, und ausserdem enthalten sie den Nachweis, dass diese dreierlei Gruppen von Constructionen zu einander parallel laufen.

Das Hauptergebniss unserer Betrachtung kann nämlich so ausgedrückt werden:

(B) Jeder geometrischen Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen kann eine Alternante

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{x})$$

zugeordnet werden, und umgekehrt entspricht einer solchen ebensowohl eine Summe von Stäben als auch eine Summe von Keilen und eine Summe von Quirlen. Diese geometrischen Summen stehen zu einander und, im besonderen Falle, zu den Summen gewisser Vectoren (Satz A, S. 157) *in dem im ersten Abschnitt beschriebenen Verhältniss. Solche Summen werden also geometrisch addirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt, und umgekehrt.*

Es versteht sich, dass wenn

$$(37) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{R}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{Q}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{U}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{x})$$

gesetzt wird, dann auch

$$(38) \qquad \sqrt{\mathfrak{S}\,|\,\mathfrak{S}} = \sqrt{\mathfrak{R}\,|\,\mathfrak{R}} = \sqrt{\mathfrak{Q}\,|\,\mathfrak{Q}} = \sqrt{\mathfrak{U}\,\mathfrak{U}}$$

erklärt werden muss.

Beachtung verdienen die formalen Analogieen, die zwischen den auf Stäbe, Keile und Quirle bezüglichen Gleichungen stattfinden: Man vergleiche z. B. die Formeln § 18, Nr. 23; § 19, Nr. 15, 28, 31. Diese Analogieen sind um so auffallender, als dem Anscheine nach die genannten Gleichungen doch recht verschiedenartige Constructionen ausdrücken. In der That sind aber, wie wir im ersten Abschnitt schon bemerkt haben, diese Constructionen verschiedene Grenzfälle einer und derselben Construction im Nicht-Euklidischen Raume, und so gehen auch die angeführten vier Gleichungen durch eben so viele verschiedene Grenzübergänge aus einer einzigen Gleichung hervor. Wir werden solchen übrigens auch in der algebraischen Theorie natürlich vielfach durchbrochenen Analogieen weiterhin immer wieder begegnen.

§ 20.

Begleitende Stäbe, Keile und Quirle.

Wir hatten in unserem ersten Abschnitt den Begriff des begleitenden Stabes und Keiles einer geometrischen Summe von Keilen eingeführt; und ebenso den Begriff des begleitenden Quirles einer geometrischen Summe von Quirlen. Wir wollen nun für diese Gebilde eine analytische Darstellung suchen, um mit deren Hülfe mehrere der früher geometrisch begründeten Sätze nun auch algebraisch abzuleiten. Vor-

aus schicken wir die Lösung zweier Aufgaben, die — nach dem Satze XXIII, S. 120 — mit dem berührten Gegenstande nahe zusammenhängen.

Es soll eine gegebene Alternante $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ *nach einem eigentlichen Punkt o und nach der unendlich fernen Ebene zerlegt werden.*

D. h. wir verlangen, $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ in zwei specielle Alternanten $(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{W}_2\mathfrak{X})$ zu zerlegen, so dass $(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) = 0$ und $(\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}) = 0$ eine eigentliche und eine uneigentliche Gerade bedeuten, deren erste durch einen beliebigen Punkt o geht; oder wenn wir $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ z. B. als algebraisches Bild einer geometrischen Summe von Stäben betrachten, wir verlangen diese Summe in einen einzelnen Stab und ein Stäbepaar zu zerlegen, derart, dass die Gerade des Stabes durch den Punkt o geht. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen: Wir finden, wenn

$$(1) \qquad (\mathfrak{W}\mathfrak{X}_x^y) = (\mathfrak{W}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) + (\mathfrak{W}_2\mathfrak{X})$$

gesetzt wird,

$$(2) \qquad (\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}_x^y) = (\mathfrak{W}\mathfrak{X}_x^y) - \left\{\frac{(lx)}{(lo)}(\mathfrak{W}\mathfrak{X}_o^y) - \frac{(ly)}{(lo)}(\mathfrak{W}\mathfrak{X}_o^x)\right\}.$$

Diese Lösung lässt sich in eine noch etwas elegantere Form bringen. Schreiben wir nämlich symbolisch (vgl. S. 152)

$$(3) \qquad (\mathfrak{W}\mathfrak{X}_x^y) = \tfrac{1}{2}(pqxy),$$

so zeigt die aus der Nr. 41 in § 16 sich ergebende Umformung

$$\tfrac{1}{2}(lo)\{(lx)(pqoy) - (ly)(pqox)\} =$$
$$= -\tfrac{1}{4}(\lambda\lambda'\lambda''o)(pqo\lambda)(\lambda'\lambda''xy) = (\mathfrak{W}\mathfrak{P}_o^\lambda)(\mathfrak{P}_o^\lambda\,|\,\mathfrak{X}_x^y),$$

dass

$$(4) \qquad (\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) = (\mathfrak{W}\mathfrak{X}) - \frac{1}{(lo)^2}\cdot(\mathfrak{W}\mathfrak{P}_o^\lambda)(\mathfrak{P}_o^\lambda\,|\,\mathfrak{X})$$

$$(5) \qquad (\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}) = \frac{1}{(lo)^2}\cdot(\mathfrak{W}\mathfrak{P}_o^\lambda)(\mathfrak{P}_o^\lambda\,|\,\mathfrak{X}).$$

Die zweite dieser Formen entspricht einem *Vector*; ist $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ in die Normalform gesetzt, $= (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) + (\mathfrak{V}\mathfrak{X})$, und $(\mathfrak{U}\mathfrak{X})$ identisch gleich Null, so verschwindet $(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X})$, und es wird $(\mathfrak{W}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{V}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{W}_2\mathfrak{X})$. Allgemein setzt der Umstand, dass in den Ausdrücken (4), (5) das Zeichen $\mathfrak{W}$ linear und homogen auftritt, die Thatsache in Evidenz, dass bei Addition mehrerer Formen $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ auch die zum Punkte o gehörigen Stäbe, Vectoren u. s. w. geometrisch addirt werden.

Es soll eine gegebene Alternante $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$ *nach einer eigentlichen Ebene* ω *und senkrecht dazu zerlegt werden.*

D. h. wir setzen wieder

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) + (\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}), \tag{6}$$

verlangen aber jetzt, dass $(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) = 0$ eine Gerade vorstellt, die in der Ebene ω liegt, und $(\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}) = 0$ eine andere Gerade, die auf dieser Ebene senkrecht steht. Den besonderen Fall, wo eine dieser Geraden uneigentlich wird, brauchen wir nicht auszuschliessen. Die Aufgabe ist wenig allgemeiner als die der Projection eines Stabes in eine gegebene Ebene, und sie kann sofort auf diesen besonderen Fall zurückgeführt werden. Wir setzen allgemein, wie oben (Nr. 3)

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{X}) = \tfrac{1}{2}(pqxy),$$

und finden

$$(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) = -\frac{1}{2(\omega\,|\,\omega)}\left\{(\omega x)(pqy\,|\,\omega) - (\omega y)(pqx\,|\,\omega)\right\}. \tag{7}$$

Hier tritt im System von zwei (in ω vereinigten) Ebenen und zwei Geraden oder Gewinden eine bisher noch nicht betrachtete Bewegungsinvariante auf, für die wir ein besonderes Zeichen einführen wollen: Wir schreiben, wenn allgemein

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Z}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_p^q\mathfrak{Z}), \quad (\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}_r^s\mathfrak{Z}) \tag{8}$$

gesetzt wird (vgl. S. 152), und u, v zwei Ebenen bedeuten,

$$(u\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\,|\,v) = -\tfrac{1}{2}(up)(qrs\,|\,v), \tag{9}$$

oder, nach vollzogener Ausrechnung dieses symbolischen Ausdrucks:

$$\begin{aligned}(u\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\,|\,v) = {}& \\ = {}& (u_1\mathfrak{X}_{01} + u_2\mathfrak{X}_{02} + u_3\mathfrak{X}_{03})(v_1\mathfrak{Y}_{23} + v_2\mathfrak{Y}_{31} + v_3\mathfrak{Y}_{12}) - \\ - {}& (u_0\mathfrak{X}_{01} \quad * \quad - u_2\mathfrak{X}_{12} + u_3\mathfrak{X}_{31})(v_2\mathfrak{Y}_{03} - v_3\mathfrak{Y}_{02}) - \\ - {}& (u_0\mathfrak{X}_{02} + u_1\mathfrak{X}_{12} \quad * \quad - u_3\mathfrak{X}_{23})(v_3\mathfrak{Y}_{01} - v_1\mathfrak{Y}_{03}) - \\ - {}& (u_0\mathfrak{X}_{03} - u_1\mathfrak{X}_{31} + u_2\mathfrak{X}_{23} \quad * \quad)(v_1\mathfrak{Y}_{02} - v_2\mathfrak{Y}_{01}).\end{aligned} \tag{9b}$$

Invarianten dieses Typus sind mit den schon eingeführten Invarianten $(u\,|\,v)$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ durch die Relation

$$(u\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\,|\,v) + (u\mathfrak{Y}\mathfrak{X}\,|\,v) = (u\,|\,v)(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) \tag{10}$$

verbunden. Mit Hülfe des für sie eingeführten Zeichens lässt sich nun die Lösung unserer Aufgabe so darstellen:

$$(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) = \frac{1}{(\omega\,|\,\omega)}(\omega\mathfrak{X}\mathfrak{W}\,|\,\omega), \tag{11}$$

$$(\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}) = \frac{1}{(\omega\,|\,\omega)}(\omega\mathfrak{W}\mathfrak{X}\,|\,\omega), \tag{12}$$

$$(\mathfrak{W}_1\mathfrak{X}) + (\mathfrak{W}_2\mathfrak{X}) = (\mathfrak{W}\mathfrak{X}).$$

Man beachte, dass auch hier wieder die Grössen $\mathfrak{W}_{ik}$ in den Ausdrücken rechts linear und homogen auftreten.

Begleitende Stäbe der geometrischen Summen von Keilen.

Um den zu einem gegebenen Punkte x gehörigen Stab $\mathfrak{S}_x^x = \mathfrak{S}_x^{x'}$ zu finden, der einen gegebenen Keil $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_\varphi^\omega = \mathfrak{K}_\omega^{\varphi'}$ begleitet, legen wir die Ebene ω durch den Punkt $\bar{x}$, und bringen die in diesem auf ω errichtete Normale mit den Ebenen φ, φ' zum Schnitt in x und x'. Man findet, wenn wie früher

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{X}) = \frac{(\mathfrak{P}_\varphi^\omega \mathfrak{X})}{(\varphi \mid \omega)} = \frac{(\mathfrak{P}_\omega^{\varphi'} \mathfrak{X})}{(\omega \mid \varphi')}$$

gesetzt wird, ohne Weiteres

$$(13) \qquad \begin{aligned} (ux') &= (u\bar{x}) + (\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda)(u\lambda), \\ (ux) &= (u\bar{x}) - (\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda)(u\lambda), \end{aligned}$$

$$(14) \qquad (\mathfrak{S}_x^{\bar{x}}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{S}_{\bar{x}}^{x'}\mathfrak{X}) = \frac{1}{(l\bar{x})^2}(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda)(\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda \mathfrak{X}),$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. Die geometrische Addition der begleitenden Stäbe erfolgt ganz offenbar durch Addition der Alternanten $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ selbst; die Lösung ändert also ihre Form nicht, wenn man an Stelle des einzelnen Keiles $\mathfrak{K}$ eine geometrische Summe von Keilen treten lässt.

Der dem Stabe (14) parallele und an Länge gleiche Vector gehört (nach § 18, Nr. 35) zur Alternante

$$(15) \qquad \frac{1}{(l\bar{x})^2}(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda)(\mathfrak{P}_{\bar{x}}^\lambda \mid \mathfrak{X}):$$

Er ist also identisch mit dem Vector, der bei Zerlegung der Alternante $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ nach dem Punkte $\bar{x}$ und der unendlich fernen Ebene auftritt (s. oben Nr. 5), wie wir das auf geometrischem Wege schon erkannt hatten (S. 43 und S. 120).

Die Ausdrücke rechts in Nr. (13) sind *bilineare Formen* mit den Veränderlichen $\bar{x}$, u, und diese Formen stellen, gleich Null gesetzt, (im Allgemeinen jedenfalls) collineare Transformationen dar (§ 16). Diese Transformationen müssen nun identisch sein mit den im ersten Abschnitt (S. 12 u. ff.) betrachteten und mit $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_1^{-1}$ bezeichneten affinen Transformationen. Es würde keine principielle Schwierigkeit haben, von den Formeln (13) aus durch symbolische Rechnung die im ersten Abschnitt geometrisch begründeten Eigenschaften der genannten Transformationen herzuleiten; wir wollen aber, um längere Entwickelungen zu vermeiden, einen anderen Weg gehen. Hier führen

wir, um unsere weiteren Darlegungen vorzubereiten, zunächst die Gleichungen (13) selbst nochmals in ausgerechneter Form vor*):

$$(13\,b)\qquad \begin{array}{l} \left.\begin{matrix}(ux') = \\ (ux) \;=\end{matrix}\right\} = (\bar{x}_0 u_0 + \bar{x}_1 u_1 + \bar{x}_2 u_2 + \bar{x}_3 u_3) \pm \\ \pm \{ \quad * \qquad * \qquad * \qquad * \quad \} u_0 \pm \\ \pm \{ + \mathfrak{R}_{23}\bar{x}_0 \quad * \quad - \mathfrak{R}_{03}\bar{x}_2 \quad + \mathfrak{R}_{02}\bar{x}_3 \} u_1 \pm \\ \pm \{ + \mathfrak{R}_{31}\bar{x}_0 + \mathfrak{R}_{03}\bar{x}_1 \quad * \quad - \mathfrak{R}_{01}\bar{x}_3 \} u_2 \pm \\ \pm \{ + \mathfrak{R}_{12}\bar{x}_0 - \mathfrak{R}_{02}\bar{x}_1 + \mathfrak{R}_{01}\bar{x}_2 \quad * \quad \} u_3 . \end{array}$$

Aus diesen beiden (in eine Gleichung zusammengefassten) Systemen von je vier Gleichungen zwischen den Grössen x_i, $\bar{x}_i$ und x_i, x_i' müssen also durch Elimination der Grössen $\bar{x}_i$ Transformationsformeln rechtwinkliger *Punkt*coordinaten, oder die Gleichungen einer Bewegung hervorgehen, und zwar muss diese Bewegung von einer Umschraubung verschieden sein.

Wir werden weiterhin sehen, dass sich dies wirklich so verhält.

Begleitende Keile der geometrischen Summen von Keilen.

Um den Keil $\mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}} = \mathfrak{K}_{\underline{u}}^{\underline{u}'}$ zu finden, der zu einer gegebenen eigentlichen Ebene $\underline{u}$ gehört und den Keil $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{\varphi}^{\omega} = \mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi'}$ begleitet, nehmen wir $\omega \perp \underline{u}$ an: Die Ebenen des Büschels durch $\underline{u}$, ω, die auf φ und φ' senkrecht stehen, sind dann die gesuchten Ebenen u, u' (S. 46). Man findet ohne Weiteres (vgl. Nr. 9):

$$(16)\qquad \begin{aligned} (u'x) &= (\underline{u}x) + (\underline{u}\lambda)(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\lambda}^{x}), \\ (ux) &= (\underline{u}x) - (\underline{u}\lambda)(\mathfrak{K}\mathfrak{P}_{\lambda}^{x}), \end{aligned}$$

$$(17)\qquad (\mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{K}_{\underline{u}}^{u'}\mathfrak{X}) = \frac{1}{(\underline{u}\,|\,\underline{u})}(\underline{u}\mathfrak{X}\mathfrak{K}\,|\,\underline{u}).$$

Wieder setzen die Formeln die additive Eigenschaft der betrachteten Gebilde in Evidenz; ferner zeigt eine Vergleichung der Formeln Nr. (11) und (17), dass man den zur Alternante (17) gehörigen Stab erhält, wenn man den zu der Alternante $(\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ gehörigen Stab, oder, im

*) Die Sterne (die Nullen vertreten) sollen dazu dienen, das Bildungsgesetz der Formel anschaulicher zu machen. Die Glieder in der Diagonale fehlen auch bei den entsprechenden Gleichungen der Nicht-Euklidischen Geometrie, die anderen durch Sterne bezeichneten Glieder kommen erst bei dem Grenzübergang zum Euklidischen Raum zum Verschwinden. Dasselbe gilt von den Gleichungen (16b) und (18b).

allgemeinen Falle, die zugehörige Summe von Stäben, in die Ebene $\underline{u}$ projicirt, wie es nach der geometrischen Theorie der Fall sein muss.

Die bilinearen Formen (16) müssen, gleich Null gesetzt, wiederum die im ersten Abschnitt mit $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2^{-1}$ bezeichneten affinen Transformationen darstellen.

Eliminirt man also aus den folgenden beiden Systemen von je vier Gleichungen zwischen den Grössen u_i, $\underline{u}_i$ und $\underline{u}_i$, u_i'

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}(u'x) = \\ (ux) = \end{matrix}\right\} = (\underline{u}_0 x_0 + \underline{u}_1 x_1 + \underline{u}_2 x_2 + \underline{u}_3 x_3) \pm \\
&\pm \{ * \quad - \mathfrak{K}_{23}\underline{u}_1 - \mathfrak{K}_{31}\underline{u}_2 - \mathfrak{K}_{12}\underline{u}_3 \} x_0 \pm \\
&\pm \{ * \quad * \quad - \mathfrak{K}_{03}\underline{u}_2 + \mathfrak{K}_{02}\underline{u}_3 \} x_1 \pm \\
&\pm \{ * \quad + \mathfrak{K}_{03}\underline{u}_1 \quad * \quad - \mathfrak{K}_{01}\underline{u}_3 \} x_2 \pm \\
&\pm \{ * \quad - \mathfrak{K}_{02}\underline{u}_1 + \mathfrak{K}_{01}\underline{u}_2 \quad * \quad \} x_3
\end{aligned} \tag{16b}
$$

die Grössen u_i, so müssen Transformationsformeln rechtwinkliger *Ebenen*coordinaten, oder die Gleichungen einer Bewegung hervorgehen; und zwar muss sich diese Bewegung als identisch erweisen mit der aus den Gleichungen (13) abzuleitenden Bewegung.

Wir werden auch diesen Satz weiterhin bestätigt finden.

Begleitende Quirle der geometrischen Summen von Quirlen.

Sei vorgelegt zunächst ein einzelner Quirl $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\varphi^o = \mathfrak{Q}_o^{\varphi'}$; so finden sich, durch leichte Rechnung, wie in den vorhergehenden Fällen, die Begrenzungspunkte x, x' des zu einer gegebenen Ebene $\overline{\overline{u}}$ gehörigen und $\mathfrak{Q}$ begleitenden Quirls $\mathfrak{Q}_x^u = \mathfrak{Q}_{\overline{\overline{u}}}^{x'}$:

$$
\begin{aligned}
(ux') &= (\overline{\overline{u}} \,|\, u) - (\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_{\overline{\overline{u}}}^{u}), \\
(ux) &= (\overline{\overline{u}} \,|\, u) + (\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_{\overline{\overline{u}}}^{u}),
\end{aligned} \tag{18}
$$

ferner die zu diesem begleitenden Quirl gehörige Alternante:

$$
(\mathfrak{Q}_x^{\overline{\overline{u}}}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{Q}_{\overline{\overline{u}}}^{x'}\mathfrak{X}) = -\frac{1}{(\overline{\overline{u}} \,|\, \overline{\overline{u}})} (\overline{\overline{u}}\mathfrak{Q}\mathfrak{X} \,|\, \overline{\overline{u}}). \tag{19}
$$

Beide Formeln gelten ohne Weiteres auch in dem Fall, wo $\mathfrak{Q}$ eine geometrische Summe von Quirlen und $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$ die zugehörige Alternante bedeutet; ferner setzt die Uebereinstimmung der Ausdrücke (19) und (12) die Thatsache in Evidenz, dass bei Zerlegung der zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Summe von Stäben nach $\overline{\overline{u}}$ und senkrecht dazu, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, der zweite Stab $\mathfrak{S}_2$ zu dem begleitenden Quirle gehört.

Auch die Formeln (18) führen wir nochmals in entwickelter Gestalt vor:

$$
\begin{aligned}
&(ux') = \\
&(ux) =
\end{aligned}
\Big\} = (\ * \quad \overline{\overline{u}}_1 u_1 + \overline{\overline{u}}_2 u_2 + \overline{\overline{u}}_3 u_3) \pm
$$

$$
\begin{aligned}
&\pm \{ \quad * \quad && \mathfrak{D}_{01}\overline{\overline{u}}_1 + \mathfrak{D}_{02}\overline{\overline{u}}_2 + \mathfrak{D}_{03}\overline{\overline{u}}_3 \} u_0 \pm \\
&\pm \{ - \mathfrak{D}_{01}\overline{\overline{u}}_0 && * \quad + \mathfrak{D}_{12}\overline{\overline{u}}_2 - \mathfrak{D}_{31}\overline{\overline{u}}_3 \} u_1 \pm \\
&\pm \{ - \mathfrak{D}_{02}\overline{\overline{u}}_0 - \mathfrak{D}_{12}\overline{\overline{u}}_1 && * \quad + \mathfrak{D}_{23}\overline{\overline{u}}_3 \} u_2 \pm \\
&\pm \{ - \mathfrak{D}_{03}\overline{\overline{u}}_0 + \mathfrak{D}_{31}\overline{\overline{u}}_1 - \mathfrak{D}_{23}\overline{\overline{u}}_2 && * \quad \} u_3 .
\end{aligned}
\tag{18b}
$$

Auch aus diesen beiden Systemen von zweimal vier Gleichungen endlich müssen sich also, im Allgemeinen, durch Elimination der Grössen $\overline{\overline{u}}_i$ die in Punktcoordinaten geschriebenen Gleichungen einer Bewegung ergeben; nämlich, so lange die geometrische Summe $\mathfrak{D}$ von Quirlen sich nicht auf einen uneigentlichen Quirl reducirt, einer Bewegung, die von einer Drehung verschieden ist; im ausgeschlossenen Falle aber die Gleichungen einer ausgearteten Umschraubung (S. 76).

§ 21.

Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen *).

Führt man die im vorigen Paragraphen angezeigten Eliminationen wirklich aus, so ergeben sich zwei verschiedene Darstellungsweisen der ∞^6 Bewegungen im Raume, d. h. des Coefficientensystems einer rechtwinkligen Coordinatentransformation durch sechs von einander unabhängige Grössen, sogenannte Parameter. Keine dieser beiden Parameterdarstellungen ist allgemeingültig; es ist aber sehr bemerkenswerth, dass beide enthalten sind in einer Parameterdarstellung der Bewegungen, die ausnahmslos anwendbar ist, und sich von jenen nur durch die Einführung gewisser überzähliger Parameter unterscheidet.

Wir führen zunächst die Darstellung der Bewegungen in (homogenen, rechtwinkligen) Punkt-, Gewinde- und Ebenencoordinaten an, indem wir die Transformationscoefficienten wie folgt bezeichnen:

$$
\begin{aligned}
x_0' &= a_{00}x_0 \quad * \quad * \quad * \ , \\
x_1' &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 , \\
x_2' &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 , \\
x_3' &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 ;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

*) S. die Abhandlung des Verfassers: Von den Bewegungen und Umlegungen, II. Math. Ann. Bd. 39 (1891) S. 514 u. ff., auf die wir wegen einer eingehenderen Behandlung des Gegenstandes verweisen. Man findet dort die Parameter (α, β) auf zwei verschiedene Arten abgeleitet; der Grundgedanke der im Texte vorgeführten Herleitung wird ebenfalls angedeutet (S. 546). Eine vierte Art der Begründung geben wir weiter unten.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_{01}' = a_{11}\mathfrak{X}_{01} + a_{12}\mathfrak{X}_{02} + a_{13}\mathfrak{X}_{03},\\
&\mathfrak{X}_{23}' = a_{11}\mathfrak{X}_{23} + a_{12}\mathfrak{X}_{31} + a_{13}\mathfrak{X}_{12} +\\
&\qquad + b_{11}\mathfrak{X}_{01} + b_{12}\mathfrak{X}_{02} + b_{13}\mathfrak{X}_{03}, \text{ u. s. w.}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
u_0' &= a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3,\\
u_1' &= \ * \qquad a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3,\\
u_2' &= \ * \qquad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3,\\
u_3' &= \ * \qquad a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Zwischen den Grössen $a_{00}, a_{11} \ldots a_{33}$ bestehen die bekannten Relationen:

$$
\begin{aligned}
&a_{k1}^2 + a_{k2}^2 + a_{k3}^2 = a_{00}^2 = a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + a_{3k}^2;\\
&a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{k3} = 0,\\
&a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = 0;\\
&a_{00}a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\\
&a_{00}a_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32},\\
&a_{00}a_{32} = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}, \text{ u. s. f.};\\
&|a_{11}a_{22}a_{33}| = a_{00}^3;
\end{aligned}
\qquad (i \neq k)
\tag{4}
$$

dazu kommen noch die folgenden leicht herzuleitenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&a_{00}a_{0k} + a_{10}a_{1k} + a_{20}a_{2k} + a_{30}a_{3k} = 0,\\
&a_{00}a_{k0} + a_{01}a_{k1} + a_{02}a_{k2} + a_{03}a_{k3} = 0;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{00}b_{11} = a_{20}a_{31} - a_{30}a_{21},\\
&a_{00}b_{23} = a_{30}a_{13} - a_{10}a_{33},\\
&a_{00}b_{32} = a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12}, \text{ u. s. w.}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Unter diesen Voraussetzungen also, deren gegenseitige Abhängigkeit wir hier nicht zu untersuchen brauchen, stellen die Gleichungen (1), (2), (3), falls $a_{00} \neq 0$, eine Bewegung, und zwar eine und dieselbe Bewegung dar.

Wir definiren nun, in verschiedener Weise, zwei Systeme homogener Grössen:

Wir setzen im Falle der Gleichungen (13b) und (16b) des § 20:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_{01} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \mathfrak{K}_{02} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad \mathfrak{K}_{03} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_0},\\
&\mathfrak{K}_{23} = -\frac{\beta_1}{\alpha_0}, \quad \mathfrak{K}_{31} = -\frac{\beta_2}{\alpha_0}, \quad \mathfrak{K}_{12} = -\frac{\beta_3}{\alpha_0},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

und ebenso im Falle der Gleichungen (18b) des § 20:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Q}_{01} &= \frac{\alpha_1}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{02} = \frac{\alpha_2}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{03} = \frac{\alpha_3}{\beta_0}, \\ \mathfrak{Q}_{23} &= \frac{\beta_1}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{31} = \frac{\beta_2}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{12} = \frac{\beta_3}{\beta_0}. \end{aligned}$$

Führen wir dann in den beiden ersten Fällen einen neuen (überzähligen) Parameter β_0 und im letzten einen neuen Parameter α_0 ein durch die Gleichung

$$(9)\qquad \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

so entsteht durch die (auf S. 172, 173, 174) angezeigten Eliminationen in allen drei Fällen dieselbe Formelgruppe.

Es werden nämlich jetzt die (nur bis auf einen gemeinsamen Factor bestimmten) Coefficienten in den Gleichungen einer Bewegung durch die acht Parameter α_i, β_i ausgedrückt, wie folgt:

$$(10)\qquad \begin{aligned} a_{00} &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ a_{11} &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ a_{22} &= \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ a_{33} &= \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1), \\ a_{31} &= 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2), \qquad a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2), \\ a_{12} &= 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3), \qquad a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_2); \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} a_{10} &= 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ a_{20} &= 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0), \\ a_{30} &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0), \\ a_{01} &= 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \\ a_{02} &= 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0), \\ a_{03} &= 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0); \end{aligned}$$

$$(12)\qquad \begin{aligned} b_{11} &= 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3), \\ b_{23} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ b_{32} &= 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen befriedigen in der That identisch die Relationen (4), (5), (6); umgekehrt kann man aber auch, wenn eine Bewegung z. B. durch die Gleichungen (1) gegeben ist, deren Coefficienten den Gleichungen (4) genügen, ein einziges System von acht Verhältnissgrössen α_i, β_i ermitteln, die der Bedingung (9) genügen, und vermöge deren die Transformationscoefficienten sich, von einem unbestimmt bleibenden Proportionalitätsfactor abgesehen, ausdrücken lassen durch

die Gleichungen (10), (11), (12). Man hat nämlich zunächst, als Folge von (10), die Proportionen

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \\
&= a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} : a_{23} - a_{32} : a_{31} - a_{13} : a_{12} - a_{21} = \\
&= a_{23} - a_{32} : a_{00} + a_{11} - a_{22} - a_{33} : a_{12} + a_{21} : a_{31} + a_{13} = \\
&= a_{31} - a_{13} : a_{12} + a_{21} : a_{00} - a_{11} + a_{22} - a_{33} : a_{23} + a_{32} = \\
&= a_{12} - a_{21} : a_{31} + a_{13} : a_{23} + a_{32} : a_{00} - a_{11} - a_{22} + a_{33},
\end{aligned}
$$

vermöge deren, so lange a_{00} nicht verschwindet, sich die Verhältnisse der Grössen α_i *immer* finden lassen. Nachdem die Werthe dieser Grössen selbst irgendwie bestimmt sind, ergeben sich völlig bestimmte Werthe der Grössen β_i:

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad 2a_{00}\cdot\beta_0 &= \quad \alpha_1 a_{10} + \alpha_2 a_{20} + \alpha_3 a_{30}, \\
2a_{00}\cdot\beta_1 &= -\alpha_0 a_{10} + \alpha_3 a_{20} - \alpha_2 a_{30}, \\
2a_{00}\cdot\beta_2 &= -\alpha_3 a_{10} - \alpha_0 a_{20} + \alpha_1 a_{30}, \\
2a_{00}\cdot\beta_3 &= \quad \alpha_2 a_{10} - \alpha_1 a_{20} - \alpha_0 a_{30}.
\end{aligned}
$$

Jede Bewegung lässt sich also durch die Parameter (α, β) *darstellen, und zwar nur auf eine einzige Weise.*

Die hiermit eingeführten Bewegungsparameter lassen sich nun, wie man durch allerdings umständliche, aber doch ganz elementare Rechnungen finden kann, in einfacher Weise zur Zusammensetzung mehrerer Bewegungen verwenden*).

Stehen die Bewegungen S, S', S'' *in der Beziehung* $SS' = S''$, *so dass z. B.*

$$x\{S\}x'\{S'\}x'', \qquad x\{S''\}x'',$$

so werden die Parameter der zusammengesetzten Bewegung S'' *aus denen von* S *und* S' *abgeleitet vermöge der Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
(15)\qquad \alpha_0'' &= \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' &= \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\
\alpha_2'' &= \alpha_0\alpha_2' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3', \\
\alpha_3'' &= \alpha_0\alpha_3' + \alpha_3\alpha_0' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1';
\end{aligned}
$$

*) Diese Rechnungen lassen sich durch Gebrauch der Quaternionen oder Biquaternionen sehr abkürzen (s. a. a. O.). Wir wünschen aber die Symbole nicht zu häufen und verzichten daher auf den Gebrauch dieser Hülfsmittel.

$$
\begin{aligned}
\beta_0'' &= \alpha_0\beta_0' - \alpha_1\beta_1' - \alpha_2\beta_2' - \alpha_3\beta_3' + \\
&\quad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3', \\
\beta_1'' &= \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' + \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' + \\
&\quad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2', \\
\beta_2'' &= \alpha_0\beta_2' + \alpha_2\beta_0' + \alpha_3\beta_1' - \alpha_1\beta_3' + \\
&\quad + \beta_0\alpha_2' + \beta_2\alpha_0' + \beta_3\alpha_1' - \beta_1\alpha_3', \\
\beta_3'' &= \alpha_0\beta_3' + \alpha_3\beta_0' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1' + \\
&\quad + \beta_0\alpha_3' + \beta_3\alpha_0' + \beta_1\alpha_2' - \beta_2\alpha_1'.
\end{aligned} \tag{16a}
$$

Es ergiebt sich daraus u. A.

$$a_{00}a_{00}' = a_{00}''. \tag{17}$$

Wir fügen sogleich noch einige geometrische Folgerungen hinzu, auf die wir uns zu stützen haben werden.

Die Schraubungsaxe der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ hat die Liniencoordinaten:

$$\mathfrak{P}_{01} = (a_{00} - \alpha_0^2)\cdot\alpha_1, \quad \mathfrak{P}_{23} = \alpha_0\beta_0\cdot\alpha_1 + (a_{00} - \alpha_0^2)\cdot\beta_1, \tag{18}$$

u. s. w.

*Ist ϑ der halbe Drehungswinkel, η die halbe Schiebungsgrösse der Schraubung $S(\alpha, \beta)$, bedeuten ferner λ_1, λ_2, λ_3 die Winkel, die die (orientirte) Schraubungsaxe von S mit den (ebenfalls orientirten) Coordinatenaxen bilden, so ist**)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}\vartheta : \cos\lambda_1 : \cos\lambda_2 : \cos\lambda_3 : \eta \\
&= -\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Ist also S eine Umschraubung, so verschwindet der Parameter α_0, und umgekehrt.

Ist also S eine Drehung (Schiebung), so verschwindet der Parameter β_0, und umgekehrt.

Ist S eine Umwendung, so ist $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, und die Umwendungsaxe hat die Coordinaten

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12} \\
&= \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.
\end{aligned} \tag{20}$$

Ist S eine Schiebung, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ und umgekehrt. Die halbe Schiebungsgrösse und die Richtungscosinus der Schiebung sind dann bestimmt durch die Proportion

---

*) Das Vorzeichen von $\operatorname{ctg}\vartheta$ ist a. a. O. unrichtig angegeben. — Um statt der Proportion (19) eine Gleichheit der entsprechenden Glieder herzustellen, hat man allen fünf Ausdrücken rechts *denselben* Nenner $\sqrt{a_{00} - \alpha_0^2}$ hinzuzufügen.

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\cos\lambda_1 : \cos\lambda_2 : \cos\lambda_3 : \frac{1}{\eta} \\ &= \beta_1 \ : \ \beta_2 \ : \ \beta_3 \ : -\alpha_0 . \end{aligned}$$

Endlich ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: *Eine von einer Schiebung verschiedene Bewegung $S(\alpha'', \beta'')$ in eine Drehung $S(\alpha, \beta)$ und eine mit dieser vertauschbare Schiebung $S(\alpha', \beta')$ zu zerlegen.*

Man setze etwa

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\alpha_0 = \alpha_0'', \quad \alpha_1 = \alpha_1'', \ldots, \\ &\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \beta_1'' + \frac{\alpha_0''\beta_0''}{\alpha_1''^2 + \alpha_2''^2 + \alpha_3''^2} \cdot \alpha_1'', \end{aligned}$$

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\alpha_0' = 1, \quad \alpha_1' = 0, \ldots, \\ &\beta_0' = 0, \quad \beta_1' = -\frac{\beta_0''}{\alpha_1''^2 + \alpha_2''^2 + \alpha_3''^2} \cdot \alpha_1'', \end{aligned}$$

u. s. f.

Nunmehr gelangen wir zu einer sachgemässen Fassung der im vorigen Paragraphen behaupteten Sätze.

Drückt man die Coordinaten $\mathfrak{R}_{ij}$ einer nicht verschwindenden geometrischen Summe $\mathfrak{R}$ von Keilen nach Nr. (7) durch die Parameter (α, β) aus, so stellen die Gleichungen (13b) *in § 20* (S. 172) *die affinen Transformationen $\frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1^{-1}}$ dar, und ebenso die Gleichungen* (16b) *die affinen Transformationen $\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2^{-1}}$. Die Bewegung $S(\alpha, \beta)$ ist also der Summe von Keilen associirt.*

Dass die Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ nur vorhanden sind, so lange die Bewegung S keine Umschraubung ist, geben die Formeln dadurch zu erkennen, dass in Nr. (7) der Parameter α_0 als gemeinsamer Nenner auftritt.

Ebenso ergiebt sich:

Drückt man die Coordinaten $\mathfrak{Q}_{ij}$ einer von einem uneigentlichen Quirl verschiedenen geometrischen Summe $\mathfrak{Q}$ von Quirlen nach Nr. (8) durch die Parameter (α, β) aus, so stellen die Gleichungen (18b) *in § 20* (S. 174) *die Correlationen $\frac{T}{T^{-1}}$ dar. Die Bewegung $S(\alpha, \beta)$ ist also der Summe von Quirlen associirt.*

Hier ist eine wesentliche Voraussetzung, die nicht aufgegeben werden kann, dass β_0 von Null verschieden, oder dass S keine Drehung ist. Während aber, bei der festgehaltenen Beschränkung auf reelle Grössen, die Ungleichung $\alpha_0 \neq 0$ stets die andere $\alpha_{00} \neq 0$ nach sich zieht, ist Dasselbe nicht der Fall, wenn man $\beta_0 \neq 0$ voraussetzt: So

werden wir nun auch auf algebraischem Wege zu einer Erweiterung unseres Satzes, zu dem Begriff der *ausgearteten Umschraubung* geführt.

Die „ausgearteten Umschraubungen“ (S. 76) nun lassen sich nicht unmittelbar durch die Parameter (α, β) darstellen; sie entstehen aber, wie wir sehen werden, aus unseren Formeln durch einen Grenzübergang.

Zunächst erhalten wir, wenn wir in den Gleichungen (18b) des § 20 entsprechend dem Uebergang vom eigentlichen zum uneigentlichen Quirl $\mathfrak{Q}_{01} = \mathfrak{Q}_{02} = \mathfrak{Q}_{03} = 0$ setzen, die verkürzten Gleichungen

$$(24)\qquad \left.\begin{matrix}(ux') = \\ (ux) = \end{matrix}\right\} = (\bar{\bar{u}}_1 u_1 + \bar{\bar{u}}_2 u_2 + \bar{\bar{u}}_3 u_3) \pm$$
$$\pm \{\mathfrak{Q}_{12}\bar{\bar{u}}_2 - \mathfrak{Q}_{31}\bar{\bar{u}}_3\} u_1 \pm \{\mathfrak{Q}_{23}\bar{\bar{u}}_3 - \mathfrak{Q}_{12}\bar{\bar{u}}_1\} u_2$$
$$\pm \{\mathfrak{Q}_{31}\bar{\bar{u}}_1 - \mathfrak{Q}_{23}\bar{\bar{u}}_3\} u_3 .$$

Setzen wir nun, wie oben unter (8):

$$(8b)\qquad \mathfrak{Q}_{23} = \frac{\beta_1}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{31} = \frac{\beta_2}{\beta_0}, \quad \mathfrak{Q}_{12} = \frac{\beta_3}{\beta_0},$$

so gelangen wir durch Elimination der Grössen $\bar{\bar{u}}_i$ zu Gleichungen

$$(25)\qquad x_k' = \mathfrak{a}_{k1} x_1 + \mathfrak{a}_{k2} x_2 + \mathfrak{a}_{k3} x_3 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

die sich von den Gleichungen (1) nur dadurch unterscheiden, dass die Glieder mit x_0 fehlen, und dass in den Ausdrücken (10) der nun mit $\mathfrak{a}_{ik}$ bezeichneten Transformationscoefficienten an Stelle der Grössen α_i die Grössen β_i getreten sind.

Wir erhalten also aus den Gleichungen (18b) *in § 20 im Grenzfall des uneigentlichen Quirls* ($\mathfrak{Q}_{01} = \mathfrak{Q}_{02} = \mathfrak{Q}_{03} = 0$) *an Stelle der Gleichungen einer Bewegung eine Transformation* (25) *der Punkte der unendlich fernen Ebene, die für diese Punkte mit einer Drehung, und zwar — da* $\beta_0 \neq 0$ *— mit einer nicht-involutorischen Drehung übereinstimmt.*

Diese „ausgearteten Umschraubungen“ werden also durch die Gleichungen (8b) *den uneigentlichen Quirlen zugeordnet: Sie sind ihnen associirt.*

Der mod. π bestimmte halbe Winkel ϑ_* der genannten Drehung ist nach Obigem gegeben durch die Gleichung

$$(26a)\qquad -\operatorname{ctg}\vartheta_* = \frac{\beta_0}{\sqrt{\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2} + \beta_3^{\,2}}};$$

andrerseits hatten wir für die Oeffnung des uneigentlichen Quirls $\mathfrak{Q}$ (§ 18, Nr. 29, § 19, Nr. 22) den Ausdruck

(26 b) $$\frac{(lo)}{\sqrt{(\mathfrak{O}\mathfrak{P}_0^{\lambda})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{O}_{23}{}^2 + \mathfrak{O}_{31}{}^2 + \mathfrak{O}_{12}{}^2}}$$

abgeleitet. Beide Ausdrücke sind einander gleich, wie es die geometrische Theorie verlangt (s. S. 77), sobald die Axe der Drehung und eine Hauptaxe des uneigentlichen Quirls (d. h. seines Trägers) dieselben Richtungscosinus haben, also gleichartig orientirt sind.

Als ein Hauptergebniss dieser Untersuchung erhalten wir nunmehr die folgenden beiden Sätze:

(C.) *Jeder Bewegung $S(\alpha, \beta)$, deren Parameter α_0 nicht verschwindet, lässt sich — durch die Gleichungen* (7) *— eine Alternante* ($\mathfrak{R}\mathfrak{X}$) *eindeutig umkehrbar zuordnen.*

Bewegungen werden linear superponirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

(D.) *Jeder Bewegung oder ausgearteten Umschraubung, deren Parameter β_0 nicht verschwindet, lässt sich — durch die Gleichungen* (8) *— eine Alternante* ($\mathfrak{O}\mathfrak{X}$) *eindeutig umkehrbar zuordnen.*

Die genannten Bewegungen und deren bezeichnete Grenzfälle werden correlativ superponirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

Schliesslich wollen wir nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass auch das in § 2 behandelte, durch die Zuordnung zwischen Mitte $\bar{x}$ und Normalebene $\bar{u}$ einer Sehne xx' bestimmte Nullsystem $\mathfrak{W}$ sich mit Hülfe unserer Parameter einfach darstellen lässt.

Das im Falle $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ vorhandene Nullsystem $\mathfrak{W}$ (S. 21) oder das zugehörige Gewinde hat die Coordinaten:

(26) $$\begin{aligned} &\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12} \\ &= \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 \ . \end{aligned}$$

Dass und wie diese Gebilde im ausgeschlossenen Falle ausarten, ist leicht zu sehen.

Liegt ein Keil, oder ein eigentlicher Quirl vor, so kann man, nach der geometrischen Theorie, die associirte Bewegung in der Weise finden, dass man die Spiegelungen an den begrenzenden Ebenen oder Punkten hinter einander ausführt. Diese Operationen sind nicht Bewegungen: Sie gehören zu der vom Verfasser als *Umlegungen* bezeichneten Schaar von Transformationen des Raumes, die alle Figuren in symmetrisch-gleiche Figuren überführen. Um auch diese Operationen

leicht analytisch ausführen zu können, wollen wir auch auf die Umlegungen noch kurz eingehen.

Wir bedienen uns, oder können uns zur Darstellung der Umlegungen bedienen, wiederum der acht homogenen Parameter (α, β), die durch die Relation (9) verbunden sind. Offenbar erhalten wir alle Umlegungen, und jede im Wesentlichen nur einmal, wenn wir unter Beibehaltung der Ausdrücke (10), (11), (12) an Stelle der Gleichungen (1), (2), (3) die folgenden treten lassen:

$$(27)\qquad x_0' = -a_{00}x_0, \quad x_k' = a_{k0}x_0 + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3;$$

$$(28)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01}' &= -a_{11}\mathfrak{X}_{01} - a_{12}\mathfrak{X}_{02} - a_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{23}' &= a_{11}\mathfrak{X}_{23} + a_{12}\mathfrak{X}_{31} + a_{13}\mathfrak{X}_{12} + \\ &\quad + b_{11}\mathfrak{X}_{01} + b_{12}\mathfrak{X}_{02} + b_{13}\mathfrak{X}_{03}, \quad \text{u. s. w.;} \end{aligned}$$

$$(29)\qquad \begin{aligned} u_0' &= -a_{00}u_0 - a_{01}u_1 - a_{02}u_2 - a_{03}u_3, \\ u_k' &= a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + a_{k3}u_3 \end{aligned}$$

$(k = 1, 2, 3.)$. Es folgt daraus:

Ist $S(\alpha, \beta)$ eine Bewegung und $S'(\alpha'\beta')$ eine Bewegung oder eine Umlegung, so werden die Parameter der zusammengesetzten Transformation $S'' = SS'$, die im ersten Fall eine Bewegung, im zweiten eine Umlegung ist, beidemal geliefert durch die Gleichungen (15, 16a).

Ist dagegen $S(\alpha, \beta)$ eine Umlegung und $S'(\alpha', \beta')$ eine Bewegung oder eine Umlegung, so werden die Parameter α'', β'' der zusammengesetzten Transformationen SS' — einer Umlegung oder einer Bewegung — gegeben durch die Gleichungen (15) *und die Gleichungen*

$$(16\text{b})\qquad \begin{aligned} \beta_0'' &= -\alpha_0\beta_0' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3' + \\ &\quad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3', \\ \beta_1'' &= -\alpha_0\beta_1' - \alpha_1\beta_0' - \alpha_2\beta_3' + \alpha_3\beta_2' + \\ &\quad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2', \quad \textit{u. s. w.} \end{aligned}$$

Während also nach Obigem die Entgegengesetzte einer gegebenen Bewegung durch einen Vorzeichenwechsel der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ erhalten wird, hat die Entgegengesetzte einer durch ihre Parameter (α, β) gegebenen Umlegung die Parameter

$$(30)\qquad \alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : -\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.$$

Die Umlegungen verhalten sich in gewisser Hinsicht gerade entgegengesetzt den Bewegungen. Während nämlich bei den Bewegungen der Ort der Sehnenmitten $\bar{x}$ und der Ort der Normalebene $\bar{\bar{u}}$ der Sehnen xx' im Allgemeinen der ganze Punkt- und Ebenenraum, in besonderen Fällen aber eine gerade Linie ist, erfüllen die Sehnenmitten

bei einer Umlegung im Allgemeinen eine Ebene, und sie vereinigen sich im besonderen Falle in demselben Punkt, und ebenso bilden die Normalebenen der Sehnen im Allgemeinen ein Ebenenbündel, und im besonderen Falle vereinigen sie sich alle in einer einzigen Ebene*).

Bei jeder Umlegung $S(\alpha, \beta)$ bleibt (wenigstens) eine eigentliche Ebene in Ruhe, der Ort der Sehnenmitten, die „Mittelebene" der Umlegung, mit den Coordinaten

$$(31) \qquad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \beta_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 .$$

*Bei jeder Umlegung bleibt (wenigstens) ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt in Ruhe***), der Ort der Normalebenen der Sehnen, der „Mittelpunkt" der Umlegung, mit den Coordinaten*

$$(32) \qquad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 .$$

Beide Gebilde, Mittelpunkt und Mittelebene, liegen vereinigt (s. Nr. 9).

Der Mittelpunkt rückt ins Unendliche, wenn der Parameter α_0 verschwindet.

Wird die Mittelebene unbestimmt, so ist die Umlegung eine Spiegelung an einem Punkt, nämlich an ihrem Mittelpunkt.

Die Spiegelung an einem gegebenen Punkt $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ hat also die Parameter

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = x_0 : 0 : 0 : 0 : x_1 : x_2 : x_3 .$$

Wird der Mittelpunkt unbestimmt so ist die Umlegung eine Spiegelung an einer Ebene, nämlich an ihrer Mittelebene.

Die Spiegelung an einer gegebenen Ebene $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$ hat also die Parameter

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_0 : 0 : 0 : 0 .$$

Im Allgemeinen, d. h. wenn die Umlegung weder eine Spiegelung an einem Punkt, noch auch eine Spiegelung an einer Ebene ist, kann sie auf eine einzige Weise zerlegt werden in eine Spiegelung an einer Ebene — ihrer Mittelebene — und eine mit dieser Spiegelung vertauschbare Drehung oder Schiebung; und ebenso kann sie, so lange α_0 nicht verschwindet, auf eine einzige Weise zerlegt werden in eine Spiegelung an einem Punkt — ihrem Mittelpunkt — und eine mit dieser Spiegelung vertauschbare Drehung. Näher auf diese Dinge einzugehen haben wir keine Veranlassung.

---

*) Man findet in der citirten Abhandlung auch rein geometrische Beweise aller der Sätze, die hier der Kürze halber nur algebraisch begründet werden.

**) Abgesehen von dem uneigentlichen Schnittpunkt der Normalen der Mittelebene.

Wir wollen die abgeleiteten Formeln dazu verwenden, den Grenzübergang von einer Umschraubung zu einer ausgearteten Umschraubung nun auch analytisch durchzuführen.

Eine Umschraubung kann zunächst in der Form $\{\xi, \psi\} = \{\xi\}\{\psi\}$ dargestellt werden, d. h. als Folge einer Spiegelung an einem Punkt ξ und einer Ebene ψ. Wir drücken diese Thatsache nach Obigem analytisch aus, indem wir setzen

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_0 = -\xi_0\psi_0 - \xi_1\psi_1 - \xi_2\psi_2 - \xi_3\psi_3,$$
$$\alpha_1 = \xi_0\psi_1, \quad \beta_1 = \xi_2\psi_3 - \xi_3\psi_2, \quad \text{u. s. w.}$$

Um den verlangten Grenzübergang zu leisten, müssen wir nun den Punkt ξ ins Unendliche rücken lassen, und *gleichzeitig* in geeigneter Weise den Punkt x, den wir der Umschraubung unterwerfen wollen. Bei dieser Operation kommt es aber nur darauf an, die Grenzlage des Punktes x^* zu ermitteln, der aus dem Punkte x durch die Spiegelung $\{\xi\}$ hervorgeht; denn die andere Spiegelung $\{\psi\}$, die x^* in den x zugeordneten Punkt x' überführt, bleibt im Grenzfall ungeändert.

So lange nun die Punkte x und ξ im Endlichen liegen, kann die analytische Darstellung der Spiegelung $\{\xi\}$ durch die Gleichungen erfolgen

$$\frac{x_k^*}{x_0^*} + \frac{x_k}{x_0} = 2\frac{\xi_k}{\xi_0} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Wir führen nun unter der erlaubten Voraussetzung $x_0 = x_0^*$ und unter der den allgemeinen Fall darstellenden Annahme

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \neq 0$$

statt der Grössen $x_1, x_2, x_3, x_1^*, x_2^*, x_3^*$ sechs neue Grössen $y_1, y_2, y_3, y_1^*, y_2^*, y_3^*$ ein, die dieselben Verhältnisse haben, vermöge der Gleichungen

$$x_0 = \xi_0(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3),$$
$$x_0^* = \xi_0(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3),$$
$$x_k = y_k(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2),$$
$$x_k^* = y_k^*(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2);$$

wir erhalten dann nach Unterdrückung des zunächst noch von Null verschiedenen Factors ξ_0^* im Nenner die Gleichungen

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(y_k^* + y_k) = 2\xi_k(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3);$$

setzen wir nunmehr $\xi_0 = 0$, und unterdrücken wir in den Ausdrücken der Grössen y_k^*, die ja nur die Rolle von Verhältnissgrössen haben, den von Null verschiedenen Nenner $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, so entstehen die Gleichungen

$$y_1^* = (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) \cdot y_1 + 2\xi_1\xi_2 \cdot y_2 + 2\xi_3\xi_1 \cdot y_3$$

u. s. f., in denen man die Lage des Punktes y nun nicht mehr zu beschränken nöthig hat.

Diese letzten Gleichungen stellen eine involutorische Drehung, eine Umwendung mit den Parametern 0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 soweit dar, als nur Punkte der unendlich fernen Ebene in Betracht gezogen werden. Andrerseits aber reducirt sich auch die Spiegelung an der Ebene ψ, wenn man nur auf die uneigentlichen Punkte achtet, auf eine solche Drehung, nämlich auf die Umwendung

$$y_1' = (\psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2) \cdot y_1^* + 2\psi_1\psi_2 \cdot y_2^* + 2\psi_3\psi_1 \cdot y_3^* .$$

Die beiden gefundenen Umwendungen haben wir nun, nach Nr. (15), zu einer Drehung zusammenzusetzen: die Parameter dieser Drehung werden dann

$$\alpha_0^* = -\xi_1\psi_1 - \xi_2\psi_2 - \xi_3\psi_3$$
$$\alpha_1^* = \quad \xi_2\psi_2 - \xi_3\psi_2, \quad \text{u. s. w.;}$$

d. h. es besteht die Proportion

$$\text{(32)} \qquad \text{Lim.}\{\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3\} = \alpha_0^* : \alpha_1^* : \alpha_2^* : \alpha_3^* .$$

Wir erhalten also zur Darstellung unserer ausgearteten Umschraubung dieselben Gleichungen (25), die wir oben schon auf anderem Wege abgeleitet hatten. —

Wir fügen noch einige Bemerkungen *historischen* Inhalts hinzu.

Die Gleichungen (10) sind die bekannten Formeln Euler's. Die zugehörigen Gleichungen (15) bilden das sogenannte Multiplicationstheorem der *Hamilton'schen Quaternionen*; sie finden sich, wie neuerlich bekannt geworden ist, bereits in nachgelassenen Aufzeichnungen von Gauss. Ebenso bilden die Gleichungen (15) und (16a) zusammen das Multiplicationstheorem einer der drei Arten von *Biquaternionen*, die Clifford betrachtet, aber nicht, wie wir, zu einer Parameterdarstellung der Bewegungen verwendet hat. Von den drei auf die Formeln (13b), (16b), (18b) in § 20 bezüglichen Sätzen findet sich der erste, allerdings nicht ganz correct formulirt, in einer Abhandlung von Rodrigues*). Alle drei Formelgruppen sind verschiedene Grenzfälle von Cayley's Formeln zur Darstellung orthogonaler Substitutionen, und auch die umfassenderen Gleichungen (10), (11) lassen sich durch einen Grenzübergang aus solchen herleiten, die Cayley angegeben hat. (Vgl. hierzu Baltzer's Determinanten, § 14 der IV. Auflage.) — Auch die Formeln Cayley's selbst können in der Weise vervollständigt und, in

*) Des lois géométriques qui régissent les déplacéments d'un système solide dans l'espace. Liouville T. t. 5. (1840). Die Parameter $\mathfrak{R}_{ik}$ sind von ihm so bezeichnet:

$2\mathfrak{R}_{01} = -m$, $2\mathfrak{R}_{02} = -n$, $2\mathfrak{R}_{03} = -p$, $2\mathfrak{R}_{23} = \mathsf{A}$, $2\mathfrak{R}_{31} = \mathsf{B}$, $2\mathfrak{R}_{12} = \Gamma$.

Nicht-Euklidischen Mannigfaltigkeiten von beliebiger Dimensionenzahl geometrisch gedeutet werden, wie ihre von uns behandelten Grenzfälle. (Math. Ann. Bd. 39, S. 444, 446, 513.)

§ 22.

Geometrische Summen von Motoren und Impulsoren.

Um unsere weiteren Darlegungen nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir zunächst einige Formeln zusammen, die sich auf das Rechnen mit den in § 17 (Nr. 34 und 35) eingeführten Invarianten $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ und $\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}$ von drei Geraden oder Gewinden beziehen. Betrachtet man in einem solchen Ausdruck zwei der in ihn eintretenden Gewinde als gegeben, das dritte aber als veränderlich, so ist damit eine Alternante definirt, und es fragt sich, wie die Invarianten der vier Typen $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R})$, $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\}$ zu bilden sind, wenn eine oder mehrere der eintretenden Alternanten ihrerseits auf die genannte Art bestimmt sind. Wir schreiben, um die gesuchten Ausdrücke kurz darstellen zu können,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}, \quad \textit{wenn} \quad (\mathfrak{U}\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) \\ \mathfrak{W} &= \underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}, \quad \textit{wenn} \quad (\mathfrak{W}\mathfrak{Z}) = \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}, \end{aligned}$$

und erhalten dann nach leichter Rechnung die Gleichungen

$$(2a)\qquad (\overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}),$$

$$(2b)\qquad (\overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\,|\,\mathfrak{Z}) = 0,$$

$$(2c)\qquad (\overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = (\overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\overset{\frown}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}) = 0,$$

$$(2d)\qquad \{\overset{\frown}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\} = (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{P}),$$

$$(3a)\qquad (\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{Z}) = \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\},$$

$$(3b)\qquad (\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\,|\,\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}).$$

$$(3c)\qquad (\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = (\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\overset{\frown}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}) = (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{P}),$$

$$(3d)\qquad \{\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\} = (\underset{\smile}{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) =$$

$$= (\mathfrak{X}\mathfrak{P})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Q}) + (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{X}\mathfrak{Q})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{P}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{Y}\mathfrak{P}).$$

Die gestellte Aufgabe ist hiermit für den Fall gelöst, dass *eines* der vorkommenden Gewinde durch das Symbol $\frown$ oder $\smile$ erklärt ist; verwickeltere Fälle lassen sich auf diesen Fall zurückführen, z. B. wird

$$(4)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) &= (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{P}\mathfrak{Q})\\ &= (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{P}).\ -\end{aligned}$$

Sind nun eine *Bewegung* $S(\alpha, \beta)$ und ein *Motor* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ zu derselben geometrischen Summe $\mathfrak{K}$ von Keilen associirt, so kann, nach der geometrischen Theorie, die uns auch hier als Pfadfinder dient, die Abhängigkeit zwischen den Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und den Parametern (α, β) ohne Weiteres gefunden werden: Es ist $S = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$ und daher

$$(5)\qquad \begin{aligned}\alpha_0 &= -(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}), & \beta_0 &= -(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}),\\ \alpha_1 &= \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{03} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{02}, & \beta_1 &= \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{31} -\\ & & &\quad - \mathfrak{Y}_{02}\mathfrak{X}_{12} + \mathfrak{Y}_{03}\mathfrak{X}_{31},\ \text{u. s. w.};\end{aligned}$$

d. h. die Alternante $(\mathfrak{K}\mathfrak{Z})$, die wir nun, da sie auch dem Motor $\mathfrak{M}$ zugeordnet werden kann, lieber mit $(\mathfrak{M}\mathfrak{Z})$ bezeichnen, wird gegeben durch die Gleichung

$$(6)\qquad (\mathfrak{M}\mathfrak{Z}) = \frac{\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$(7)\qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}\mathfrak{M}) = -\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})},$$

$$(8)\qquad \sqrt{\mathfrak{M}\,|\,\mathfrak{M}} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})}.$$

Wir erhalten nunmehr sogleich Ausdrücke für die Oeffnung und die Länge des Motors $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$: Die *Oeffnung* des Motors wird gleich

$$(9)\quad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{\alpha_0} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})} = \sqrt{\mathfrak{M}\,|\,\mathfrak{M}}$$

(vgl. § 17, Nr. 15; § 19, Nr. 4, 11); die *Länge* aber findet sich, falls der Motor kein Translator ist, gleich

$$(10\,\text{a})\quad \eta = \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} = -\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{(\mathfrak{M}\mathfrak{M})}{\sqrt{\mathfrak{M}\,|\,\mathfrak{M}}}$$

(vgl. § 17, Nr. 33; § 19, Nr. 5); falls aber der Motor sich auf einen Translator reducirt, gleich

$$(10\,\text{b})\qquad \eta = -\frac{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}{\alpha_0} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{P}_0^{\lambda})^2}}{(lo)}.$$

(Vgl. § 17, Nr. 42; § 18, Nr. 29; § 21, Nr. 21.)

Ist der Motor nicht durch Anfangs- und Endlinie, sondern durch die zugehörige Alternante $(\mathfrak{M}\mathfrak{Z})$ gegeben, so kann man ihn wiederum

leicht in der Form $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ darstellen: Man nehme die Anfangslinie $\mathfrak{x}$ als Querlinie des zugehörigen Linienkreuzes beliebig an, so also, dass

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{x}) = 0, \qquad (\mathfrak{M} \mid \mathfrak{x}) = 0;$$

die *Endlinie* $\mathfrak{y}$ wird dann gefunden, wenn man setzt $\{\mathfrak{y}\} = \{\mathfrak{x}\}S$ oder

$$\frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})}{(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{x})} = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) + \{\mathfrak{M}\mathfrak{x}\mathfrak{z}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}\mathfrak{M})(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z})}{(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x})}; \tag{11}$$

in der That wird diese Gleichung durch die Substitution (6) in eine Identität verwandelt.

Nunmehr können wir, wenn zwei beliebige Alternanten gegeben sind, diese als algebraische Bilder von Motoren betrachten, und wir können diese Motoren auf eine gemeinsame Anfangslinie $\mathfrak{O}$ bringen. Seien also die beiden Motoren $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{y}}$, so können wir eine Gerade $\mathfrak{z}$ definiren, indem wir, eine veränderliche gerade Linie nunmehr mit $\mathfrak{Xi}$ bezeichnend, den Ansatz machen

$$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{x}}\mathfrak{Xi}) + (\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{y}}\mathfrak{Xi}) = (\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{z}}\mathfrak{Xi}). \tag{12}$$

Die Bestimmung der Geraden $\mathfrak{z}$ wird ermöglicht durch die Gleichung (11): Aus (6) folgt zunächst:

$$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{z}}\mathfrak{Xi}) = \frac{\{\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{Xi}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{x})} + \frac{\{\mathfrak{O}\mathfrak{y}\mathfrak{Xi}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{y})}$$

und aus (11), nach Unterdrückung der stets von Null verschiedenen Nenner,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{z}\mathfrak{Xi}) &= (\mathfrak{O}\mathfrak{Xi}) + \{\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{z}}\mathfrak{O}\mathfrak{Xi}\} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{z}}\mathfrak{M}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{z}})(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Xi}) = \\ &= (\mathfrak{O}\mathfrak{Xi}) + \frac{\{\underbrace{\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{O}\mathfrak{Xi}}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{x})} + \frac{\{\underbrace{\mathfrak{O}\mathfrak{y}\mathfrak{O}\mathfrak{x}}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{y})} - \\ &- \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\underbrace{\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{O}\mathfrak{x}})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{x})^2} + 2\frac{(\underbrace{\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{O}\mathfrak{y}})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{x})(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{y})} + \frac{(\underbrace{\mathfrak{O}\mathfrak{y}(\mathfrak{O}\mathfrak{y})})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{y})^2}\right\}(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Xi}).\end{aligned}$$

Berechnen wir nun diesen Ausdruck mit Hülfe der Formeln (3), so finden wir, wenn wir (wie zuvor in ähnlichen Fällen – § 18, Nr. 23; § 19, Nr. 15 und 28) die erhaltene Gleichung noch durch Zufügung eines Nenners $(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{z}) = (\mathfrak{O} \mid \mathfrak{O})$ erweitern, die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{Xi})}{(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{O})} &= \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{Xi})}{(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{O})} + \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{Xi})}{(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{O})} - \frac{(\mathfrak{O}\mathfrak{Xi})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{O})} + \\ &+ \left\{\frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{O})}{(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{O})} + \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{O})}{(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{O})} - \frac{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{O})(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{x})(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{y})}\right\}\frac{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Xi})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{O})};\end{aligned} \tag{13}$$

auch erkennen wir unschwer, dass diese Gleichung sowohl die Gleichung $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = 0$ als auch die Gleichung (12) zur Folge hat.

Jetzt lässt sich einsehen, dass die durch die Gleichungen (12), (13) erklärte Beziehung zwischen vier Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ identisch ist mit der, die wir im ersten Abschnitt durch die geometrische Gleichung

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$$

definirt hatten, und zwar haben wir zu diesem Zweck gar nicht nöthig, die im vorigen Paragraphen angestellten Ueberlegungen heranziehen. Zunächst erhalten wir, wenn ω eine zu $\mathfrak{D}$ senkrechte Ebene bedeutet, da dann $(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{P}_{\omega}^{u}) = 0$ wird, als Folge von (13) die Gleichung

$$\frac{(\mathfrak{Z}\mathfrak{P}_{\omega}^{u})}{(\mathfrak{Z} \mid \mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_{\omega}^{u})}{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{D})} + \frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{P}_{\omega}^{u})}{(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{D})} - \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{P}_{\omega}^{u})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D})}. \tag{14}$$

Setzen wir nun, den Schnittpunkt von $\mathfrak{D}$ und ω mit o bezeichnend,

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{P}_{u}^{v}) = (\omega \mid v)(uo) - (\omega \mid u)(vo),$$

und schreiben wir ausserdem symbolisch

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_{u}^{v}) = (up)(vq), \qquad (\mathfrak{Y}\mathfrak{P}_{u}^{v}) = (ur)(vs),$$

so folgt

$$(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}) = (lo)^2 \cdot (\omega \mid \omega), \qquad (\mathfrak{D}\mathfrak{P}_{\omega}^{u}) = -(\omega \mid \omega)(uo),$$
$$(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X}) = (lo) \cdot (lp)(\omega q), \qquad (\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y}) = (lo) \cdot (lr)(\omega s),$$

und, wenn schliesslich noch

$$(\mathfrak{Z}\mathfrak{P}_{\omega}^{u}) = (u\xi), \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{P}_{\omega}^{u}) = (u\xi), \qquad (\mathfrak{Y}\mathfrak{P}_{\omega}^{u}) = (u\eta)$$

gesetzt wird,

$$\frac{(u\zeta)}{(l\zeta)} = \frac{(u\xi)}{(l\xi)} + \frac{(u\eta)}{(l\eta)} - \frac{(uo)}{(lo)}. \tag{15}$$

Diese mit (14) äquivalente Gleichung sagt aber aus, dass die Schnittpunkte o, ξ, η, ζ von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit der Ebene ω die Figur eines Paralelogramms bilden.

Nunmehr können wir den folgenden Satz aussprechen:

(E.) *Jedem Motor $\mathfrak{M}$ lässt sich eine Alternante $(\mathfrak{M}\mathfrak{X})$ eindeutig umkehrbar zuordnen (Nr. 6, 11).*

Motoren werden geometrisch addirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

Die aus drei Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ vermöge

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$$

abgeleitete vierte Gerade $\mathfrak{Z}$ ist gegeben durch die Gleichung (13).

Sind eine geometrische Summe $\mathfrak{K}$ von Keilen und ein Motor $\mathfrak{M}$ associirt, so sind die zugehörigen Alternanten einander gleich, $(\mathfrak{K}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{M}\mathfrak{X})$, und umgekehrt. —

In derselben Weise, wie die geometrischen Summen von Motoren, lassen sich auch die geometrischen Summen von Impulsoren behandeln. Es mögen die *Bewegung* $S(\alpha, \beta)$ und der von einem Ejector verschiedene *Impulsor* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ zu derselben geometrischen Summe $\mathfrak{Q}$ von Quirlen associirt sein. Dann ist, nach der geometrischen Theorie, wie oben $S = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}\}$, und es können daher wiederum die Gleichungen (5) angesetzt werden. Schreiben wir dann $(\mathfrak{I}\mathfrak{X})$ für $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$, so erhalten wir nun an Stelle der Gleichung (6) die folgende

$$(16) \qquad (\mathfrak{I}\mathfrak{Z}) = -\frac{\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})};$$

woraus folgt

$$(17) \qquad J = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{I}\mathfrak{I}) = -\frac{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})};$$

$$(18) \qquad \sqrt{\mathfrak{I}\,|\,\mathfrak{I}} = -\frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})\,(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})}.$$

Die *Länge* des Impulsors $\mathfrak{I}$ wird

$$(19) \quad \eta = \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \alpha_3^{\,2}}} = -\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})\,(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}\,|\,\mathfrak{I}}},$$

seine *Oeffnung* gleich

$$(20\text{a}) \quad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\sqrt{\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \alpha_3^{\,2}}}{\alpha_0} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})\,(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})} = \frac{\sqrt{\mathfrak{I}\,|\,\mathfrak{I}}}{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{I}\mathfrak{I})}.$$

Geht der Impulsor in einen *Ejector* über, indem entweder $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{Y}$ eine uneigentliche Gerade wird, so wird unsere Herleitung und auch der Ausdruck (20a) selbst illusorisch. An Stelle der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ tritt jetzt, wenn z. B. $\mathfrak{X}$ eine eigentliche und $\mathfrak{Y}$ eine uneigentliche Gerade ist, die ausgeartete Umschraubung, die durch die Spiegelung an dem uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{X}$ und die darauf folgende Spiegelung an $\mathfrak{Y}$ entsteht, mit den Parametern

$$\beta_0 = \alpha_0{}^* = -(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}), \quad \beta_1 = \alpha_1{}^* = \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{31}, \quad \text{u. s. f.};$$

d. h. die zu dem Ejector $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ gehörige Alternante $(\mathfrak{I}\mathfrak{Z})$ wird nach wie vor gegeben durch den Ausdruck (16); an Stelle von (20a) aber erhalten wir als Werth der *Oeffnung* unseres Ejectors die Grösse

$$(20\text{b}) \qquad -\operatorname{ctg}\vartheta^* = \frac{\beta_0}{\sqrt{\beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2} + \beta_3^{\,2}}} = \frac{(lo)}{\sqrt{(\mathfrak{I}\mathfrak{P}_o^{\lambda})^2}}.$$

Es ist das derselbe Ausdruck, den wir im vorigen Paragraphen unter (26a) angegeben haben.

Auch die weitere Entwickelung gestaltet sich ähnlich wie im Falle der Motoren.

An Stelle der Gleichungen (11), (12), (13) erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$(21)\qquad \frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{X})} = \frac{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Z}) - \{\mathfrak{Z}\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})},$$

$$(22)\qquad (\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}}\mathfrak{Z}) + (\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}}\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Z}),$$

$$(23)\qquad \begin{aligned}\frac{(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{Z}\mathfrak{D})} &= \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{X}\mathfrak{D})} + \frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{D})} - \frac{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})} + \\ &+ \left\{\frac{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{D})}{(\mathfrak{X}\mathfrak{D})} + \frac{(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{D})}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{D})} - \frac{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D}\mathfrak{X})(\mathfrak{D}\mathfrak{Y})}\right\}\frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})},\end{aligned}$$

deren erste vermöge (16) in eine Identität übergeht, und deren letzte wieder die vorhergehende nach sich zieht.

Um nun nachzuweisen, dass die durch die Gleichungen (22), (23) dargestellte Bezeichnung zwischen vier Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ identisch ist mit der, die wir im ersten Abschnitt durch die geometrische Gleichung

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$$

ausgedrückt hatten, stellen wir zunächst die Gerade $\mathfrak{D}$ als Schnitt zu einander senkrechter Ebenen ω, φ dar, d. h. wir setzen

$$(\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_u^v) = (\omega\varphi uv), \qquad (\omega\,|\,\varphi) = 0.$$

Wir bringen hierauf die Figur unserer Geraden mit der Ebene φ zum Schnitt:

$$(24)\qquad \frac{(\mathfrak{Z}\mathfrak{P}_\varphi^u)}{(\mathfrak{Z}\mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_\varphi^u)}{(\mathfrak{X}\mathfrak{D})} + \frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{P}_\varphi^u)}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{D})} - \frac{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{P}_\varphi^u)}{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})}.$$

Nun folgt

$$(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D}) = (\omega\,|\,\omega)(\varphi\,|\,\varphi), \qquad (\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{P}_\varphi^u) = -(\varphi\,|\,\varphi)(\omega\,|\,u),$$

und wenn z. B. $(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_u^v) = (up)(vq)$, und $(\mathfrak{X}\mathfrak{P}_\varphi^u) = (\varphi p)(uq) = (u\xi)$ gesetzt wird, so dass ξ der Schnittpunkt von φ und $\mathfrak{X}$ ist,

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{D}) = (\omega p)(\varphi q) = -(\omega\xi);$$

die Gleichung (24) geht also über in

$$(25)\qquad \frac{(u\zeta)}{(\omega\zeta)} = \frac{(u\xi)}{(\omega\xi)} + \frac{(u\eta)}{(\omega\eta)} - \frac{(\omega\,|\,u)}{(\omega\,|\,\omega)};$$

nach Nr. (31), § 19 aber sagt diese Gleichung aus, dass

$$\mathfrak{D}_\omega^\zeta = \mathfrak{D}_\omega^\xi + \mathfrak{D}_\omega^\eta.$$

Die Behauptung ist also erwiesen; wir können nunmehr den Satz formuliren:

(F.) *Jedem Impulsor* $\mathfrak{I}$ *lässt sich eine Alternante* $(\mathfrak{I}\mathfrak{X})$ *eindeutig umkehrbar zuordnen (Nr. 16, 21).*

Impulsoren werden geometrisch addirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

Die aus drei Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *vermöge*

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{x}} + \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{z}}$$

abgeleitete Gerade $\mathfrak{Z}$ *ist gegeben durch die Gleichung* (23).

Sind eine geometrische Summe $\mathfrak{Q}$ *von Quirlen und ein Impulsor* $\mathfrak{I}$ *associirt, so sind die zugehörigen Alternanten einander gleich,* $(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{I}\mathfrak{X})$, *und umgekehrt.* —

Um mehrere Anwendungen, die sich von den bis jetzt entwickelten Formeln machen lassen, einfach darstellen zu können, erscheint es uns nützlich, eine auch sonst schon gebräuchliche Terminologie einzuführen. Wir betrachten irgend eine Alternante, und bezeichnen diese mit $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$, indem wir es ganz unbestimmt lassen, ob sie einer geometrischen Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen, oder einem Motor oder einem Impulsor zugeordnet werden soll. Ist dann $\mathfrak{P}$ irgend eine eigentliche Gerade, so nennen wir *Moment und Comoment der Alternante in Bezug auf die Gerade* die Ausdrücke

$$(26) \qquad \frac{(\mathfrak{W}\mathfrak{P})}{\sqrt{\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{P}}}, \qquad (27) \qquad \frac{(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{P})}{\sqrt{\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{P}}}.$$

Sind ferner $(\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{W}_\beta\mathfrak{X})$ irgend zwei Alternanten, so nennen wir *relatives Moment und relatives Comoment der beiden Alternanten* die Grössen

$$(28) \quad (\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{W}_\beta), \qquad (29) \quad (\mathfrak{W}_\alpha\,|\,\mathfrak{W}_\beta).$$

Die Ausdrücke (26), (27) sind nun linear und homogen in Bezug auf die Coefficienten von $(\mathfrak{W}\mathfrak{X})$, ebenso (28) und (29) in Bezug auf die Coefficienten von $(\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{W}_\beta\mathfrak{X})$. Daraus folgt, dass bei Addition mehrerer Alternanten auch die zugehörigen Momente entsprechend addirt werden; und hieraus ergiebt sich eine ganze Reihe geometrischer Folgerungen, wenn wir nunmehr mit Hülfe der abgeleiteten Gleichungen den betrachteten Alternanten Figuren im Raume zuordnen. Wir führen kurz einige Beispiele der Art an.

Ordnen wir, unter der Annahme $(\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{W}_\alpha) = 0$, $(\mathfrak{W}_\beta\mathfrak{W}_\beta) = 0$ den beiden Alternanten Stäbe zu,

$$(\mathfrak{W}_\alpha\mathfrak{X}_x^y) = (\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{X}_x^y) = \frac{(\xi_\alpha\eta_\alpha xy)}{(l\xi_\alpha)(l\eta_\alpha)},$$

so wird

$$(29) \qquad (\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{S}_{,\beta}) = \frac{(\xi_\alpha \eta_\alpha \xi_\beta \eta_\beta)}{(l\xi_\alpha)(l\eta_\alpha)(l\xi_\beta)(l\eta_\beta)} = 6\,V(\xi_\alpha,\ \eta_\alpha,\ \xi_\beta,\ \eta_\beta)$$

und es hat daher, wenn man die beiden geometrischen Summen $\Sigma\mathfrak{S}_\alpha$ und $\Sigma\mathfrak{S}_{,\beta}$ bildet, die entsprechende Summe der Tetraedervolumina rechts einen constanten von der Zerlegung dieser Summen unabhängigen Werth; sie ist nämlich gleich dem relativen Moment der beiden Alternanten $\Sigma(\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{X})$ und $\Sigma(\mathfrak{S}_{,\beta} \mathfrak{X})$. Dies ist ein längst bekannter elementarer Satz; wir können aber z. B. auch

$$(\mathfrak{W}_\beta \mathfrak{X}^r_u) = (\mathfrak{K}_\beta \mathfrak{X}^v_u) = \frac{(\varphi_\beta \psi_\beta u v)}{(\varphi_\beta \mid \psi_\beta)}$$

setzen und erhalten dann aus der Gleichung

$$(30) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{K}_\beta) &= \frac{(\varphi_\beta \xi_\alpha)(\psi_\beta \eta_\alpha) - (\varphi_\beta \eta_\alpha)(\psi_\beta \xi_\alpha)}{(l\xi_\alpha)(l\eta_\alpha)(\varphi_\beta \mid \psi_\beta)} \\ &= \frac{\operatorname{dist}(\varphi_\beta,\ \xi_\alpha) \cdot \operatorname{dist}(\varphi_\beta,\ \eta_\alpha) - \operatorname{dist}(\varphi_\beta,\ \eta_\alpha) \cdot \operatorname{dist}(\psi_\beta,\ \xi_\alpha)}{\cos(\varphi_\beta,\ \psi_\beta)} \end{aligned}$$

ein analoges, wenn auch nicht ganz so einfach auszusprechendes Resultat; u. s. w. u. s. w.

Werden die betrachteten Alternanten beide Motoren oder Impulsoren zugeordnet, so kann man, so lange nicht mehr als zwei solche Figuren in Frage kommen, u. A. annehmen, dass diese eine gemeinschaftliche Anfangslinie $\mathfrak{O}$ haben. Setzen wir also etwa

$$(\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{Z}) = (\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{O}} \mathfrak{Z}) = \frac{\{\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{X})},$$

$$(\mathfrak{W}_\beta \mathfrak{Z}) = (\mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{O}} \mathfrak{Z}) = \frac{\{\mathfrak{O}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Y})},$$

so ergiebt sich als Ausdruck des relativen Momentes beider Motoren der Werth

$$(\mathfrak{M}^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{O}} \mathfrak{M}^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{O}}) = -\frac{(\mathfrak{O}\mathfrak{X})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{X})} - \frac{(\mathfrak{O}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Y})} + \frac{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{O})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{O} \mid \mathfrak{Y})} =$$

$$(31) \qquad = \operatorname{dist}(\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) \cdot \operatorname{tg ang}(\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) + \operatorname{dist}(\mathfrak{O}, \mathfrak{Y}) \cdot \operatorname{tg ang}(\mathfrak{O}, \mathfrak{Y}) - \\ - \frac{\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \sin \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}{\cos \operatorname{ang}(\mathfrak{O}, \mathfrak{X}) \cdot \cos \operatorname{ang}(\mathfrak{O}, \mathfrak{Y})};$$

ähnlich bildet man das relative Moment zweier Impulsoren mit gemeinsamer Anfangslinie, sowie auch die entsprechenden Ausdrücke unter den allgemeinsten Voraussetzungen. —

Betrachten wir von zwei Motoren, deren zugehörige Alternanten mit $(\mathfrak{M}\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{B}\mathfrak{X})$ bezeichnet werden mögen, den ersten als Symbol einer Dyname, und den zweiten als Symbol einer infinitesimalen Bewegung, indem wir die Coordinaten $\mathfrak{M}_{ik}$ von $(\mathfrak{M}\mathfrak{X})$ in der üblichen

Weise als Coordinaten*) eines Systems von Kräften, und die Grössen $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ und, bei Vernachlässigung von dt^2,

$$\alpha_1 = -\mathfrak{B}_{01}dt, \quad \beta_1 = -\mathfrak{B}_{23}dt \text{ u. s. w.} \tag{32}$$

als Bewegungsparameter ansehen, so wird, wie leicht zu zeigen,

$$2(\mathfrak{M}\mathfrak{B})dt \tag{33}$$

der Ausdruck der *Arbeit, die die Dyname bei der infinitesimalen Bewegung leistet***). Wegen der hieraus zu ziehenden Folgerungen verweisen wir auf die auf S. 58 citirten Werke.

Bemerkenswerth erscheint uns endlich eine aus dem Vorhergehenden abzuleitende geometrische Deutung der gegenüber Bewegungen invarianten Gleichung $\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} = 0$. Die hierdurch bestimmte Lagenbeziehung von drei Geraden kann, für den Fall, dass diese eigentliche Gerade sind, durch den folgenden Satz beschrieben werden:

Man lasse eine veränderliche Gerade $\mathfrak{Z}'$ zwei andere $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ derart schneiden, dass sie eine von diesen — etwa $\mathfrak{Y}$ — rechtwinklig trifft. Die so entstandene Linienfläche (i. A. ein orthogonales Paraboloid) drehe man sodann um einen rechten Winkel um die genannte Axe $\mathfrak{Y}$.

Hierauf unterwerfe man sie allen Schraubungen um die gemeinsame Normale $\widehat{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, oder, falls diese unbestimmt sein sollte, allen Schraubungen um irgend eine der gemeinsamen Normalen.

Die so aus den Geraden $\mathfrak{Z}'$ schliesslich abgeleiteten Geraden $\mathfrak{Z}$ erfüllen ein Gewinde, oder im besonderen Falle — wenn nämlich die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ einander schneiden oder rechtwinklig kreuzen — ein Liniengebüsch.

Die Gleichung dieses Gewindes oder Gebüsches ist

$$\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} = 0. \tag{34}$$

Die beschriebene Abhängigkeit zwischen drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ist also symmetrisch, sie ändert sich nicht, wenn man diese Geraden beliebig vertauscht.

Diese Erzeugung des Gewindes mit Hülfe zweier gerader Linien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ dürfte eine der einfachsten und anschaulichsten sein, die es giebt; es ist bemerkenswerth, dass das construirte Gewinde auch analytisch durch eine so ausserordentlich einfache Gleichung dargestellt wird.

Wir werden übrigens auf die Bedeutung der Invariante $\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}$ weiterhin noch zurückkommen.

---

*) Die hier $\mathfrak{M}_{01}$, $\mathfrak{M}_{02}$, $\mathfrak{M}_{03}$, $\mathfrak{M}_{23}$, $\mathfrak{M}_{31}$, $\mathfrak{M}_{12}$ genannten Grössen werden in Lehrbüchern der Mechanik gewöhnlich mit X, Y, Z, L, M, N bezeichnet.

**) F. Klein, Math. Annalen Bd. 4, S. 403.

§ 23.

Ein Uebertragungsprincip.

Wir haben nunmehr die im ersten Abschnitt vorgetragene geometrische Theorie zum grösseren Theil auch algebraisch hergeleitet; es stehen aber noch aus die Sätze, die sich auf die stereometrische Addition der Motoren und die stereometrische Superposition der Bewegungen beziehen. Um nun auch diese Sätze in einer sachgemässen Weise analytisch begründen zu können, bedürfen wir einiger Vorbereitungen. Wir werden uns zu diesem Zwecke gewisser complexer Grössen bedienen, die, bei Beschränkung auf reelle Coefficienten der Einheiten, als eine Ausartung der gemeinen complexen Grössen angesehen werden können*).

Um uns weiterhin mit voller Sicherheit bewegen zu können, wollen wir zunächst das gemeinte System von complexen Grössen selbst einer kurzen Betrachtung unterwerfen.

Wir bilden zunächst, nach dem Vorgange Hamilton's**), den Begriff des Grössenpaares (ξ, η), indem wir unter ξ und η irgend zwei reelle oder auch gewöhnliche complexe Grössen verstehen, und zwei solche Grössenpaare (ξ, η) und (ξ', η') dann und nur dann einander gleich setzen, wenn $\xi = \xi', \eta = \eta'$.

Es werde sodann der Begriff der Summe zweier solcher Grössenpaare erklärt durch die Formel

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta'),$$

und das Product eines Grössenpaares (ξ, η) und einer einzelnen reellen oder complexen Grösse c durch die Formel

$$c(\xi, \eta) = (\xi, \eta)c = (c\xi, c\eta).$$

Das Grössenpaar $(0, 0)$ werde mit 0 bezeichnet. Es folgt dann, wenn

$$\varepsilon_0 = (1, 0), \qquad \varepsilon_1 = (0, 1)$$

gesetzt wird,

$$(\xi, \eta) = \xi\varepsilon_0 + \eta\varepsilon_1.$$

Wir erklären sodann eine als Multiplication zweier unserer Grössenpaare zu bezeichnende Operation durch die Gleichung

$$(1) \qquad (\xi, \eta)(\xi', \eta') = (\xi\xi', \xi\eta' + \eta\xi').$$

Dann ergeben sich erstens, wenn verschiedene Grössenpaare durch einfache Zeichen, wie $a, b, \ldots$ dargestellt werden, die Gleichungen

---

*) Vgl. die Encyclopädie der math. Wissenschaften, Art. Complexe Grössen. Bd. I (Leipzig, 1898), insbes. S. 166.

**) Hamilton hat auf diese Weise zuerst die gewöhnlichen complexen Grössen eingeführt.

$$ab = ba, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (ab)c = a(bc),$$

die man als commutatives, distributives und associatives Gesetz der Multiplication zu bezeichnen pflegt, zweitens die speciellen Gleichungen

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1^2 = 0. \tag{2}$$

Es kann also das „Product" beliebig vieler unserer Grössenpaare gebildet werden, indem man die Factoren nach den gewöhnlichen Rechnungsregeln multiplicirt, und dabei alle Glieder weglässt, in denen mehr als ein Factor ε_1 auftritt. Das Ergebniss dieser Rechnung wird immer wieder ein Grössenpaar der Form $\xi\varepsilon_0 + \eta\varepsilon_1$ sein.

Nunmehr ändern wir die Terminologie. *Anstatt von einem Paar von Grössen* (ξ, η) *reden wir von einer „dualen" Grösse* $\xi\varepsilon_0 + \eta\varepsilon_1$; und wir bezeichnen die Gesammtheit aller dieser Grössen, insofern ihr die Eigenschaft innewohnt, durch die erklärten Processe der Addition und Multiplication reproducirt zu werden, als ein *System dualer Grössen.* Die dualen Grössen ε_0 und ε_1 bezeichnen wir als die *Haupteinheit* und die *Nebeneinheit* dieses Systems. Die dualen Grössen $\xi\varepsilon_0$ und $\eta\varepsilon_1$ mögen als der *scalare* und *vectorielle Bestandtheil* der dualen Grösse $\xi\varepsilon_0 + \eta\varepsilon_1$ unterschieden werden, die Grössen ξ und η selbst mögen der *scalare* und *vectorielle Coefficient* von $\xi\varepsilon_0 + \eta\varepsilon_1$ heissen. Sind sie reell, so nennen wir die duale Grösse selbst *reell*, andernfalls *complex.*

Das hiermit definirte System von Begriffen kann der Form nach noch ein wenig vereinfacht werden. Es folgt nämlich offenbar die Addition und Multiplication der scalaren Grössen genau denselben Regeln, wie die Addition und Multiplication der reellen oder gewöhnlichen complexen Grössen. Man kommt daher zu keinem Widerspruch, wenn man die Haupteinheit ε_0 durch die Definitionsgleichung

$$\varepsilon_0 = (1, 0) = 1$$

mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens identificirt. Damit wird das Zeichen ε_0 überflüssig, und indem wir für ε_1 einfach ε schreiben, erhalten wir an Stelle der Gleichungen (2) die einzige Gleichung

$$\varepsilon^2 = 0, \tag{3}$$

die nun bei dem Rechnen mit den dualen Grössen der Form $\xi + \eta\varepsilon$ zu Grunde zu legen sein wird*).

*) Die reellen dualen Grössen unterscheiden sich also von den gewöhnlichen complexen Grössen dadurch, dass an Stelle der Gleichung $i^2 = -1$ die Gleichung $\varepsilon^2 = 0$ tritt; die complexen dualen Grössen sind eigentlich bicomplex. Indem wir für die von den gemeinen complexen Grössen verschiedenen Systeme von — nach der üblichen Terminologie „complexen" — Grössen mit zwei Einheiten den Ausdruck „duale Grössen" einführen, glauben wir Verwechselungen in wirksamer Weise vorzubeugen.

Nach den angegebenen Regeln ist die Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 1,$$

in der $\mathfrak{a}$ eine gegebene und $\mathfrak{x}$ eine gesuchte duale Grösse der Form $\xi + \eta\varepsilon$ bedeutet, immer dann und nur dann möglich, wenn der scalare Coefficient a von $\mathfrak{a} = a + \alpha\varepsilon$ von Null verschieden ist. Die Lösung $\mathfrak{x}$ ist in diesem Falle eindeutig bestimmt und kann mit $\mathfrak{a}^{-1}$ oder auch mit $\frac{1}{\mathfrak{a}}$ bezeichnet werden:

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{-1} = \frac{a - \alpha\varepsilon}{a^2}. \tag{4}$$

Ist $a = 0$, so hat das Symbol $\mathfrak{a}^{-1}$ keinen Sinn. Es ist dann jedes numerische Vielfache von ε eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = 0$; ist aber $a \neq 0$, so kann aus dem Bestehen der Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = 0$ geschlossen werden, dass $\mathfrak{x} = 0$ ist. Es kann also aus einer Gleichung $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$ nur geschlossen werden, dass entweder $\mathfrak{x} = 0$ oder $\mathfrak{y} = 0$ ist, *oder* drittens die Congruenzen

$$\mathfrak{x} \equiv 0, \quad \mathfrak{y} \equiv 0 \bmod \varepsilon$$

bestehen.

Wir betrachten nun eine *algebraische Gleichung*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_0\mathfrak{x}^n + \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}^{n-1} + \cdots + \mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_n = \\ &= \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\} + \\ &+ \{(\alpha_0x^n + \cdots + \alpha_n) + (na_0x^{n-1} + \cdots + a_{n-1})\xi\}\varepsilon = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

in der die Coefficienten $\mathfrak{a}_k = a_k + \alpha_k\varepsilon$ und die Unbekannte $\mathfrak{x} = x + \xi\varepsilon$ duale Grössen der betrachteten Art sind. Soll $\mathfrak{x}$ eine Wurzel dieser Gleichung sein, so muss zunächst der etwa mit dem Gliede $a_{n-m}x^m$ beginnende scalare Coefficient im Ausdruck (5) verschwinden. Dies giebt eine Gleichung vom Grade $m \leq n$ für x. Sei x eine reelle oder gewöhnliche complexe Wurzel dieser, der *„verkürzten"* Gleichung, so können weiter drei Fälle eintreten:

1) x kann eine einfache Wurzel der verkürzten Gleichung sein. Dann erhält man, wenn man den vectoriellen Coefficienten in (5) gleich Null setzt, einen völlig bestimmten zugehörigen Werth von ξ.

2) x kann eine mehrfach zählende Wurzel der verkürzten Gleichung sein, die die Gleichung $\alpha_0x^n + \cdots + \alpha_n = 0$ nicht befriedigt. Dann enthält die Forderung, eine Lösung der Gleichung (5) von der Form $\mathfrak{x} = x + \xi\varepsilon$ zu finden, einen Widerspruch.

3) x erfüllt, als mehrfache Wurzel der verkürzten Gleichung, auch die Gleichung $\alpha_0x^n + \cdots + \alpha_n = 0$. Dann ist $\mathfrak{x} = x + \xi\varepsilon$ eine Lösung der Gleichung (5) für jeden beliebigen Werth von ξ.

Der Fundamentalsatz der Algebra lässt sich also nicht in einfacher Weise auf unser System dualer Grössen übertragen. Es gilt aber wenigstens der folgende Satz:

In dem betrachteten System dualer Grössen hat eine Gleichung n^{ten} Grades höchstens n isolirte (reelle oder complexe) Wurzeln, und sie hat, wenn diese Maximalzahl erreicht wird, auch keine weiteren Wurzeln. Dieser Fall tritt ein, wenn die zugehörige verkürzte Gleichung n getrennte (reelle oder complexe) Wurzeln hat.

Eine Vereinfachung findet ferner allgemein dann statt, wenn die betrachtete Gleichung durch einen etwa als *Erweiterung* zu bezeichnenden Process aus einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung dadurch entsteht, dass man die duale Grösse $\mathfrak{x}$ an Stelle der Unbekannten x setzt. Es wird dann $\mathfrak{x} = x$ für jede einfache Wurzel und $\mathfrak{x} = x + \varepsilon\xi$ (bei beliebigem ξ) für jede mehrfach zählende Wurzel der verkürzten (hier also der ursprünglich gegebenen) Gleichung.

Wir betrachten weiter Potenzreihen der Form

$$
\begin{aligned}
f(\mathfrak{x}) = \sum_0^\infty \mathfrak{a}_k \mathfrak{x}^k &= \Sigma (a_k + \alpha_k \varepsilon)(x + \xi\varepsilon)^k = \\
&= \Sigma a_k x^k + \{\Sigma \alpha_k x^k + \Sigma k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \cdot \xi\}\varepsilon = \\
&= \varphi(x) + \{\psi(x) + \varphi'(x) \cdot \xi\}\varepsilon .
\end{aligned} \tag{6}
$$

Damit eine solche unendliche Reihe einen Sinn habe, muss man natürlich annehmen, dass die Reihen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ convergiren, sagen wir für $|x| < r$. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so kann die Reihe (6) im Wesentlichen ebenso behandelt werden wie eine gewöhnliche Potenzreihe. Insbesondere gelten die gewöhnlichen Regeln der Differentiation und Integration; es ist also

$$\lim \frac{f(\mathfrak{y}) - f(\mathfrak{x})}{\mathfrak{y} - \mathfrak{x}}$$

im Inneren des Convergenzgebietes eindeutig bestimmt und gleich

$$f'(\mathfrak{x}) = \Sigma k \mathfrak{a}_k \mathfrak{x}^{k-1} = \varphi'(x) + \{\psi'(x) + \varphi''(x)\xi\}\varepsilon ,$$

ebenso

$$\int f(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \Sigma \frac{\mathfrak{a}_k \mathfrak{x}^{k+1}}{k+1} = \int \varphi(x) dx + \left\{\int \psi(x) dx + \varphi(x)\xi\right\}\varepsilon ;$$

ferner existirt eine eindeutig bestimmte Umkehrung der Reihe (6) in der Umgebung einer jeden Stelle im Inneren des Convergenzgebietes, für die $\varphi'(x) \neq 0$; endlich entsteht durch „analytische Fortsetzung", d. h. durch gleichzeitige analytische Fortsetzung der beiden gewöhnlichen Potenzreihen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein dem Begriff der „analytischen Function" einer gewöhnlichen complexen Veränderlichen verwandter

Begriff der synektischen Function der dualen Veränderlichen $\mathfrak{x} = x + \xi\varepsilon$, einer Function, deren allgemeine Form nach Obigem — unter Voraussetzung eines gemeinsamen Existenzbereichs der analytischen Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — ist

$$\varphi(x) + \{\psi(x) + \varphi'(x) \cdot \xi\} \cdot \varepsilon,$$

und die, wenn $\chi(x, \xi) = \psi(x) + \varphi'(x) \cdot \xi$ gesetzt wird, durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{7}$$

für die analytischen Functionen φ, χ der beiden complexen Veränderlichen x, ξ charakterisirt werden kann *).

Diese einfachen Ueberlegungen werden für das Folgende genügen. Wir werden zunächst nur algebraische Gleichungen der einfachsten Art, nämlich lineare und quadratische Gleichungen zu betrachten haben, und ebenso auch nur synektische Functionen von einfachstem Bildungsgesetz. Diese letzten entstehen z. Th. aus gewöhnlichen analytischen, nämlich aus den goniometrischen Functionen und ihren Umkehrungen durch *Erweiterung* (vgl. oben S. 189), d. h. dadurch, dass man in die Potenzreihen für $\sin x$, $\cos x$, u. s. f. an Stelle von x das duale Argument $\mathfrak{x} = x + \xi\varepsilon$ substituirt. Da in diesen Fällen die vorhin mit $\psi(x)$ bezeichnete Function verschwindet, so wird das Convergenzgebiet jeder so entstandenen Reihe identisch mit dem der ursprünglichen Reihe. Wir werden also unbedenklich alle zwischen den goniometrischen und cyclometrischen Functionen stattfindenden Functionalgleichungen auf die erweiterten synektischen Functionen übertragen können. —

Wir wollen nunmehr auseinandersetzen, wie man mit Hülfe der eingeführten dualen Grössen zu einer neuen analytischen Darstellung der geraden Linie im Raume, also zu einer neuen Art von Liniencoordinaten

*) Wir brauchen den Ausdruck synektische Function, und nicht den Ausdruck „analytische Function", da, wo mehrere Wörter zur Verfügung stehen, ein allgemein üblicher Ausdruck wohl besser auf seine ursprüngliche Bedeutung beschränkt bleibt. Uebrigens bedeutet unser Begriff der synektischen Function ein Paar analytischer Functionen von zwei complexen Veränderlichen, und bildet gar kein Analogon im engeren Sinne zu den analytischen Functionen einer einzelnen complexen Veränderlichen, die Paare von reellen Functionen von zwei reellen Veränderlichen sind. Ein wirkliches Analogon, das bei *reellen* Werthen der Grössen x, ξ, α_k, α_k dem Begriffe der analytischen Fortsetzung einen ähnlichen an die Seite stellen würde, ist weder in unserem Falle vorhanden, noch auch bei dem dritten durch $\varepsilon^2 = +1$ definirten System reeller dualer Grössen.

gelangen kann, die wir unter dem Namen von Strahlencoordinaten weiterhin neben Plücker'schen Liniencoordinaten zu verwenden haben werden.

Wir gehen aus von irgend einem Gewinde oder Liniengebüsch mit den Plücker'schen Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$, und wir nehmen dieses Gebilde, wie in allen bisherigen Betrachtungen, als *reell* an. Aus den (reellen) Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ setzen wir nun duale Grössen X_1, X_2, X_3 wie folgt zusammen:

$$(8) \quad X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}\varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31}\varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12}\varepsilon.$$

Multipliciren wir diese Grössen mit einer ebenfalls reellen dualen Grösse $\varrho = \sigma + \tau\varepsilon$, so entsteht ein neues System von drei dualen Grössen

$$X_1' = \varrho X_1 = \sigma\mathfrak{X}_{01} + \{\sigma\mathfrak{X}_{23} + \tau\mathfrak{X}_{01}\}\varepsilon,$$

u. s. f., aus dem, falls $\sigma \neq 0$, durch Multiplication mit ϱ^{-1} auch wieder das ursprüngliche System (8) abgeleitet werden kann.

Die Grössen

$$\mathfrak{X}_{01}' = \sigma\mathfrak{X}_{01}, \ldots, \quad \mathfrak{X}_{23}' = \sigma\mathfrak{X}_{23} + \tau\mathfrak{X}_{01}, \ldots$$

sind nun, nach unseren früheren Darlegungen, die Plücker'schen Coordinaten eines zu dem Gewinde oder Gebüsch $\mathfrak{X}$ *coaxialen* Gewindes oder Gebüsches $\mathfrak{X}'$, und zwar (wenn wir nachträglich hier auch den Grenzfall $\sigma = 0$ mit einbeziehen) des allgemeinsten Gewindes oder Gebüsches dieser Art: Ist $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})$ nicht identisch gleich Null, so haben beide Gebilde $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ dieselbe Hauptaxe, oder es reducirt sich, im Falle $\sigma = 0$, das Gewinde $\mathfrak{X}'$ auf das zur Nebenaxe von $\mathfrak{X}$ gehörige uneigentliche Liniengebüsch; verschwindet $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})$ identisch, so fallen beide Gebilde $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ in demselben uneigentlichen Liniengebüsch zusammen. Da nun auch umgekehrt ein reelles Büschel coaxialer Gewinde durch seine Hauptaxe, und ein uneigentliches Liniengebüsch durch die zugehörige Gerade, seine Nebenaxe, vollkommen bestimmt ist, so ergiebt sich:

Sieht man die drei reellen dualen Grössen X_1, X_2, X_3 (Nr. 8) *als Verhältnissgrössen*

$$X_1 : X_2 : X_3$$

in dem Sinne an, dass eine gleichzeitige Multiplication dieser Grössen mit einer dualen Grösse $\varrho = \sigma + \tau\varepsilon$ *von nicht verschwindendem scalarem Bestandtheil gestattet wird, so können diese Grössen* X_i *als ein System von Strahlencoordinaten*) aufgefasst werden.*

*) Die Worte „gerade Linie" und „Strahl" sind bisher von den Geometern unterschiedslos gebraucht worden. Es zeigt sich nun aber, dass im imaginären Gebiete die „Strahlencoordinaten" zu einer anderen Erweiterung des Begriffs

Sie stellen einen eigentlichen oder uneigentlichen Strahl dar, je nachdem ihre scalaren Bestandtheile wenigstens theilweise von Null verschieden oder sämmtlich gleich Null sind.

Da wir durch Einführung des Symbols ε je zwei gewöhnliche (reelle) Grössen der Form nach zu einer einzigen verbunden haben, so wird also bei unserer Darstellung der geraden Linie diese, ebenso wie bei der Plücker'schen Darstellung, durch ein System von *sechs* Verhältnissgrössen $\mathfrak{x}_{ik}$ bezeichnet. Die bei der Plücker'schen Darstellung erforderliche Relation

$$\mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0$$

wird aber von uns jetzt *nicht* angenommen, so dass von den sechs Coordinaten eine überzählig und die ganze Darstellung in gewissem Grade unbestimmt wird. Dieselben sechs Grössen, die nach Plücker als Coordinaten eines *Gewindes* anzusehen sind, dienen uns, als *„allgemeine Strahlencoordinaten"*, zur Darstellung einer Geraden oder eines *„Strahles"*, der Hauptaxe des Gewindes, und nur dann, wenn das Gewinde sich auf ein eigentliches oder uneigentliches Liniengebüsch reducirt, stellen beide Arten von Coordinaten dasselbe Gebilde dar.

Wir werden die neu eingeführten Coordinaten vorläufig nur in den dualen Verbindungen X_1, X_2, X_3 benutzen, und wir werden dann den dargestellten Strahl mit X bezeichnen; ebenso stellen wir in diesem Zusammenhang überhaupt durch Lettern des grossen lateinischen Alphabets gerade Linien, oder, wie wir hier lieber sagen, *Strahlen* dar.

Betrachten wir nun irgend eine (reelle) synektische Function (s. oben), die die dualen Coordinaten zweier oder mehrerer Strahlen $X, Y, \ldots$ enthält, und die in Bezug auf die Coordinaten jedes einzelnen von diesen Strahlen homogen ist, so stellt diese Function, gleich Null gesetzt, eine Beschränkung für die Lage der Strahlen $X, Y, \ldots$ dar, da wegen der vorausgesetzten Homogeneität die Gleichung sich nicht ändert, wenn wir an Stelle der Grössen X_i die oben definirten Grössen ϱX_i setzen, und zwar wird diese Beschränkung in gewöhn-

„gerade Linie" führen, als die Plücker'schen Liniencoordinaten. Wir haben daher mit Rücksicht darauf, dass bei manchen Sätzen die eine, bei anderen die andere Erweiterung näher liegt, zuvor schon eine gewisse Trennung in der Terminologie eintreten lassen. Eine reinliche Scheidung liess sich nicht durchführen, nicht sowohl, weil die Begriffe „Gerade" und „Strahl" im reellen Gebiete thatsächlich identisch sind, sondern weil wir Eigenschaften geometrischer Gebilde untersuchen, die nur bei der Gruppe der Bewegungen invariant sind. — Das eigentliche Wesen der gemeinten Unterscheidung kann erst durch Untersuchung umfassenderer Transformationsgruppen ganz klar gemacht werden.

lichen Liniencoordinaten im Allgemeinen durch *zwei* Gleichungen auszudrücken sein, da der scalare und der vectorielle Bestandtheil der gebildeten Function jeder für sich gleich Null gesetzt werden müssen. Natürlich sind es nur Functionen und Gleichungspaare von bestimmter leicht durch Differentialgleichungen (vgl. Nr. 7) zu charakterisirender Beschaffenheit, die in solcher Weise zusammengefasst werden können.

Bei den Anwendungen der genannten dualen Gleichungen wird die Bemerkung gute Dienste leisten, dass man, im Falle reeller Gebilde, durch Multiplication der dualen Strahlencoordinaten X_i mit dem Factor

$$(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X})\cdot\varepsilon$$

an Stelle der Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$, falls diese nicht schon selbst der Plücker'schen Gleichung genügen, immer solche einführen kann, die diese Forderung erfüllen. —

Ohne uns mit Allgemeinheiten weiter aufzuhalten, wenden wir uns sogleich zu Anwendungen unseres Coordinatensystems.

Wir bilden zunächst die dualen Ausdrücke

$$(9)\qquad (XY) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3,$$

$$(10)\qquad (XYZ) = |\,X_1 Y_2 Z_3\,|,$$

und untersuchen zuerst die geometrische Bedeutung ihres Verschwindens. Diese ist leicht zu ermitteln: Setzen wir für die Grössen X_i u. s. w. ihre Werthe (Nr. 8), so ergiebt sich

$$(11)\qquad (XY) = (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y})\cdot\varepsilon,$$

$$(12)\qquad (XYZ) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) + \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}\cdot\varepsilon;$$

es sagen aber die Gleichungspaare

$$(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) = 0, \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$$

und

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = 0, \qquad \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} = 0$$

eben Dasselbe aus, wie die gleichlautenden Paare von Gleichungen zwischen Plücker'schen Liniencoordinaten.

Es folgt also, wenn wir nur den wichtigsten Fall ins Auge fassen:

Wenn X und Y eigentliche Strahlen sind, so sagt die Gleichung $(XY) = 0$ aus, dass diese einander rechtwinklig schneiden.

Wenn X, Y, Z eigentliche Strahlen sind, so sagt die Gleichung $(XYZ) = 0$ aus, dass diese eine gemeinsame Normale zulassen, oder, im besonderen Falle, zu einander parallel sind.

Der erste dieser Sätze kann, etwas allgemeiner, auch so gefasst werden:

Eine lineare Gleichung

$$(AX) = (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}) + (\mathfrak{A}\mathfrak{X}) \cdot \varepsilon = 0 \tag{13}$$

zwischen den dualen Strahlencoordinaten X_1, X_2, X_3 wird entweder durch die ∞^2 Normalen eines einzelnen Strahls, oder durch die ∞^3 Strahlen eines uneigentlichen Strahlengebüsches, in jedem Falle also durch die Querlinien eines Linienkreuzes erfüllt.

Indem man ausdrückt, dass drei solche Gleichungen mit einander verträglich sind, ergiebt sich unmittelbar der zweite Satz, den wir ebenfalls noch in einer anderen Form aussprechen wollen:

Sind die eigentlichen Strahlen X, Y nicht parallel, so stellt die duale Gleichung

$$(UZ) = (XYZ) = 0 \tag{14}$$

die gemeinsame Normale U von X und Y als geometrischen Ort ihrer ∞^2 Normalen Z dar; sind X und Y aber parallel, so wird dieselbe Gleichung durch alle ∞^3 Strahlen Z erfüllt, die mit den gemeinsamen Normalen von X und Y einen rechten Winkel bilden. In jedem Falle also wird die Gleichung erfüllt durch die sämmtlichen Querlinien Z eines durch X und Y bestimmten Linienkreuzes — desselben, das wir in § 1 (S. 5) beschrieben hatten.

Drücken wir die Abhängigkeit zwischen den dualen Strahlencoordinaten U_i und den Coordinaten X_i, Y_i aus durch das Zeichen

$$U = \widehat{XY} \tag{15}$$

(vgl. S. 127), so folgt weiter

$$\begin{aligned}(\widehat{XY}\,PQ) &= (\widehat{XY}\,\widehat{PQ}) = (XY\,\widehat{PQ}) \\ &= (XP)(YQ) - (XQ)(YP);\end{aligned} \tag{16}$$

wir haben also nunmehr einen analytischen Process, wie er auf S. 122 gefordert wurde, einen Process nämlich, der auch bei einer wiederholten Normalenconstruction noch eine hinreichend übersichtliche Form bewahrt; wie es sich bei der Anwendung auf die stereometrische Addition der Motoren alsbald zeigen wird.

Um von der Gleichungsform (14) zu der in § 17 aufgestellten Gleichung Nr. 39 der gemeinsamen Normale in Plücker'schen Liniencoordinaten überzugehen, hat man nur durch Multiplication der linken Seite von (14) mit einem geeigneten dualen Factor zu bewirken, dass an Stelle der sechs Grössen $\mathfrak{U}_{ik}$ solche treten, die der Plücker'schen Gleichung genügen.

Zwischen den dualen Bewegungsinvarianten der Typen (9) und (10) bestehen gewisse identische Relationen, die sich *erschöpfend* angeben lassen. Diese Relationen müssen nämlich der Form nach vollkommen übereinstimmen mit den Relationen, die zwischen den durch Unterdrückung der vectoriellen Bestandtheile entstehenden verkürzten Ausdrücken $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$ stattfinden. Diese lassen sich aber alle rational nnd ganz aus zweien unter ihnen zusammensetzen*). Das fragliche Relationensystem ist also dieses

$$(17)\qquad (X_2X_3X_4)(X_1Y) - (X_3X_4X_1)(X_2Y) + (X_4X_1X_2)(X_3Y) - (X_1X_2X_3)(X_4Y) = 0,$$

$$(18)\qquad (X_1X_2X_3)(Y_1Y_2Y_3) - |(X_1Y_1)(X_2Y_2)(X_3Y_3)| = 0.$$

Nach Trennung der scalaren und vectoriellen Bestandtheile zerfällt jede dieser identischen Gleichungen in zwei:

$$(17a)\qquad (\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4)(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y}) - + \cdots = 0,$$

$$(17b)\qquad [(\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4)(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) + \{\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_4\}(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y})] - + \cdots = 0,$$

$$(18a)\qquad (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3)(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3) - |(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y}_1)(\mathfrak{X}_2\,|\,\mathfrak{Y}_2)(\mathfrak{X}_3\,|\,\mathfrak{Y}_3)| = 0,$$

$$(18b)\qquad (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3)\{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3\} + \{\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\}(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3) - |(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y}_1)(\mathfrak{X}_2\,|\,\mathfrak{Y}_2)(\mathfrak{X}_3\,|\,\mathfrak{Y}_3)| - |(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y}_1)(\mathfrak{X}_2\,|\,\mathfrak{Y}_2)(\mathfrak{X}_3\,|\,\mathfrak{Y}_3)| - |(\mathfrak{X}_1\,|\,\mathfrak{Y}_1)(\mathfrak{X}_2\,|\,\mathfrak{Y}_2)(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3)| = 0.$$

Die Identitäten (17a) und (18a) bilden nun die analytische Grundlage der Geometrie im Strahlenbündel, wie auch der sphärischen Geometrie: Es muss also, *unter geeigneten Einschränkungen*, möglich sein, mutatis mutandis Sätze aus der Geometrie im Strahlenbündel auf die metrische Strahlengeometrie im Raume (und, wie wir sogleich hinzufügen wollen, Sätze aus der sphärischen Geometrie auf die Maassgeometrie der *orientirten* Strahlen im Raume) auszudehnen.

Wir werden hier, von weitergehenden Entwickelungen absehend, nur einige specielle Beziehungen darlegen, die aber doch schon zeigen werden, von wie grosser Tragweite das Princip ist, zu dem wir gelangt sind. Wir führen zu diesem Zweck zwei neue Begriffe ein:

*) S. des Verfassers Abhandlung: Die Invarianten der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Discriminante (Leipz. Ber. 1897, S. 443), wo der Satz auf n Dimensionen ausgedehnt ist. Vgl. auch „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ (Leipzig, 1889), II, § 6. — Wir werden übrigens von der Vollständigkeit des angeführten Systems keinen Gebrauch zu machen haben.

Wir verstehen unter dem dualen Winkel zweier Strahlen den Ausdruck

$$(19) \qquad (X, Y) = \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \varepsilon,$$

und unter dem dualen Sinus dreier Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *den aus ihren Plücker'schen Coordinaten gebildeten Ausdruck*

$$(20) \qquad \operatorname{Sin}(X, Y, Z) = \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) + \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} \cdot \varepsilon}{\sqrt{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}}\sqrt{\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{Y}}\sqrt{\mathfrak{Z}\,|\,\mathfrak{Z}}}.$$

Die erste dieser beiden Grössen ist unmittelbar geometrisch erklärt; wir haben auch schon gesehen, in welcher Weise ihr Unbestimmtheitsgrad von den Orientirungen der Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ selbst und ihrer gemeinsamen Normale abhängt. Ebenso hat auch in (20) das scalare Glied eine bekannte geometrische Bedeutung (§ 17, Nr. 44); und wir werden im nächsten Paragraphen sehen, wie auch das vectorielle Glied geometrisch gedeutet werden kann. Hier schon aber können wir nunmehr den Satz aussprechen:

Zwischen den goniometrischen Functionen der dualen Winkel von je zweien unter beliebig vielen Strahlen, und den dualen Sinus von je dreien dieser Strahlen bestehen eben dieselben identischen Relationen, wie zwischen den gewöhnlichen Winkelfunctionen und Sinus von Geraden im Strahlenbündel.

Ein analoger Satz besteht, wenn man die betrachteten Strahlen von vorn herein orientirt: An Stelle der Geraden im Strahlenbündel treten die Punkte einer Kugelfläche.

Die goniometrischen Functionen dualer Argumente sind nach der oben angeführten Regel zu bilden. Thun wir das, so ergiebt sich ohne Weiteres der angeführte Satz. Wir finden beispielsweise unmittelbar*)

$$(21) \qquad \cos(X, Y) = \frac{(XY)}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}} =$$
$$= \cos \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) - \sin \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \varepsilon,$$

$$(22) \qquad \sin(X, Y) = \frac{\sqrt{(XX)(YY) - (XY)^2}}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}} =$$
$$= \sin \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \cos \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \varepsilon,$$

$$(23) \qquad \operatorname{Sin}(X, Y, Z) = \frac{(XYZ)}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}\sqrt{ZZ}}.$$

Bei der Ableitung dieser und ähnlicher Formeln berücksichtige

*) Auch hier lassen wir die Klammern da weg, wo Wurzelzeichen sie entbehrlich erscheinen lassen.

man, dass man durch Multiplication der dualen Coordinaten eines reellen Strahls X mit einem geeigneten dualen Factor es immer erreichen kann, dass $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$ verschwindet, und dass jener Factor aus Ausdrücken, die homogen sind vom Grade Null, wieder herausfällt. Man wird also gar keine Specialisirung vornehmen, wenn man von vorn herein $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 0$ annimmt und

$$\sqrt{XX} = \sqrt{\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}} \tag{24}$$

setzt: Es ist (so lange nämlich nur *reelle* Grössen in Betracht kommen) gleichgültig, ob die Werthe der in die Ausdrücke (21)—(23) eingehenden Strahlencoordinaten der Plücker'schen Relation genügen, oder nicht.

Der angeführte Satz kann als ein *Uebertragungsprincip* bezeichnet werden, insofern er erlaubt, von bekannten Sätzen zu neuen (und allgemeineren) überzugehen. Es ist aber zu beachten, dass nicht nur die Sätze sich übertragen lassen, sondern auch deren Begründung, Schritt vor Schritt; wir werden daher den Sachverhalt genauer ausdrücken, wenn wir sagen, dass die in der sphärischen Geometrie z. B. benutzten Schlussfolgerungen auch noch unter allgemeineren Voraussetzungen sich verwenden lassen.

Bei Anwendung der hiermit gegebenen Methode muss man übrigens sehr vorsichtig sein. Das Auftreten von parallelen Strahlen im Raume hat in der Regel die Folge, dass die in Betracht kommenden liniengeometrischen Sätze *Ausnahmen* zulassen, die in der Geometrie im Strahlenbündel kein Analogon haben. Diese Ausnahmefälle lassen sich leicht charakterisiren; bei einer erschöpfenden Untersuchung bedürfen sie aber in jedem Falle einer besonderen Discussion. Weitere und tiefer einschneidende Vorsichtsmaassregeln werden nöthig, wenn man, wie es bei vielen Untersuchungen sich nicht vermeiden lässt, auch Strahlen mit imaginären Coordinaten betrachtet.

Wir können auf die dann erforderlichen Abänderungen unserer Grundbegriffe hier nicht eingehen. Wir wollen aber noch an einem ganz einfachen Beispiel zeigen, zu welchen eigenthümlichen Vorkommnissen schon die Untersuchung reeller Strahlen mit Hülfe der dualen Coordinaten führt. Die Formel

$$Z_i = \sigma X_i + \tau Y_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{25}$$

in der σ und τ irgend welche duale Grössen, X_i, Y_i aber die dualen Coordinaten zweier verschiedener Strahlen bedeuten, stellt im Allgemeinen das ganze Normalennetz eines Strahls dar, nämlich, wenn die Strahlen X und Y eigentlich und nicht parallel sind, das Normalennetz der gemeinsamen Normale von X und Y, mit Einschluss der in diesem Netze enthaltenen uneigentlichen Strahlen. Dies ist eine con-

tinuirliche zweifach ausgedehnte Strahlenmannigfaltigkeit. Wenn aber die Strahlen X und Y parallel sind, oder wenn einer von ihnen uneigentlich ist, so tritt eine *Verringerung der Dimensionenzahl* der durch die Gleichungen (25) dargestellten Mannigfaltigkeit ein, und diese wird überdies reducibel: Sie besteht erstens aus dem Büschel von parallelen eigentlichen Strahlen, dem X und Y angehören, zweitens aus dem Büschel von uneigentlichen Strahlen, das den uneigentlichen Strahl des ersten Büschels mit dem uneigentlichen Strahl verbindet, in dem sich die zu X und Y senkrechten Ebenen durchdringen. Eine continuirliche einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, ein Strahlenbüschel, dagegen entsteht, wenn drittens die Geraden X und Y beide uneigentlich sind. Dass derartige Thatsachen bei verwickelteren Aufgaben zu Schwierigkeiten Anlass geben müssen, liegt auf der Hand. Uebrigens hätten wir das Auftreten reducibeler Strahlenmannigfaltigkeiten durch ein noch einfacheres Beispiel erläutern können: Die Formel

$$Z_i = \sigma \cdot X_i \tag{26}$$

stellt, wenn σ wieder eine beliebige duale Grösse ist, ein *Linienkreuz* dar, d. h. im Allgemeinen die beiden Axen eines eigentlichen Linienkreuzes, im besonderen Falle die Nebenaxe eines uneigentlichen Linienkreuzes.

Die durch die Gleichungen $\varepsilon^2 = +1$, $\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^2 = -1$ definirten Systeme dualer Grössen scheinen zuerst von Clifford, und zwar zum Zwecke verschiedener Erweiterungen des Quaternionencalculs, benutzt worden zu sein. Nach ihm, der durch frühzeitigen Tod an der Ausführung seiner Pläne gehindert worden ist, haben sich zu ähnlichen Zwecken mehrere Mathematiker dieser Symbole bedient, u. A. auch der Verfasser in seiner mehrfach citirten Theorie der Bewegungen. Es hat sodann Herr Fr. Schilling die Bemerkung gemacht, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente sich in Nicht-Euklidischen Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung reell deuten lassen (Gött. Nachr. 1891, Nr. 5 oder Math. Ann. Bd. 39, S. 598). Die diesem übrigens noch *sehr* viel allgemeiner zu fassenden Satze anhaftende Beschränkung auf den Lobatschewsky'schen Raum und auf reelle Argumente ist, durch Einführung beliebiger dualer Grössen an Stelle der gewöhnlichen Imaginären, vom *Verfasser* beseitigt worden (Abh. der K. Sächs. Academie, 1893, Nr. II, S. 229). Hier tritt also, wie es scheint, zuerst der *Begriff des dualen Winkels im Euklidischen Raume* auf, wie er im Texte vorkommt. Zu dem (nicht veröffentlichten) Beweise seines Satzes hat sich der Verfasser auch damals schon dualer Liniencoordinaten bedient, aber solcher, die aus Plücker'schen Coordinaten zusammengesetzt sind. Er ist durch diese die Brauchbarkeit des Verfahrens sehr verringernde Beschränkung zu jener Zeit verhindert worden, die Tragweite der benutzten Methode zu erkennen.

Auf die im Texte auseinandergesetzte, mutatis mutandis auch auf die Nicht-Euklidische Geometrie, wie auf die Geometrie von mehreren umfassen-

deren (endlichen und unendlichen) Gruppen von Transformationen des Linienraumes anwendbare Methode, sowie auf deren, wie er glaubt, *bedeutende Tragweite* hat der Verfasser zuerst in seiner mehrfach erwähnten Veröffentlichung vom 8. Jan. 1899 hingewiesen. Abgesehen von dem Begriff des *dualen Sinus*, in dem der Begriff des dualen Winkels eine nothwendige Ergänzung findet, ist als ein wesentlich neues Moment hinzugekommen der Gebrauch eines Systems von sechs *beliebigen* Grössen im Sinne von Liniencoordinaten.

Einer der dieser Methode zu Grunde liegenden Gedanken, nämlich die Verbindung *specieller* (Plücker'scher) Liniencoordinaten zu dualen Grössen ist inzwischen von mehreren anderen Seiten entwickelt worden. Nach einem während des Druckes der vorliegenden Untersuchung erschienenen, leider sehr kurz gehaltenen Referat in den Fortschritten der Mathematik (Bd. 28, 1897, S. 592) — ist dieser Gedanke in der Beschränkung auf Euklidische Geometrie von Herrn A. P. Kotjelnikoff (Schraubenrechnung und ihre Anwendungen in Geometrie und Mechanik, Kasan, 1895, russisch) dargelegt, und von ihm, wie von Herrn D. Seiliger (Hauptformeln der complexen Liniengeometrie, Kasan, Univ. 1897, Nr. 12, S. 93—108, russisch) zu Untersuchungen über Geometrie und Kinematik verwendet worden.

Derselbe Gedanke, ebenfalls in der Beschränkung auf Euklidische Geometrie, findet sich ferner in mehreren Abhandlungen des Herrn R. de Saussure (Am. J. v. 18, 1896 p. 304, v. 19, 1897, p. 329). Indessen hat es dieser Autor an der gewöhnlichsten Selbstkritik fehlen lassen. Schon das Princip ist bei ihm durch den Gebrauch eines unzulässigen Symbols ($J = \varepsilon^{-1}$) entstellt. Richtiges, unklar Gedachtes und geradezu Falsches ist in diesen Arbeiten unlösbar verquickt, so dass nur Der Brauchbares in ihnen wird erkennen können, der sich bereits im Besitze einer zutreffenden Formulirung des Grundgedankens befindet*).

Ob Herr Kotjelnikoff in seinem neuerdings veröffentlichten auch die Nicht-Euklidische Geometrie berücksichtigenden Werke ebenfalls dahin gelangt ist, Systeme von sechs beliebigen Grössen als Liniencoordinaten zu benutzen und auf die Geometrie umfassenderer Gruppen anzuwenden, hat der Verfasser aus dem russischen Texte nicht feststellen können. (Vgl. das Vorwort.)

§ 24.

Anwendungen: Trigonometrie im Strahlenraum; Stereometrische Summen von Motoren.

Substituirt man in die Identitäten (17) und (18) des vorigen Paragraphen die Ausdrücke (19) und (20), so entstehen die folgenden beiden identischen Gleichungen:

---

*) Man vergleiche eine (freilich nicht genügende) Kritik, die in einem kürzlich erschienenen Referate (Fortschritte der Mathematik, Bd. 28, S. 449) an diesen Arbeiten geübt wird. Ein älteres Referat (ebenda Bd. 27, S. 345) reproducirt ganz naiv auch handgreiflich Unrichtiges.

$$(1)\quad \begin{aligned} &\mathrm{Sin}\,(X_2, X_3, X_4)\cdot\cos\,(X_1, Y) - \mathrm{Sin}\,(X_3, X_4, X_1)\cdot\cos\,(X_2, Y) + \\ &+ \mathrm{Sin}\,(X_4, X_1, X_2)\cdot\cos\,(X_3, Y) - \mathrm{Sin}\,(X_1, X_2, X_3)\cdot\cos\,(X_4, Y) = 0, \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} &\mathrm{Sin}\,(X_1, X_2, X_3)\cdot\mathrm{Sin}\,(Y_1, Y_2, Y_3) - \\ &- |\cos\,(X_1, Y_1)\cos\,(X_2, Y_2)\cos\,(X_3, Y_3)| = 0. \end{aligned}$$

Auf den hieraus durch Verkürzung, d. h. durch Weglassen der vectoriellen Glieder entstehenden Identitäten beruht aber die ganze sphärische Polygonometrie; die gebräuchlichen trigonometrischen Formeln sind theils in ihnen unmittelbar enthalten, theils ergeben sie sich aus ihnen als algebraische Folgerungen. Diese Folgerungen aber können, falls man die Voraussetzungen allgemein genug wählt, in gleicher Weise gezogen werden, wenn man an Stelle der Seiten a_i eines sphärischen Dreiecks und der Seiten α_i seines Polardreiecks die ihnen entsprechenden dualen Winkel im Raume setzt. Wir werden von den so durch Erweiterung aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie hervorgehenden Formeln einige Anwendungen zu machen haben; wir stellen daher die wichtigsten unter ihnen kurz zusammen.

Trigonometrie im Strahlenraum.

Wir verstehen unter P_1, P_2, P_3 drei eigentliche Strahlen, und unter Q_1, Q_2, Q_3 deren gemeinsame Normalen, so dass

$$(3)\quad (Q_1 X) = (P_2 P_3 X),\quad (Q_2 X) = (P_3 P_1 X),\quad (Q_3 X) = (P_1 P_2 X),$$

und zwar wollen wir annehmen, dass die drei letzten Strahlen durch die ersten bestimmt sind, und ihrerseits wieder diese in gleicher Weise bestimmen. Die sechs Strahlen P_i, Q_i bilden unter dieser Voraussetzung die im ersten Abschnitt mehrfach besprochene Figur eines räumlichen Sechsseits mit lauter rechten Winkeln, und es haben die Grössen $(P_\lambda P_\lambda)$ und $(Q_\lambda Q_\lambda)$, sowie auch $(P_1 P_2 P_3)$ und $(Q_1 Q_2 Q_3) = (P_1 P_2 P_3)^2$ von Null verschiedene scalare Bestandtheile. Ertheilen wir den Wurzelgrössen $\sqrt{P_\lambda P_\lambda}$, $\sqrt{Q_\lambda Q_\lambda}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Wurzelgrössen $\sqrt{\mathfrak{P}_\lambda | \mathfrak{P}_\lambda}$, $\sqrt{\mathfrak{Q}_\lambda | \mathfrak{Q}_\lambda}$ bestimmte Werthe, so werden damit alle sechs Strahlen orientirt.

Bezeichnen wir dann weiter mit a_1, a_2, a_3 und α_1, α_2, α_3 die dualen Winkel von je zwei gleichartigen der sechs Strahlen, so dass z. B.

$$(4)\quad \begin{aligned} a_1 &= (P_2, P_3) = \mathrm{ang}\,(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + \mathrm{dist}\,(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3)\cdot\varepsilon, \\ \alpha_1 &= (Q_2, Q_3) = \mathrm{ang}\,(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) + \mathrm{dist}\,(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3)\cdot\varepsilon, \end{aligned}$$

so bestehen zwischen diesen sechs Grössen dieselben identischen Gleichungen,

*die zwischen den Seiten eines sphärischen Dreiecks und den Seiten seines Polardreiecks stattfinden**).

Um die analytischen Ausdrücke der wichtigsten Winkelfunctionen zu erhalten, brauchen wir noch eine Reihe von weiteren Irrationalitäten, die wie folgt erklärt sind**):

Wir setzen zuerst

(5)

$$2\mathfrak{P}_\lambda^+ = \sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu} + (P_\mu P_\nu), \quad 2\mathfrak{Q}_\lambda^+ = \sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu} + (Q_\mu Q_\nu),$$
$$2\mathfrak{P}_\lambda^- = \sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu} - (P_\mu P_\nu), \quad 2\mathfrak{Q}_\lambda^- = \sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu} - (Q_\mu Q_\nu),$$
$$2\sqrt{\mathfrak{P}_\lambda^+}\sqrt{\mathfrak{P}_\lambda^-} = \sqrt{Q_\lambda Q_\lambda}, \quad 2\sqrt{\mathfrak{Q}_\lambda^+}\sqrt{\mathfrak{Q}_\lambda^-} = (P_1P_2P_3)\sqrt{P_\lambda P_\lambda},$$

was möglich ist, da zufolge unserer Voraussetzungen auch die Grössen $\mathfrak{P}_\lambda$, $\mathfrak{Q}_\lambda$ von Null verschiedene scalare Bestandtheile haben müssen; ferner setzen wir

(6)

$$2\mathfrak{A}_0 = (P_1P_1)(P_2P_2)(P_3P_3) - (P_2P_3)(P_3P_1)(P_1P_2) + \\ + \Sigma(Q_\mu Q_\nu)\sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu},$$
$$2\mathfrak{B}_0 = (P_1P_1)(P_2P_2)(P_3P_3) - (P_2P_3)(P_3P_1)(P_1P_2) + \\ + \Sigma(P_\mu P_\nu)\sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu},$$

und wir erklären, dass z. B. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ aus diesen Ausdrücken dadurch hervorgehen sollen, dass man die Vorzeichen von $\sqrt{P_2P_2}$ und $\sqrt{P_3P_3}$, sowie von $\sqrt{Q_2Q_2}$ und $\sqrt{Q_3Q_3}$ wechselt. Es ist dann weiter möglich, ohne Widerspruch anzunehmen, dass

---

*) Vgl. das Citat auf S. 207.

**) Wegen der Formeln der sphärischen Trigonometrie müssen wir auf die soeben citirte Schrift des Verfassers „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen“ verweisen, da in der üblichen Darstellung der Lehrbücher die Bezeichnungen anders gewählt und einige Beweise zu speciell angelegt sind. Die analytischen Ausdrücke des Textes, die in dieser Abhandlung nicht vorkommen, sind enthalten in den vom Verfasser Math. Ann. Bd. 49, S. 513 angegebenen Formeln, aus denen sie durch die Substitutionen

$$F_{ik} = -2(P_iP_k), \quad R_{ik} = 4(Y_iY_k), \quad P_\lambda^\pm = 2\mathfrak{P}_\lambda^\mp, \quad Q_\lambda^\pm = 4\mathfrak{Q}_\lambda^\mp,$$
$$R = -8(P_1P_2P_3)^2, \quad R + \Delta_i = 32\mathfrak{A}_i, \quad R + \nabla_i = 32\mathfrak{B}_i,$$

und durch den Process der Erweiterung (S. 199) hervorgehen. —

Der erwähnte Satz des Herrn Schilling kann in ähnlicher Weise begründet und vervollständigt werden, wie der Satz des Textes.

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\mathfrak{B}_0} &= -\sqrt{\mathfrak{A}_0} + \sqrt{\mathfrak{A}_1} + \sqrt{\mathfrak{A}_2} + \sqrt{\mathfrak{A}_3}, \\ 2\sqrt{\mathfrak{B}_1} &= \sqrt{\mathfrak{A}_0} - \sqrt{\mathfrak{A}_1} + \sqrt{\mathfrak{A}_2} + \sqrt{\mathfrak{A}_3}, \\ 2\sqrt{\mathfrak{B}_2} &= \sqrt{\mathfrak{A}_0} + \sqrt{\mathfrak{A}_1} - \sqrt{\mathfrak{A}_2} + \sqrt{\mathfrak{A}_3}, \\ 2\sqrt{\mathfrak{B}_3} &= \sqrt{\mathfrak{A}_0} + \sqrt{\mathfrak{A}_1} + \sqrt{\mathfrak{A}_2} - \sqrt{\mathfrak{A}_3} \end{aligned}$$

(und umgekehrt), sowie dass

$$(8)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\mathfrak{A}_0} = 2\sqrt{\mathfrak{P}_1^-}\sqrt{\mathfrak{P}_2^-}\sqrt{\mathfrak{P}_3^-}, && (P_1P_2P_3)\sqrt{\mathfrak{B}_0^-} = 2\sqrt{\mathfrak{Q}_1^-}\sqrt{\mathfrak{Q}_2^-}\sqrt{\mathfrak{Q}_3^-}, \\ &\sqrt{\mathfrak{A}_1} = 2\sqrt{\mathfrak{P}_1^-}\sqrt{\mathfrak{P}_2^+}\sqrt{\mathfrak{P}_3^+}, && (P_1P_2P_3)\sqrt{\mathfrak{B}_1^-} = 2\sqrt{\mathfrak{Q}_1^-}\sqrt{\mathfrak{Q}_2^+}\sqrt{\mathfrak{Q}_3^+}, \\ &\sqrt{\mathfrak{A}_2} = 2\sqrt{\mathfrak{P}_1^+}\sqrt{\mathfrak{P}_2^-}\sqrt{\mathfrak{P}_3^+}, && (P_1P_2P_3)\sqrt{\mathfrak{B}_2^-} = 2\sqrt{\mathfrak{Q}_1^+}\sqrt{\mathfrak{Q}_2^-}\sqrt{\mathfrak{Q}_3^+}, \\ &\sqrt{\mathfrak{A}_3} = 2\sqrt{\mathfrak{P}_1^+}\sqrt{\mathfrak{P}_2^+}\sqrt{\mathfrak{P}_3^-}, && (P_1P_2P_3)\sqrt{\mathfrak{B}_3^-} = 2\sqrt{\mathfrak{Q}_1^+}\sqrt{\mathfrak{Q}_2^+}\sqrt{\mathfrak{Q}_3^-} \end{aligned}$$

sein soll. Setzen wir dann noch

$$(9)$$

$$\begin{aligned} 2s_0 &= 2\pi - a_1 - a_2 - a_3, & 2\sigma_0 &= 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\ 2s_1 &= -a_1 + a_2 + a_3, & 2\sigma_1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ 2s_2 &= a_1 - a_2 + a_3, & 2\sigma_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ 2s_3 &= a_1 + a_2 - a_3, & 2\sigma_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \end{aligned}$$

so folgt (bei der gewöhnlichen Bestimmung der Vorzeichen in den Delambre'schen Gleichungen) unter Anderem:

$$(10)$$

$$\cos a_\lambda = -\frac{(P_\mu P_\nu)}{\sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu}}, \qquad \cos\alpha_\lambda = \frac{(Q_\mu Q_\nu)}{\sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu}},$$

$$\sin a_\lambda = \frac{\sqrt{Q_\lambda Q_\lambda}}{\sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P}}, \qquad \sin\alpha_\lambda = \frac{(P_1P_2P_3)\sqrt{P_\lambda P_\lambda}}{\sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{a_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{Q_\lambda Q_\lambda}}{2\mathfrak{P}_\lambda^-} = \frac{2\mathfrak{P}_\lambda^+}{\sqrt{Q_\lambda Q_\lambda}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha_\lambda}{2} = \frac{(P_1P_2P_3)\sqrt{P_\lambda P_\lambda}}{2Q_\lambda^-} = \frac{2Q_\lambda^+}{(P_1P_2P_3)\sqrt{P_\lambda P_\lambda}},$$

$$\sin\frac{a_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{P}_\lambda^-}}{\sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu}}, \qquad \sin\frac{\alpha_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Q}_\lambda^-}}{\sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu}},$$

$$\cos\frac{a_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{P}_\lambda^+}}{\sqrt{P_\mu P_\mu}\sqrt{P_\nu P_\nu}}, \qquad \cos\frac{\alpha_\lambda}{2} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Q}_\lambda^+}}{\sqrt{Q_\mu Q_\mu}\sqrt{Q_\nu Q_\nu}},$$

$$\sin s_i = \frac{\sqrt{\mathfrak{B}_i}}{\sqrt{P_1P_1}\sqrt{P_2P_2}\sqrt{P_3P_3}}, \qquad \sin\sigma_i = \frac{(P_1P_2P_3)\sqrt{\mathfrak{A}_i}}{\sqrt{Q_1Q_1}\sqrt{Q_2Q_2}\sqrt{Q_3Q_3}},$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} P &= \operatorname{Sin}(P_1, P_2, P_3) = \frac{(P_1 P_2 P_3)}{\sqrt{P_1 P_1}\sqrt{P_2 P_2}\sqrt{P_3 P_3}}, \\ \Pi &= \operatorname{Sin}(Q_1, Q_2, Q_3) = \frac{(P_1 P_2 P_3)^2}{\sqrt{Q_1 Q_1}\sqrt{Q_2 Q_2}\sqrt{Q_3 Q_3}}. \end{aligned}$$

Die Ableitung aller dieser Formeln, sowie eine Reihe von weiteren, auf deren Anführung wir verzichten, verlangt einige Rechnungen, bietet aber sonst keine Schwierigkeiten*). Sie enthalten eine im Wesentlichen vollständige analytische Begründung der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie sowohl als auch unserer Trigonometrie im Strahlenraume, deren Formeln damit als Folgesätze algebraischer Identitäten, nämlich der Identitäten (17) und (18) in § 23 nachgewiesen sind. Einer der abgeleiteten Gleichungen, nämlich der Formel des sogenannten Sinussatzes:

$P = \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_1 = \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3$

entnehmen wir nun ohne Weiteres *eine geometrische Deutung der aus drei Geraden* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *gebildeten absoluten Bewegungsinvariante*

$$(12)\qquad \frac{\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})} =$$

$$= \operatorname{ctg}\operatorname{ang}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) + \operatorname{ctg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) +$$

$$+ \operatorname{ctg}\operatorname{ang}(\widehat{\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}, \widehat{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}) \cdot \operatorname{dist}(\widehat{\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}, \widehat{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}).$$

Dieser ja freilich nicht ganz einfach gebildete Ausdruck ändert sich also nicht, wenn man irgend zwei der drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ vertauscht. Setzt man ihn gleich Null, so ergiebt sich als Ort der Geraden $\mathfrak{Z}$ das auf S. 194 betrachtete Gewinde. Ein eleganterer Ausdruck entsteht aus der ebenfalls in unseren Formeln enthaltenen Gleichung

$$P^2 = 4\sin s_0 \cdot \sin s_1 \cdot \sin s_2 \cdot \sin s_3:$$

$$(13)\qquad 4\frac{\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}}{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})} =$$

$$= \sum \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\{\varepsilon_1 \operatorname{ang}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) + \varepsilon_2 \operatorname{ang}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) + \varepsilon_3 \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\} \cdot$$

$$\cdot \{\varepsilon_1 \operatorname{dist}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) + \varepsilon_2 \operatorname{dist}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}) + \varepsilon_3 \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\}$$

$$\left(\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = +1\end{matrix}\right). \quad -$$

Wir wenden uns nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, nämlich zu dem auf die Rechnung mit dualen Strahlencoordinaten zu gründenden Nachweis der im ersten Abschnitt entwickelten Sätze über die

*) Allerdings liegen die Gleichungen (7) ziemlich versteckt. Sind sie aber einmal gefunden, so ist auch ihre Zulässigkeit unschwer festzustellen.

stereometrische Addition der Motoren und die stereometrische Superposition der Bewegungen.

Zuordnung zwischen Motoren und dualen linearen Formen.

Wir ordnen zuerst dem durch zwei eigentliche Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ bestimmten Motor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ eine aus dualen Liniencoordinaten Z_1, Z_2, Z_3 gebildete ternäre lineare Form zu, die wir mit $(N_X^Y Z)$ oder kürzer mit (NZ) bezeichnen, so dass

$$(NZ) = N_1 Z_1 + N_2 Z_2 + N_3 Z_3,$$

nämlich vermöge der Definitionsgleichung

$$(14) \qquad (NZ) = \frac{(XYZ)}{(XY)} = \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) + \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}\varepsilon}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y})\varepsilon}.$$

Diese Zuordnung ist möglich, weil nach der Definition des Motors der scalare Theil $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y})$ des Nenners immer von Null verschieden ist. Es ist nach dieser Definition stets $(NX) = 0$, $(NY) = 0$, und man kann, wenn die lineare Form (NZ) und die Gerade X oder $\mathfrak{X}$ gegeben sind, demnach ohne Weiteres den Endstrahl Y des Motors finden:

$$(15) \qquad (YZ) = (XZ) + (NXZ).$$

Die Zuordnung zwischen ternären linearen Formen und Motoren ist daher eindeutig umkehrbar; es würde sich leicht durch eine besondere Rechnung nachweisen lassen, dass die Form (NZ) unverändert bleibt bei allen den Schraubungen, die den Motor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ nicht ändern; es wird aber dieser Nachweis durch die folgenden Entwickelungen überflüssig gemacht.

Analytischer Ausdruck der Construction Nr. 18. (S. 87.)

Wir werden jetzt den folgenden Satz beweisen:

Motoren werden stereometrisch addirt, indem man die entsprechenden ternären linearen Formen addirt, und umgekehrt.

D. h. wir behaupten, dass die stereometrische Gleichung

$$(16) \qquad \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{X}} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{Z}}$$

vollkommen äquivalent ist mit der algebraischen Gleichung

$$(17) \qquad (N_O^X \Xi) + (N_O^Y \Xi) = (N_O^Z \Xi),$$

in der wir nunmehr, um das Zeichen Z anderweitig verwenden zu können, die dualen Coordinaten eines unbestimmten Strahles mit Ξ_i bezeichnet haben.

Wir werden den Beweis dieses Satzes nur führen unter den bei der Construction Nr. 18 gemachten Voraussetzungen: Aus der Art der Abhängigkeit zwischen Motoren und linearen Formen folgt dann, dass derselbe Satz auch noch in allen den Fällen gilt, die durch diese Voraussetzungen ausgeschlossen sind, sofern man nur die Construction Nr. 18 in geeigneter Weise abändert. Wie diese Abänderung zu geschehen hat, haben wir schon ausführlich auseinandergesetzt, und es würde einer Wiederholung der damals angestellten Ueberlegungen auf unserer nunmehrigen algebraischen Grundlage Nichts im Wege stehen; wir verzichten aber auf diese einigermaassen beschwerlichen Erörterungen.

Die genannten Voraussetzungen besagen algebraisch, dass nicht nur die scalaren Bestandtheile von (OO), (OX), (OY) von Null verschieden sind, sondern auch der scalare Bestandtheil von (OXY); es wird also die Division mit irgend einer von diesen Grössen eine erlaubte Operation sein. Dies vorausgeschickt, können wir nun unsere Construction Nr. 18 (S. 87) sehr leicht algebraisch einkleiden: Wir finden ohne Weiteres:

$$\begin{aligned}
&(X_1\Xi) = (OX\Xi)\,, \qquad (Y_1\Xi) = (OY\Xi)\,,\\
&\left\{\begin{aligned}(X_2\Xi) &= (OX_1\Xi) = (OX)(O\Xi) - (OO)(X\Xi)\,,\\ (Y_2\Xi) &= (OY_1\Xi) = (OY)(O\Xi) - (OO)(Y\Xi)\,,\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}(X_3\Xi) &= (X_2Y\Xi) = (OX)(OY\Xi) - (OO)(XY\Xi)\,,\\ (Y_3\Xi) &= (Y_2X\Xi) = (OY)(OX\Xi) + (OO)(XY\Xi)\,,\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

ferner, wenn ebenso

$$(Z\Xi) = (X_3Y_3\Xi)$$

gesetzt wird,

$$(OZ) = (OO)\cdot(OXY)\cdot(OX)\cdot(OY)$$

und schliesslich, nach Unterdrückung eines Factors (OXY),

$$\frac{(Z\Xi)}{(ZO)} = \frac{(X\Xi)}{(XO)} + \frac{(Y\Xi)}{(YO)} - \frac{(O\Xi)}{(OO)}. \tag{18}$$

Dieses also ist, nicht nur in dem betrachteten allgemeinen Falle, sondern auch, nach Ersetzung der ursprünglichen Definition von $(Z\Xi)$ durch eben diese Gleichung (18), in jedem der durch die Gleichung $(\mathfrak{D}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$ charakterisirten Grenzfälle der analytische Ausdruck der in Nr. (16) enthaltenen geometrischen Construction. Die Gleichung (18) zieht aber unmittelbar die Gleichung (17) nach sich. Dass auch das Umgekehrte gilt, erkennt man sehr leicht mit Hülfe von (15). Die Behauptung ist also erwiesen.

Zweite Art der Zuordnung von Motoren und Alternanten.

Um nun die Beziehung der stereometrischen Addition der Motoren zu unseren verschiedenen Arten geometrischer Addition klarzustellen, müssen wir den Bereich der dualen Grössen verlassen, wir müssen zu Plücker'schen Coordinaten zurückkehren, da wir uns in jenen anderen Fällen solcher bedient hatten. Wir setzen also nunmehr

$$(NZ) = (\mathfrak{N} \mid \mathfrak{Z}) + (\mathfrak{N}\mathfrak{Z})\varepsilon. \tag{19}$$

Eine Vergleichung dieses Ausdrucks mit Nr. (14) zeigt, dass

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{Z}) = \frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} - (\mathfrak{X}\mathfrak{Y})(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})}{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}. \tag{20}$$

Diese Alternante ordnen wir jetzt unserem Motor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ zu; und wir berechnen auch in diesem Falle, indem wir von der dualen Gleichung (15) ebenfalls zu einer solchen in Plücker'schen Coordinaten übergehen, leicht den Endstrahl $\mathfrak{Y}$, wenn die Alternante $(\mathfrak{N}\mathfrak{Z})$ und der Anfangsstrahl $\mathfrak{X}$ den Bedingungen $(\mathfrak{N}\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{N} \mid \mathfrak{X}) = 0$ gemäss gegeben sind:

$$(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = \left\{ \begin{array}{l} [1 + (\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N})][(\mathfrak{X}\mathfrak{Z}) + \{\mathfrak{N}\mathfrak{X}\mathfrak{Z}\}] \\ \quad - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{N}\mathfrak{N})[(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Z}) + (\mathfrak{N}\mathfrak{X}\mathfrak{Z})] \end{array} \right\}. \tag{21}$$

Ferner erhalten wir, in Plücker'schen Liniencoordinaten, die Gleichung der durch die stereometrische Gleichung (16) definirten Geraden $\mathfrak{Z}$. Setzen wir, unter Ξ_{ik} nunmehr Plücker'sche Coordinaten einer unbestimmten Geraden Ξ verstehend,

$$(\mathfrak{N}\Xi) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})\{\mathfrak{D}\mathfrak{X}\Xi\} - (\mathfrak{D}\mathfrak{X})(\mathfrak{D}\mathfrak{X}\Xi)}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})^2} + \\ + \dfrac{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})\{\mathfrak{D}\mathfrak{Y}\Xi\} - (\mathfrak{D}\mathfrak{Y})(\mathfrak{D}\mathfrak{Y}\Xi)}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})^2} \end{array} \right\},$$

so ergiebt sich

$$(\mathfrak{Z}\Xi) = [1 + (\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N})][(\mathfrak{D}\Xi) + \{\mathfrak{N}\mathfrak{D}\Xi\}] - \\ - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{N}\mathfrak{N})[(\mathfrak{D} \mid \Xi) + (\mathfrak{N}\mathfrak{D}\Xi)],$$

$$\frac{1 + (\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})^2} + 2\frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})} + \frac{(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})^2} - \frac{3}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D})},$$

$$-\frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})}{2(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{X})(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})^3} + \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{X})(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})^2(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})} + \\ + \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{Y})(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})^2} + \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})^3} - \frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{Y})},$$

und, wenn schliesslich

$$K = -\frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})}{2[1 + (\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N})]} \tag{22}$$

gesetzt wird,

(23)

$$\frac{(\mathfrak{Z}\Xi)}{(\mathfrak{Z}\,|\,\mathfrak{D})} = \frac{(\mathfrak{X}\ \mathfrak{D})(\mathfrak{X}\Xi) - (\mathfrak{X}\mathfrak{D})(\mathfrak{X}\ \Xi)}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{D})^2} + \frac{(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{D})(\mathfrak{Y}\Xi) - (\mathfrak{Y}\mathfrak{D})(\mathfrak{Y}\,|\,\Xi)}{(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{D})^2} -$$
$$- \frac{(\mathfrak{D}\Xi)}{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})} + K\cdot\left\{\frac{(\mathfrak{X}\,|\,\Xi)}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{D})} + \frac{(\mathfrak{Y}\,|\,\Xi)}{(\mathfrak{Y}\,|\,\mathfrak{D})} - \frac{(\mathfrak{D}\,|\,\Xi)}{(\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{D})}\right\}.$$

Dieselbe Gleichung $(\mathfrak{Z}\Xi) = 0$ erhält man unmittelbar aus (18), wenn man in dieser die scalaren und vectoriellen Bestandtheile sondert und dann wiederum Plücker'sche Coordinaten einführt. Die in (23) auftretenden Nenner sind, da von uns nur reelle Figuren betrachtet werden, stets von Null verschieden.

Der zuletzt hervorgehobene Satz (S. 213) kann nunmehr so gefasst und vervollständigt werden:

(G.) *Jedem Motor* $\mathfrak{N}$ *kann eine Alternante* $(\mathfrak{N}\mathfrak{X})$ *eindeutig umkehrbar zugeordnet werden* (Nr. 20, 21).

Motoren werden stereometrisch addirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

Die aus drei Geraden $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *vermöge*

$$\mathfrak{N}^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{D}} + \mathfrak{N}^{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{N}^{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{D}}$$

abgeleitete vierte Gerade $\mathfrak{Z}$ *wird in dualen Liniencoordinaten dargestellt durch die Gleichung* $(Z\Xi) = 0$ (Nr. 18), *in Plücker'schen Liniencoordinaten durch die Gleichung* $(\mathfrak{Z}\Xi) = 0$ (Nr. 22, 23).

Ist ein Motor $\mathfrak{N}$ *zu einer geometrischen Summe von Keilen u. s. w. affiliirt, so sind die entsprechenden Alternanten einander gleich,* $(\mathfrak{N}\mathfrak{X}) = (\mathfrak{K}\mathfrak{X})$ *u. s. f.*

Um die Richtigkeit der letzten Behauptung einzusehen, genügt es, zu bemerken, dass jedesmal, wenn $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$ ist, wenn also der vorgelegte Motor sich auf einen Rotor oder Translator reducirt, die Gleichung

$$(\mathfrak{M}^{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{N}^{\mathfrak{y}}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{Z})$$

stattfindet (s. § 22, Nr. 6, § 24, Nr. 20).

Duale Oeffnung eines Motors.

Unter der „dualen Oeffnung" eines Motors verstehen wir die Grösse

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{tg}(X, Y) = \operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \frac{\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}{\cos^2(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})}\cdot\varepsilon.$$

Hier ist der scalare Bestandtheil die Grösse, die wir im ersten Abschnitt als *Oeffnung*, der vectorielle Coefficient die Grösse, die wir dort als *Sperrung* eines Motors bezeichnet hatten. Es folgt unmittel-

bar, auch algebraisch, dass bei stereometrischer Addition von Motoren desselben Trägers die Oeffnungen und Sperrungen addirt werden.

Bedient man sich der Motoren $\mathfrak{N}$ zur geometrischen Darstellung von Dynamen, so repräsentiren die beiden genannten Grössen die Intensität L der Zugkraft und das Moment M der Drehkraft der Dyname. Die analytischen Ausdrücke für diese Grössen lassen sich unmittelbar bilden. Für den Fall z. B., dass der Motor $\mathfrak{N}$ kein Translator ist, folgt aus (20):

(25)

$$L = \operatorname{tg} \operatorname{ang} (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \sqrt{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N}} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}}{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})},$$

$$M = \frac{\operatorname{dist} \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}{\cos^2 \operatorname{ang} (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})} = \frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})}{2\sqrt{\mathfrak{N} \mid \mathfrak{N}}} = -\frac{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y})}{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})\sqrt{(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Y}) - (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})^2}},$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln, die wir in § 17 abgeleitet hatten. Unter derselben Voraussetzung kann man kürzer schreiben:

$$\text{(26)} \qquad \operatorname{tg}(X, Y) = \frac{\sqrt{(XX)(YY) - (XY)^2}}{(XY)} = L + M\varepsilon .$$

Seien $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}_1}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}_2}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}_3}$ drei Motoren mit den Hauptaxen $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Y}_3$, von verschwindender stereometrischer Summe, so folgt unter den auf S. 121 angegebenen Voraussetzungen

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{tg}(O, X_1) : \operatorname{tg}(O, X_2) : \operatorname{tg}(O, X_3) = \\ &= \sin(Y_2, Y_3) : \sin(Y_3, Y_1) : \sin(Y_1, Y_2) . \end{aligned}$$

Trennt man hier die scalaren und die vectoriellen Bestandtheile, so ergeben sich die ebendort angeführten Gleichungen.

Satz von Petersen und Morley.

Aus den Gleichungen (3) folgt, sofern $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3) \neq 0$,

$$\text{(28)} \qquad \frac{(P_1 Q_1 X)}{(P_1 Q_1)} + \frac{(P_2 Q_2 X)}{(P_2 Q_2)} + \frac{(P_3 Q_3 X)}{(P_3 Q_3)} = 0,$$

oder

$$\text{(29)} \qquad \mathfrak{N}_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{D}_1} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{P}_2}^{\mathfrak{D}_2} + \mathfrak{N}_{\mathfrak{P}_3}^{\mathfrak{D}_3} = 0 .$$

Diese Gleichung enthält den auf S. 107 bereits auf geometrischem Wege bewiesenen Satz. Natürlich kann man auch den Morley'schen Strahl, die gemeinsame Normale der drei Normalen $(P_\lambda Q_\lambda X) = 0$ ohne Weiteres angeben. Seine Gleichung in dualen Coordinaten ist

$$\text{(30)} \qquad \begin{aligned} &(P_3 P_1)(P_1 P_2)(P_2 P_3 X) + (P_1 P_2)(P_2 P_3)(P_3 P_1 X) + \\ &+ (P_2 P_3)(P_3 P_1)(P_1 P_2 X) = 0 . \end{aligned}$$

Wir führen schliesslich noch eine einfache Formel an, die wir im folgenden Paragraphen zu verwenden haben werden:

Winkelhalbirende von zwei Strahlen.

Die gegebenen Strahlen setzen wir als nicht parallel voraus. Sie seien in dualen Coordinaten dargestellt durch die Gleichungen $(XZ) = 0$, $(YZ) = 0$. Dann sind ihre Winkelhalbirenden (S. 9) gegeben durch die dualen Gleichungen

$$\frac{(XZ)}{\sqrt{XX}} \pm \frac{(YZ)}{\sqrt{YY}} = 0. \tag{31}$$

§ 25.

Die stereometrische Superposition der Bewegungen.

Wir sind zu der linearen und correlativen Superposition der Bewegungen von der Aufgabe aus gelangt, eine gegebene Alternante nach einem eigentlichen Punkt und nach der unendlich fernen Ebene, oder nach einer eigentlichen Ebene und senkrecht dazu zu zerlegen (S. 169, 170). Ebenso kommen wir nun zu der stereometrischen Superposition der Bewegungen, wenn wir eine dritte analoge Aufgabe stellen:

Man soll eine ternäre duale lineare Form nach einem gegebenen eigentlichen Strahl U und senkrecht dazu zerlegen.

D. h. wir verlangen, die vorgelegte Form (NX) als Summe zweier anderen darzustellen, deren eine $(N_1 X)$ sich von der Form (UX) nur um einen von X freien (dualen) Factor unterscheidet, während die andere $(N_2 X)$ der Bedingung $(N_2 U) = 0$ genügt. Die Lösung liegt auf der Hand:

$$(NX) = \frac{(NU)}{(UU)} \cdot (UX) + \left\{(NX) - \frac{(NU)}{(UU)} \cdot (UX)\right\}. \tag{1}$$

Begleitende Motoren.

Die Formel (1) liefert uns nun eine analytische Darstellung der *begleitenden Motoren* eines gegebenen Motors (S. 101). Wir schreiben in dem zweiten Summanden X^* an Stelle von U, und Z an Stelle von X, und erhalten dann den zu dem Strahl $X^* = \mathfrak{X}^*$ gehörigen und den Motor $N = \mathfrak{N}$ begleitenden Motor dargestellt durch die duale Form

$$(NZ) - \frac{(NX^*)}{(X^*X^*)} \cdot (X^*Z). \tag{2}$$

Der Umstand, dass das Symbol N hier linear und homogen auftritt, setzt in Evidenz, dass bei stereometrischer Addition gegebener Motoren auch die zu einem bestimmten eigentlichen Strahl X^* gehörigen begleitenden Motoren stereometrisch addirt werden (S. 101). Setzen wir den Ausdruck (2) in die doppelte Form

$$(3) \qquad (N_X^{X^*}Z) = \frac{(XX^*Z)}{(XX^*)} = \frac{(X^*X'Z)}{(X^*X')} = (N_{X^*}^{X'}Z),$$

so sind, nach Nr. (15) des vorigen Paragraphen, die hierdurch definirten Strahlen X, X', als geometrische Oerter ihrer Normalen, dargestellt durch die gleich Null gesetzten Ausdrücke

$$(4) \qquad \begin{aligned} (X'Z) &= (X^*Z) + (NX^*Z), \\ (XZ) &= (X^*Z) - (NX^*Z). \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst

$$(5) \qquad (XX) = [1 + (NN)](X^*X^*) - (NX^*)^2 = (X'X'),$$

d. h. man kann — da der scalare Bestandtheil dieser beiden einander gleichen Ausdrücke als eine Summe positiver Grössen von Null verschieden ist — bestimmen, dass

$$(6) \qquad \sqrt{XX} = \sqrt{X'X'}$$

sein soll. Man kann also die beiden Winkelhalbirenden der Strahlen X, X' rational trennen: Die eine, eigentliche (S. 10) ist die Gerade X^*, die andere uneigentliche erhält i. A. die Gleichung $(NX^*Z) = 0$ und ist also eine Querlinie des Trägers des Motors N.

Bewegungen, dargestellt in dualen Liniencoordinaten.

Lassen wir jetzt den Strahl X^* die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Strahlen durchlaufen, so muss die durch (4) gegebene Abhängigkeit zwischen X und X' eine Bewegung sein, und zwar eben die Bewegung, die als Folge der Umwendungen um Anfangs- und Endstrahl des Motors N entsteht. (S. 102.) Die zweite dieser Behauptungen, die übrigens auch leicht durch Rechnung erhärtet werden kann, brauchen wir nicht besonders zu beweisen, da im Falle $(NX^*) = 0$ der begleitende Motor in den Motor N selbst übergeht. Es genügt also, aus den Gleichungen (4), d. h. aus den nach Analogie der bekannten Hermite'schen Formeln gebildeten synektischen Gleichungen

(4b)

$$\begin{aligned} X_1' &= X_1^* - N_3X_2^* + N_2X_3^*, & X_1 &= X_1^* + N_3X_2^* - N_2X_3^*, \\ X_2' &= N_3X_1^* + X_2^* - N_1X_3^*, & X_2 &= -N_3X_1^* + X_2^* + N_1X_3^*, \\ X_3' &= -N_2X_1^* + N_1X_2^* + X_3^*, & X_3 &= N_2X_1^* - N_1X_2^* + X_3^* \end{aligned}$$

die Grössen X_i^* zu eliminiren, was möglich ist, da die Determinante $1 + (NN)$ beider Systeme von Gleichungen einen von Null verschiedenen scalaren Bestandtheil hat. Das Eliminationsresultat stellt sich dar als eine Gruppe von Gleichungen, die der Form nach vollkommen identisch mit den von uns schon angeführten Gleichungen Euler's, thatsächlich aber allgemeiner sind: Setzen wir

$$N_1 = -\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}, \quad N_2 = -\frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1}, \quad N_3 = -\frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{a}_0} \tag{7}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{00} &= \mathfrak{a}_0^2 + \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2, \\
\mathfrak{a}_{11} &= \mathfrak{a}_0^2 + \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_2^2 - \mathfrak{a}_3^2, \\
\mathfrak{a}_{22} &= \mathfrak{a}_0^2 - \mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 - \mathfrak{a}_3^2, \\
\mathfrak{a}_{33} &= \mathfrak{a}_0^2 - \mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2, \\
\mathfrak{a}_{23} = 2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1), &\qquad \mathfrak{a}_{32} = 2(\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1), \\
\mathfrak{a}_{31} = 2(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2), &\qquad \mathfrak{a}_{13} = 2(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_2), \\
\mathfrak{a}_{12} = 2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_3), &\qquad \mathfrak{a}_{21} = 2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_3),
\end{aligned} \tag{8}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_{00}X_1' &= \mathfrak{a}_{11}X_1 + \mathfrak{a}_{12}X_2 + \mathfrak{a}_{13}X_3, \\
\mathfrak{a}_{00}X_2' &= \mathfrak{a}_{21}X_1 + \mathfrak{a}_{22}X_2 + \mathfrak{a}_{23}X_3, \\
\mathfrak{a}_{00}X_3' &= \mathfrak{a}_{31}X_1 + \mathfrak{a}_{32}X_2 + \mathfrak{a}_{33}X_3,
\end{aligned} \tag{9}$$

und es bestehen zwischen den dualen Grössen $\mathfrak{a}_{00}$, $\mathfrak{a}_{ik}$ dieselben Relationen, wie zwischen den Coefficienten a_{00}, a_{ik} einer gewöhnlichen ternären orthogonalen Substitution. Diese Gleichungen (9) stellen nun, wie wir sogleich zeigen werden, wirklich eine Bewegung im Raume dar, und zwar die allgemeinste Bewegung, da man in ihnen nicht mehr, wie in den als Durchgangspunkt benutzten Gleichungen (7) die Voraussetzung machen muss, dass der scalare Bestandtheil von $\mathfrak{a}_0$ von Null verschieden ist.

Einführung der Parameter (α, β).

Um festzustellen, dass die Gleichungen (9), unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass der scalare Bestandtheil von $\mathfrak{a}_{00}$ nicht verschwindet, eine Bewegung bedeuten, führen wir den Uebergang zu Plücker'schen Liniencoordinaten aus. Wir setzen zunächst

$$\mathfrak{a}_i = \alpha_i + \beta_i \varepsilon \tag{10}$$

$(i = 0, 1, 2, 3)$, und ebenso

$$\mathfrak{a}_{ik} = a_{ik} + b_{ik}\varepsilon, \tag{11}$$

sowie

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}\varepsilon, \qquad X_1' = \mathfrak{X}_{01}' + \mathfrak{X}_{23}'\varepsilon,$$

u. s. f. Dann werden die Grössen a_{ik}, b_{ik} durch die Grössen α, β ausgedrückt vermöge der in § 21 unter (10) und (12) aufgeführten Gleichungen. Man kann überdies annehmen, dass die mit $\frac{1}{2}b_{00}$ zu bezeichnende Grösse

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \tag{12}$$

den Werth Null hat. Das Verschwinden dieser Grösse kann man nämlich, da $a_{00} \neq 0$, immer erreichen, ohne dass damit die Gleichungen (9) specialisirt würden, indem man die dualen Verhältnissgrössen α_i mit einem geeigneten Factor multiplicirt. Nunmehr aber fallen die Gleichungen (9) zusammen mit den Gleichungen (2) in § 21. Diese Gleichungen stellen, wie wir wissen, eine jede Bewegung in Plückerschen Gewinde- oder Liniencoordinaten dar. Man kann aber auch umgekehrt aus diesen Gleichungen die Parameterdarstellung der Bewegungen in Punkt- und Ebenencoordinaten unmittelbar ableiten *). Man hat also in unserer gegenwärtigen Betrachtung einen neuen Weg zu den in § 21 aufgestellten Formeln.

Die stereometrische Superposition der Bewegungen.

Wir können unseren letzten Betrachtungen nunmehr den folgenden Satz entnehmen:

(H.) *Jeder Bewegung $S(\alpha, \beta)$, deren Parameter α_0 nicht verschwindet, lässt sich durch die Gleichungen*

$$\mathfrak{N}_{01} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \qquad \mathfrak{N}_{23} = -\frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_0^{\,2}}, \tag{13}$$

oder

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = -\mathfrak{N}_{01}, \qquad \frac{\beta_0}{\alpha_0} = -\frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})}{2[1 + (\mathfrak{N}\,|\,\mathfrak{N})]},$$
$$\frac{\beta_1}{\alpha_0} = -\mathfrak{N}_{23} + \frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{N})}{2[1 + (\mathfrak{N}\,|\,\mathfrak{N})]}\mathfrak{N}_{01} \tag{13a}$$

u. s. w. eine Alternante $(\mathfrak{N}\mathfrak{X})$ eindeutig-umkehrbar zuordnen.

Bewegungen werden stereometrisch superponirt, indem man die entsprechenden Alternanten addirt.

Die genannte Bewegung ist affiliirt zu den geometrischen Summen von Keilen u. s. w., denen dieselbe Alternante zugeordnet ist.

Schliesslich wollen wir noch zur Erleichterung der Uebersicht

*) Der Leser findet die dazu nöthige Rechnung durchgeführt Math. Ann. Bd. 39, S. 526 und 527.

unsere drei Arten von Superposition von Bewegungen vergleichend zusammenstellen:

(J.) *Bei der linearen Superposition der Bewegungen wird aus zwei Bewegungen $S(\alpha, \beta)$ und $S(\alpha', \beta')$ eine dritte $S(\alpha'', \beta'')$ zusammengesetzt nach der Regel*

$$\frac{\alpha_i''}{\alpha_0''} = \frac{\alpha_i}{\alpha_0} + \frac{\alpha_i'}{\alpha_0'}, \quad \frac{\beta_i''}{\alpha_0''} = \frac{\beta_i}{\alpha_0} + \frac{\beta_i'}{\alpha_0'} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{14}$$

bei der correlativen Superposition nach der Regel

$$\frac{\alpha_i''}{\beta_0''} = \frac{\alpha_i}{\beta_0} + \frac{\alpha_i'}{\beta_0'}, \quad \frac{\beta_i''}{\beta_0''} = \frac{\beta_i}{\beta_0} + \frac{\beta_i'}{\beta_0'} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{15}$$

wobei jedesmal der fehlende Parameter aus der Gleichung

$$\alpha_0''\beta_0'' + \alpha_1''\beta_1'' + \alpha_2''\beta_2'' + \alpha_3''\beta_3'' = 0 \tag{17}$$

zu bestimmen ist; endlich bei der stereometrischen Superposition nach der Regel

$$\frac{\alpha_i'' + \beta_i''\varepsilon}{\alpha_0'' + \beta_0''\varepsilon} = \frac{\alpha_i + \beta_i\varepsilon}{\alpha_0 + \beta_0\varepsilon} + \frac{\alpha_i' + \beta_i'\varepsilon}{\alpha_0' + \beta_0'\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{16}$$

wiederum unter Zuziehung der Gleichung (17).

Die leicht aus (12) und (13) abzuleitende Auflösung der letzten Gleichungen (16), (17) nach den Parametern $\alpha_i'' : \alpha_0''$, $\beta_i'' : \alpha_0''$ hat keine einfache Form; übersichtlich wird die stereometrische Superposition der Bewegungen nur ausgedrückt in den dualen Parametern $\mathfrak{a}_i = \alpha_i + \beta_i\varepsilon$, wobei dann die Benutzung der Gleichung (17) überflüssig wird, da die Gleichungen (9) in dualen Strahlencoordinaten eine Bewegung auch dann darstellen, wenn die Gleichung (17) zwischen den scalaren und vectoriellen Coefficienten der dualen Parameter nicht erfüllt ist.

Hinzufügen wollen wir noch, dass auch mit Bezug auf die Formeln für die *Zusammensetzung der dualen Parameter mehrerer hintereinander auszuführender Bewegungen* dieselbe Bemerkung zu machen ist. Diese Formeln ergeben sich offenbar aus den Gleichungen (15) in § 21 durch Erweiterung, d. h. dadurch, dass man an Stelle der Parameter α_i u. s. f. die entsprechenden dualen Parameter $\mathfrak{a}_i$ u. s. w. substituirt*).

Die Transformationen T_1, T_2.

Aus dem Vorliegenden ergiebt sich:

---

*) Die so entstehenden Formeln bilden, nach Trennung der scalaren und vectoriellen Bestandtheile, das sogenannte Multiplicationstheorem einer der verschiedenen Arten von *Biquaternionen*. Vgl. Math. Ann. Bd. 39, S. 520, 539.

Die Gleichungen (4b) stellen nach Substitution der Werthe

$$N_i = -\frac{\alpha_i + \beta_i \varepsilon}{\alpha_0 + \beta_0 \varepsilon} \qquad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

die zu der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ $(\alpha_0 \neq 0)$ *gehörigen Transformationen* T_2 *und* T_1^{-1} *dar;* d. h., wenn wir, wie auf S. 104 unter X und X' durch $X\{S\}X'$ verknüpfte Strahlen und unter X^* deren eigentliche Winkelhalbirende verstehen, es ist

$$X\{\mathsf{T}_1\}X^*\{\mathsf{T}_2\}X'. \tag{19}$$

Hieraus folgt sofort der auf S. 104 formulirte Satz: Setzen wir eine Abhängigkeit zwischen drei Strahlen Y, Y_*, Y' fest durch

$$Y\{\mathsf{T}_2\}Y_*\{\mathsf{T}_1\}Y', \tag{20}$$

so ergiebt sich, durch Auflösung der Gleichungen (4b):

$$\begin{aligned} [1 + (NN)]\,Y_1 &= [1 + N_1^2]Y_{*1} + \\ &+ [N_1N_2 + N_3]\,Y_{*2} + [N_3N_1 - N_2]\,Y_{*3}, \\ [1 + (NN)]\,Y_1' &= [1 + N_1^2]\,Y_{*1} + \\ &+ [N_1N_2 - N_3]\,Y_{*2} + [N_3N_1 + N_2]\,Y_{*3}, \end{aligned} \tag{21}$$

u. s. f., und hieraus

$$(XY) = (X^*Y_*) = (X'Y'); \tag{22}$$

diese Formel stellt aber ganz unmittelbar den behaupteten Satz dar.

Wir haben jetzt das Ziel erreicht, das wir in der Einleitung zu diesem unseren zweiten Abschnitt bezeichnet hatten: Die ganze im ersten Abschnitt entwickelte Theorie ist nunmehr auch algebraisch begründet. Im Mittelpunkte stehen hier die durch vorangestellte Zeichen (A)...(J) hervorgehobenen Sätze, in denen ein ausserordentlich einfaches algebraisches Gebilde, nämlich die Alternante, d. i. ein System von sechs Grössen, den mancherlei von uns betrachteten geometrischen Figuren derart zugeordnet wird, dass die verschiedenen Arten von „Addition“ oder „Superposition“ jener Figuren der Addition der entsprechenden Alternanten oder Grössensysteme parallel laufen. Die Formeln, deren wir uns zu diesem Zwecke bedient haben, wird man hoffentlich sachgemäss finden; es wird, wenn man sich nicht mit einzelnen Bruchstücken begnügen will, schwerlich möglich sein, die vorgetragene algebraische Theorie wesentlich zu vereinfachen. Einige Abschnitte lassen allerdings eine einfachere Behandlungsweise zu, namentlich die geometrische Addition der Stäbe, die man ja in jedem Lehrbuch der Mechanik auf eine elementarere Art begründet findet; aber diese vereinfachte Behandlungsweise passt, wie schon gesagt, nicht in den Rahmen unserer

umfassenderen Theorie; sie lässt sich nicht auf die übrigen Fälle und auch nicht auf den Nicht-Euklidischen Raum übertragen, und sie lässt daher auch nicht die Wurzeln der Analogieen erkennen, die zwischen den auf Stäbe, Keile u. s. w. bezüglichen Sätzen stattfinden.

Mit dem, was wir jetzt noch vortragen wollen, gehen wir über den Inhalt des ersten Abschnittes und theilweise auch über den Kreis von elementaren algebraisch-geometrischen Fragen hinaus, der auf dem Titelblatt dieser Schrift bezeichnet ist. Was nun folgt, kann als ein *Anhang* zu unserer eigentlichen Untersuchung angesehen werden, bestimmt, die Tragweite unserer Methoden durch einige weitere charakteristische Sätze zu erläutern. Da wir uns nicht allzuweit von unserem eigentlichen Thema, der Geometrie der Dynamen, zu entfernen wünschen, so werden wir dabei einige Gegenstände nur kurz oder gar nicht berühren, die an sich wohl eine ausführliche Behandlung im Sinne der zuletzt entwickelten Methode verdienen würden.

Lineare synektische Transformationen.

Die Gleichungen (4b) und deren Auflösungen (21) bilden das erste nicht triviale Beispiel einer umfassenderen Classe von Transformationen im Strahlenraume.

Wir denken uns die Mannigfaltigkeit aller (reellen) Strahlen doppelt überdeckt, und stellen die Coordinaten irgend eines Strahles, je nachdem er zu der einen oder anderen Strahlenschicht gerechnet wird, durch verschiedene Zeichen dar. Strahlen der ersten Schicht mögen $X, Y, Z, \ldots$, solche der zweiten Schicht $U, V, W, \ldots$ genannt werden.

Wir unterwerfen nun die Strahlen der ersten Schicht einer *„linearen synektischen Transformation“* mit (reellen) dualen Coefficienten

$$\begin{aligned} X_1' &= \mathfrak{a}_{11} X_1 + \mathfrak{a}_{12} X_2 + \mathfrak{a}_{13} X_3, \\ X_2' &= \mathfrak{a}_{21} X_1 + \mathfrak{a}_{22} X_2 + \mathfrak{a}_{23} X_3, \\ X_3' &= \mathfrak{a}_{31} X_1 + \mathfrak{a}_{32} X_2 + \mathfrak{a}_{33} X_3, \end{aligned} \tag{23}$$

wobei wir voraussetzen, dass der scalare Bestandtheil der Determinante

$$\Delta = |\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}| \tag{24}$$

von Null verschieden sei. Wir setzen sodann

$$\mathfrak{b}_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial \mathfrak{a}_{ik}}, \tag{25}$$

und unterwerfen die Strahlen der zweiten Schicht der Transformation

$$\begin{aligned} U_1' &= \mathfrak{b}_{11} U_1 + \mathfrak{b}_{12} U_2 + \mathfrak{b}_{13} U_3, \\ U_2' &= \mathfrak{b}_{21} U_1 + \mathfrak{b}_{22} U_2 + \mathfrak{b}_{23} U_3, \\ U_3' &= \mathfrak{b}_{31} U_1 + \mathfrak{b}_{32} U_2 + \mathfrak{b}_{33} U_3 \end{aligned} \tag{26}$$

die wir als *zu der Transformation* (23) *contragredient* bezeichnen.

Nun ergeben sich sofort die Gleichungen:

$$(X'Y'Z') = \Delta \cdot (XYZ),$$

$$(U'X') = \Delta \cdot (UX), \tag{27}$$

$$(U'V'W') = \Delta^2 \cdot (UVW),$$

in deren zweiter man eine Verallgemeinerung der Gleichungen (22) erkennt.

Die Gleichungen (23) ... (27) geben uns Veranlassung zu einer umfangreicheren Erörterung.

Diese wollen wir im nächsten Abschnitt vornehmen.

Dritter Abschnitt.

Einleitung.

In unserem ersten Abschnitt haben wir geometrische Constructionen behandelt, mit deren Hülfe man Dynamen oder auch infinitesimale Bewegungen zusammensetzen kann. Im zweiten Abschnitt haben wir der geometrischen Begründung dieser Theorie eine algebraische an die Seite gestellt. Ziel unseres dritten Abschnittes soll nun vorzugsweise eine Untersuchung der einfachsten, nämlich der *linearen* Mannigfaltigkeiten von Dynamen sein.

Wie in der Theorie der Flächen zweiten Grades als erste Aufgabe deren Classification und die Reduction ihrer Gleichungen auf sogenannte canonische Formen (das Hauptaxenproblem) sich darbietet, so wird im Mittelpunkt unserer Erörterungen eine Aufgabe stehen, die (wie sich finden wird) die eben genannte umfasst:

Die linearen Mannigfaltigkeiten von Dynamen sind zu classificiren. (Und algebraisch durch „canonische Formen" darzustellen.)

Wie bei dem specielleren Problem werden in eine Classe *congruente* Figuren unterzubringen sein, solche, die durch Euklidische Bewegungen in einander übergeführt werden können, und daher dieselben elementargeometrischen Eigenschaften haben.

Da jede homogene lineare Relation zwischen Dynamen ungeändert bleibt, wenn man alle betheiligten Dynamen mit einem und demselben Zahlenfactor c „multiplicirt", so ist klar, dass die gestellte Aufgabe im Wesentlichen auf die folgende hinauskommt:

Die linearen Mannigfaltigkeiten von (reellen) Gewinden (linearen Liniencomplexen) zu classificiren.

In dieser zweiten Form werden wir die Aufgabe behandeln.

Eine dritte Fassung desselben Problems ist augenscheinlich diese:

Die linearen Schaaren infinitesimaler Bewegungen, die verschiedenen Arten von sogenannter Freiheit eines starren Körpers (Beweglichkeit im Infinitesimalen) sind zu classificiren.

Unsere Aufgabe ist also von grundsätzlicher Bedeutung für die

theoretische Kinematik starrer Körper, und dann natürlich auch für die Abschnitte der Mechanik, die es mit infinitesimalen und weiterhin auch endlichen Bewegungen starrer Körper zu thun haben.

Wir werden uns jedoch, da irgend welche Grenzen gesetzt werden müssen, auf die geometrische Seite des Gegenstandes beschränken. Namentlich werden wir unser Augenmerk richten auf die geometrischen Oerter, die von den Hauptaxen der betrachteten Dynamen oder Gewinde (den Schraubenaxen der entsprechenden infinitesimalen Bewegungen) gebildet werden.

Diese merkwürdigen Figuren sind schon vielfach untersucht worden. Das später so genannte Cylindroid hat schon *Hamilton* betrachtet. Bereits in Plücker's „Neuer Geometrie des Raumes“*) finden sich ferner umfangreiche Darlegungen, die die linearen Systeme von Gewinden und die zugehörigen Strahlenörter zum Gegenstand haben. Diese Betrachtungen sind dann von mehreren Geometern fortgesetzt worden, mit besonderem Erfolg, in der Richtung der schon von Plücker in Aussicht genommenen Anwendungen auf Mechanik, von Herrn R. Ball, der seine ausgedehnten Arbeiten kürzlich in einem umfangreichen Werke zusammenfassend dargestellt hat**).

Es finden sich in dieser Litteratur, insbesondere in den Schriften des Herrn Ball, sehr werthvolle Gedanken. Den Zustand der Vollendung indessen, den man nach gedruckt vorliegenden Aeusserungen Ball's und anderer Mathematiker zu erwarten berechtigt ist, haben wir nicht zu finden vermocht. Die erreichte angeblich *vollkommene* Allgemeinheit besteht in Wirklichkeit darin, dass ein sogenannter allgemeiner Fall abgehandelt wird, dessen Voraussetzungen, nach einem freilich auch sonst von Geometern leider vielfach befolgten Brauch, nicht gehörig angegeben sind, obwohl das durchaus keinen ungewöhnlichen Grad von Sorgfalt erfordert haben würde. Grenzfälle, die sich der „allgemeinen“ Theorie entziehen, und thatsächlich stark abweichende Eigenschaften aufweisen, werden ignorirt, ja es scheint die Vorstellung zu bestehen, dass solche Fälle überhaupt nicht existiren. — Eine erschöpfende Behandlung dieser Grenzfälle setzt natürlich die Lösung des bezeichneten Classificationsproblems voraus.

Noch weniger einwandsfrei ist die (kürzere) Behandlung des Gegenstandes in der Liniengeometrie des Herrn R. Sturm***). In diesem Falle ist wohl die in sehr kurzer Zeit erfolgte Bearbeitung eines

---

*) I. Abtheilung, Leipzig 1868.

**) *A Treatise on the Theory of Screws.* Cambridge (England) 1900.

***) Theil I. Leipzig 1892.

überreichen Stoffs nicht gut vereinbar gewesen mit den Forderungen der Strenge und präcisen Darstellung.

Wir werden aus dem Vorhandenen, von dem für uns nur die geometrische Seite in Betracht kommt, nicht unwichtige Einzelheiten übernehmen können, ohne übrigens ältere Untersuchungen als bekannt vorauszusetzen. Wir werden aber ziemlich umfangreiche Lücken auszufüllen haben. Wir werden auch in der Theorie des (präcise definirten) allgemeinen Falls wesentlich weiter gehen als unsere Vorgänger.

Die — im genannten allgemeinen Fall — als Oerter der Hauptaxen von Gewinden eines Bündels auftretenden Strahlencongruenzen scheinen uns einer besonderen Beachtung würdig zu sein. Herr E. Waelsch, der sie auf Grund einer anderen Definition bereits ziemlich eingehend untersucht hat, hat gefunden, dass diese Congruenzen derart zu Paaren zusammengehören, dass jede aus allen gemeinsamen Normalen von Strahlen der anderen besteht. Diese Eigenschaft ist nun, wie wir zeigen werden, charakteristisch: Diese Congruenzen nehmen also unter allen möglichen Strahlencongruenzen eine ausgezeichnete Stellung ein. Sie bieten überdies ein vorzüglich schönes Beispiel für die allgemeine Theorie der Strahlencongruenzen, und zugleich eine neue Anwendung der elliptischen Functionen dar: Durch dieses Hülfsmittel werden wir die Congruenzstrahlen zu Hauptflächen und abwickelbaren Flächen zusammenfassen. Kaum minder bemerkenswerth ist übrigens ein Grenzfall, dessen Theorie nur ganz elementare Hülfsmittel erfordert.

Der Weg, den wir einzuschlagen gedenken, wird in seinem wichtigsten Theile verschieden sein von den bisher betretenen. Er wird zu Einsichten von ganz neuer Art führen.

Es giebt neben der projectiven (Plücker'schen) Liniengeometrie noch mehrere „Arten von Geometrie", die durch Transformationsgruppen definirt sind*), deren Raumelement ebenfalls die gerade Linie ist (oder vielmehr in jedem Falle ein anderer dem der geraden Linie verwandter Begriff) und die durch ihre bemerkenswerthen Eigenschaften sich hervorheben aus der Menge von Möglichkeiten, die in dieser Richtung vorliegen.

Die Grundbegriffe einer von diesen geometrischen Disciplinen, die wir *Geometrie der dualen (und radialen) Projectivitäten* nennen, werden

*) Vgl. F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlangen 1872; Math. Annalen Bd. 43.) Der Grundgedanke dieser Schrift (auf den allein es hier ankommt) ist, dass der Gruppenbegriff als ein ordnendes Princip in der Geometrie benutzt werden kann und den Charakter von ausgedehnten Classen geometrischer Untersuchungen bestimmt.

wir aus den Formeln entwickeln, mit denen wir den vorigen Abschnitt geschlossen haben, nicht allein wegen der auf das bezeichnete geometrisch-kinematische Problem zu machenden Anwendungen, sondern auch um ihrer selbst willen. Wir werden aber, um dem Ganzen einen einigermassen einheitlichen Charakter zu wahren, nicht allzu weit über das hinausgehen, was mit der Theorie der Gewinde zusammenhängt. Auch werden wir, da unser Stoff ohnehin schon umfangreich genug ist, imaginäre Figuren nur so weit betrachten, als ein besseres Verständniss der im reellen Gebiete auftretenden Beziehungen es wünschenswerth erscheinen lässt.

Unsere „Geometrie der dualen Projectivitäten“ im Euklidischen Raume ist von den gemeinten geometrischen Disciplinen, deren jede der Theorie der Strahlencongruenzen und Complexe neue Methoden zuführen wird, vielleicht nicht die merkwürdigste, aber sie hat wohl die ausgedehnteste Berührungslinie mit Untersuchungen, die bisher schon das Interesse der Geometer gefesselt haben. Die Euklidische Geometrie ist in ihr ganz ebenso enthalten, wie in der projectiven Geometrie.

Die neue Liniengeometrie kann ferner (wie wir zeigen werden) angesehen werden als das zweite Glied einer unendlichen Reihe algebraisch-geometrischer Disciplinen, in der die Euklidische Geometrie des Raumes das erste Glied darstellt. Sie kann ausserdem, soweit reelle Figuren in Frage kommen, aufgefasst werden als ein Grenzfall der ebenen projectiven Geometrie, wenn als deren Raumelemente der imaginäre Punkt und die imaginäre Gerade angesehen werden, oder auch als Grenzfall jener projectiven Geometrie, die es mit Figuren zweier unabhängig von einander transformirbarer Ebenen zu thun hat).* Endlich hat sie zur Geometrie der Bewegung und zur Theorie der Systeme von Kräften oder zur Geometrie der Gewinde, wiederum im *Euklidischen* Raume, die merkwürdigen Beziehungen, auf die es uns hier besonders ankommt.

Dass wir in diesem unseren dritten Abschnitt an den Leser höhere Anforderungen stellen müssen, als in den beiden ersten, bringt der Gegenstand mit sich. Andernfalls würde unsere Untersuchung einen viel breiteren Raum beanspruchen, als wir glaubten, ihr gönnen zu

---

*) Diese Behauptungen können wir trotz ihres unzweifelhaften Interesses hier nicht begründen. Man findet eine summarische Darstellung der gemeinten Beziehungen in einer Abhandlung des Verfassers „*Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie*“. (Festschrift zu der fünfzigjährigen Doctor-Jubelfeier des Herrn Heinrich Limpricht, Greifswald, 1900.) Diese Arbeit enthält ein noch weiter reichendes Programm, von dem nur ein verhältnissmässig *kleiner* Theil hier zur Ausführung kommt.

dürfen. Wir setzen Vertrautheit des Lesers mit der Handhabung des algebraischen Calculs, Uebung im geometrischen Deuten algebraischer Formeln und Bekanntschaft mit den Hauptbegriffen der von S. Lie begründeten Theorie der Transformationsgruppen voraus.

Der Verfasser würde es als einen besonders erwünschten Erfolg seiner Arbeit begrüssen, wenn diese etwas dazu beitragen könnte, den tiefen und fruchtbaren Gedanken, mit denen der Genius eines grossen Mathematikers uns beschenkt hat, den Weg zu wirklicher, nämlich *praktischer* Anerkennung zu ebnen. Die *Methoden* Lie's werden ja, insbesondere in der Theorie algebraischer Gruppen, wo man den ganzen Raum umspannen will, vielfach durch andere ersetzt werden müssen. Die von ihm geschaffenen *Begriffe* aber sollten zu dem gewöhnlichen Handwerkszeug eines jeden Geometers gehören.

§ 26.

Duale und radiale Projectivitäten.

Verkürzt man die zum Schluss des § 25 entwickelten Formeln dadurch, dass man überall die vectoriellen Bestandtheile unterdrückt, so reduciren sie sich auf eine aus der ebenen projectiven Geometrie wohlbekannte Formelgruppe, auf dasselbe System von Gleichungen, das die Grundlage der Theorie der projectiven Invarianten in einem Gebiete dritter Stufe, der gewöhnlich schlechthin so genannten Theorie der ternären Formen bildet. In ähnlicher Weise lässt sich nun aus den Formeln des § 25 eine umfassendere Geometrie und eine zugehörige Invariantentheorie entwickeln, deren Raumelemente, entsprechend den Punkten und Geraden in der Ebene, zunächst die eigentlichen Strahlen erster und zweiter Schicht sind.

Natürlich ist der Ausbau einer solchen geometrischen Disciplin (neben die man, beiläufig bemerkt, auch noch eine der Theorie der Möbius'schen Kreisverwandtschaften analoge Geometrie stellen kann) eine sehr umfangreiche Aufgabe, die in einer einem anderen Gegenstand gewidmeten Schrift nicht wohl in Angriff genommen werden kann. Wir werden die bereits erwähnten Beschränkungen eintreten lassen.

Zunächst bedürfen wir einiger Vorbereitungen, die uns nunmehr beschäftigen sollen. Es wird sich unter Anderem darum handeln, eine *Terminologie* auszubilden, die eine kurze Ausdrucksweise ermöglichen soll. Die einzuführenden Kunstausdrücke entsprechen den Begriffen „Collineation" und „Correlation" der ebenen projectiven Geometrie. Der verwickelteren Natur unseres Gegenstandes entsprechend,

werden wir aber eine längere Reihe von Bezeichnungen nöthig haben. Man mag dies vielleicht als einen Uebelstand empfinden; nahe verwandte Begriffe müssen aber, eben *weil* sie verwandt sind und daher leicht verwechselt werden können, mit besonderer Sorgfalt unterschieden werden.

Die dualen Collineationen.

Betrachten wir, wie schon zu Schluss des § 25 geschehen, als Objecte der contragredienten linearen synektischen Transformationen *Strahlen* erster und zweiter Schicht, so haben wir vor uns eine continuirliche*) Gruppe mit *sechzehn* wesentlichen Parametern: denn eine Multiplication aller Coefficienten $\mathfrak{a}_{ik} = a_{ik} + \alpha_{ik}\varepsilon$ mit einem und demselben dualen Factor $\sigma + \tau\varepsilon$ ändert die dargestellte Transformation nicht. Wir werden diese Gruppe kurz als „Gruppe G_{16}" bezeichnen; ihre Transformationen, die paarweise als *„contragredient"* zusammengehören, werden wir *dual-collinear* nennen. Mit diesem Wort wünschen wir natürlich einmal die Analogie dieser Transformationen mit den Collineationen der ebenen Geometrie anzudeuten, dann aber auch das charakteristische Unterscheidungsmerkmal auszudrücken**).

Die Formeln des § 25 lassen nun ohne weitere Rechnung einige Eigenschaften dieser „dualen Collineationen" erkennen, die wir kurz zusammenstellen wollen.

Duale Collineationen lassen unter Anderem invariant:

1) *Parallelismus eigentlicher Strahlen gleicher Schicht,*
2) *Die Eigenschaft eines eigentlichen und eines uneigentlichen Strahls derselben Schicht, ein Linienkreuz zu bilden,*
3) *Rechtwinkliges Kreuzen, und*
4) *Rechtwinkliges Schneiden von eigentlichen Strahlen verschiedener Schichten,*
5) *Das Schneiden eines eigentlichen und eines uneigentlichen Strahls, wenn diese zu verschiedenen Schichten gehören,*

---

*) Im gewöhnlichen (Lie'schen) Sinne des Wortes. Die Gruppe ist continuirlich im imaginären Gebiet; reell-continuirlich ist sie nicht.

**) Da im Nicht-Euklidischen Raume negativer oder positiver Krümmung je eine ähnlich definirte Gruppe existirt, so ist, wo immer Verwechselungen möglich sind, ein weiterer Zusatz nöthig. Es empfehlen sich dafür die Worte elliptisch, parabolisch, hyperbolisch; und zwar ist es zweckmässig, die aus der sogenannten *elliptischen* Geometrie abzuleitenden dualen Collineationen als *hyperbolisch* zu bezeichnen, und umgekehrt. Im Texte haben wir es ausschliesslich mit den „parabolischen" dualen Collineationen (und Correlationen) zu thun. — Von den weiterhin zu betrachtenden „radialen" Projectivitäten haben in der Nicht-Euklidischen Geometrie nur die Anticollineationen und Anticorrelationen ein Seitenstück.

6) *Rechtwinkliges Schneiden zweier uneigentlicher Strahlen verschiedener Schichten**),*

7) *Die Eigenschaft dreier eigentlicher Strahlen gleicher Schicht, denselben uneigentlichen Strahl (der anderen Schicht) zu schneiden,*

8) *Endlich die Eigenschaft dreier eigentlicher Strahlen gleicher Schicht, dem Normalennetz eines und desselben Strahls (der anderen Schicht) anzugehören.*

Die Eigenschaften 7) und 8) lassen sich auch so ausdrücken: *Querlinien eines eigentlichen oder uneigentlichen Linienkreuzes gehen bei dualen Collineationen immer wieder in solche über.*

Die wesentlichste unter den aufgestellten Eigenschaften der dualen Collineationen ist offenbar in der Aussage enthalten, dass Querlinien *eigentlicher* Linienkreuze, Normalennetze von eigentlichen Strahlen, in ebensolche übergehen. Denn aus dieser Eigenschaft allein lassen sich alle übrigen ohne Mühe entwickeln.

Aus der verwickelten Geometrie und Invariantentheorie unserer Gruppe G_{16} lässt sich ein Kreis in sich abgeschlossener Bildungen herausheben, eine ausgedehnte Gruppe algebraisch-geometrischer Sätze, die, nach der Methode des § 23, einfach durch Uebertragung aus der gewöhnlichen Geometrie und Invariantentheorie der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene entstehen.

Die dualen Correlationen.

Vertauschen wir nicht Strahlen beider Schichten unter sich, sondern vertauschen wir gleichzeitig diese Schichten mit einander, etwa durch Zusammensetzung der bereits aufgestellten Transformationen mit der involutorischen Transformation

$$(1) \qquad \begin{aligned} U_1' = X_1, \quad U_2' = X_2, \quad U_3' = X_3, \\ X_1' = U_1, \quad X_2' = U_2, \quad X_3' = U_3, \end{aligned}$$

die jedem Strahl erster Schicht den darüber liegenden Strahl zweiter Schicht zuordnet, so erhalten wir eine neue Schar von Transformationen, die den Punkte und Gerade vertauschenden Correlationen der ebenen Geometrie analog sind, und deswegen von uns *duale Correlationen* genannt werden sollen.

Im Grunde freilich sind diese dualen Correlationen von den dualen Collineationen gar nicht verschieden, und hierin liegt eine Abweichung unserer Strahlengeometrie von der ebenen projectiven Geometrie, oder

*) Darunter ist zu verstehen Orthogonalität der zugehörigen beiden Büschel paralleler Ebenen.

vielmehr von der Art, wie diese (in übrigens durchaus zweckmässiger Weise) gewöhnlich behandelt wird*).

Es liegt eigentlich nur ein Unterschied in der Art der Bezeichnung vor. Die ganze Unterscheidung kommt erst dadurch zu Stande, dass wir, bei Einführung der beiden „Schichten", jeden Strahl im Raume zweimal setzen, was ein an sich willkürliches Verfahren ist. Ist diese Untersuchung sonach nicht durchaus nothwendig, so ist sie doch jedenfalls praktisch unentbehrlich, da sie das Verständniss unserer Strahlengeometrie ganz wesentlich erleichtert. — Das Uebereinanderliegen zweier Strahlen verschiedener Schichten ist in dieser Geometrie eine nebensächliche Erscheinung; eine solche Beziehung wird durch contragrediente Transformationen im Allgemeinen zerstört.

Duale Anticollineationen und Anticorrelationen.

Wechselt man in den Gleichungen, die eine duale Collineation darstellen (§ 25, Nr. 23, 26), die Vorzeichen der vectoriellen Coefficienten der dualen Coordinaten X_i', U_i', aber *nicht* auch die der Coordinaten X_i, U_i, so entsteht ein weiteres Paar „contragredienter" Transformationen, die ebenfalls die auf S. 231 bezeichneten Eigenschaften haben. Es ist nützlich, auch für diese Transformationen, die mit den Transformationen von G_{16} zusammen wieder eine Gruppe bilden, ein besonderes Wort zu haben: Wir nennen sie „duale Anticollineationen", und definiren entsprechend einen zweiten Ausdruck „duale Anticorrelationen"**).

Jetzt lässt sich das Verhältniss unserer Transformationen zur Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen einfach beschreiben:

Die Gruppe der Bewegungen ist als Untergruppe der Gruppe der dualen Collineationen dadurch gekennzeichnet, dass sie das Uebereinanderliegen von Strahlen verschiedener Schichten nicht ändert. Durch die gleiche Einschränkung entstehen die Umlegungen aus der Schaar der dualen Anticollineationen.

In der Elementargeometrie ist also überhaupt kein Bedürfniss vorhanden, die Strahlenmannigfaltigkeit doppelt zu überdecken; und in der That haben wir z. B. bei der in § 24 durchgeführten Untersuchung einen solchen Process nicht nöthig gehabt.

---

*) Die Abweichung lässt sich nämlich beseitigen dadurch, dass man als Raumelement in der ebenen projectiven Geometrie die Figur ansieht, die von einem Punkt und von dessen Polare in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt gebildet wird.

**) Auch diese Ausdrücke sind der ebenen Geometrie entlehnt, in die sie von Herrn C. Segre eingeführt worden sind. Wir kommen darauf noch zurück.

Jede Bewegung kann also auch angesehen werden als eine duale Correlation, und jede Umlegung als eine duale Anticorrelation: Die ganze Unterscheidung von Collineationen und Correlationen wird hier gegenstandslos, und sie wird erst wieder von Bedeutung, wenn man nachträglich die betrachtete Gruppe erweitert.

Radiale Collineationen und Correlationen.

Ausser den bisher betrachteten Arten von Strahlentransformationen giebt es noch andere, denen die vorhin aufgezählten Eigenschaften 1) . . . 8) augenscheinlich ebenfalls zukommen, nämlich *die Aehnlichkeitstransformationen*, und dann natürlich überhaupt alle Transformationen der Strahlen, die aus diesen und jenen durch Zusammensetzung entstehen. Ihre Gesammtheit bildet, wie man sofort findet, eine Gruppe, deren allgemeine Transformation von 17 Parametern abhängt, und von uns als eine *radiale Projectivität* bezeichnet werden soll. Da auch hier die doppelte Ueberdeckung der Strahlenmannigfaltigkeit am Platze ist, so werden wir *radiale Collineationen* und *radiale Correlationen* zu unterscheiden haben, je nachdem beide Strahlenschichten im Ganzen in Ruhe bleiben oder vertauscht werden. Die ersten bilden eine von uns mit G_{17} zu bezeichnende continuirliche Gruppe.

Die Gruppe der radialen Projectivitäten enthält, wie man leicht findet, als *invariante Untergruppe* die Gruppe der *dualen Projectivitäten* und *Antiprojectivitäten*, wie wir die zuvor besprochenen Schaaren von Transformationen zusammenfassend nennen können. Dabei sind die dualen Collineationen und Anticollineationen natürlich unter den radialen Collineationen, ebenso die dualen Correlationen und Anticorrelationen unter den radialen Correlationen enthalten.

Um eine analytische Darstellung z. B. aller radialen Collineationen, also der erklärten Gruppe G_{17}, zu erhalten, braucht man offenbar mit den dualen Collineationen nur *die* perspectiven Aehnlichkeitstransformationen zusammenzusetzen, die den Anfangspunkt der Coordinaten in Ruhe lassen und alle Abstände in je einem beliebigen Verhältniss $1 : k$ vergrössern. Diese Aehnlichkeitstransformationen werden in rechtwinkligen Strahlencoordinaten dargestellt oder können dargestellt werden durch Gleichungen der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}'_{02} = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathfrak{X}'_{03} = \mathfrak{X}_{03}, \\ &\mathfrak{X}'_{23} = k\mathfrak{X}_{23}, \quad \mathfrak{X}'_{31} = k\mathfrak{X}_{31}, \quad \mathfrak{X}'_{12} = k\mathfrak{X}_{12}; \end{aligned}$$

die „contragredienten Transformationen“ sind mit ihnen identisch und werden dargestellt durch eben dieselben Gleichungen zwischen $\mathfrak{U}_{ik}$, $\mathfrak{U}_{ik}'$.

Es entstehen auf diese Weise die Transformationsgleichungen, die wir weiterhin unter Nr. (5) aufführen werden.

Ausser der Gruppe G_{16} enthält die Gruppe G_{17} der radialen Collineationen noch zwei (und nur zwei) weitere *invariante continuirliche Untergruppen*, wie wir bereits auf Seite 106 angedeutet haben. Die die eine G_9, mit neun Parametern, enthält alle Transformationen von G_{17}, die alle uneigentlichen Strahlen und daher auch alle Parallelenbündel oder alle Punkte der unendlich fernen Ebene einzeln in Ruhe lassen, darunter alle ∞^4 perspectiven Aehnlichkeitstransformationen. Die zweite Gruppe G_8, mit acht Parametern, bildet den Durchschnitt der Gruppe G_9 und der Gruppe G_{16}. Sie wird von *vertauschbaren* Transformationen gebildet, und kann so dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}'_{02} = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathfrak{X}'_{03} = \mathfrak{X}_{03}, \\
&\mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{23} + \alpha_{11}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{12}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\
&\mathfrak{X}'_{31} = \mathfrak{X}_{31} + \alpha_{21}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{22}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{23}\mathfrak{X}_{03}, \\
&\mathfrak{X}'_{12} = \mathfrak{X}_{12} + \alpha_{31}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{32}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{33}\mathfrak{X}_{03}, \\
&\qquad (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Die zugehörigen contragredienten Transformationen werden gefunden, wenn man $-\alpha_{ki}$ an Stelle von α_{ik} setzt, und die Zeichen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ vertauscht. Die Schiebungen der Euklidischen Geometrie sind in dieser Gruppe G_8 enthalten, und bilden deren Durchschnitt mit der Gruppe der Bewegungen. Wir werden die Transformationen (3) *duale Schiebungen* nennen.

Von den Transformationen der Gruppe G_9 werden die eigentlichen Strahlen eines einzelnen Parallelenbündels ebenso unter einander vertauscht, wie die eigentlichen Punkte einer Ebene durch die dreigliedrige Gruppe der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen; der Abstand irgend zweier Strahlen des Bündels wird dabei in einem bei gegebener Transformation constanten (von der Auswahl des Parallelenbündels unabhängigen) Verhältniss $1 : k$ vergrössert. Die continuirliche Untergruppe G_8 ist dann dadurch gekennzeichnet, dass für ihre Transformationen $k = 1$ ist, dass also jene Aehnlichkeitstransformationen sich auf *Schiebungen* reduciren. Dem Werthe $k = -1$ entsprechen die involutorischen Transformationen der Gruppe G_9, die mit den dualen Schiebungen zusammen eine Gruppe bilden. Ihre Theorie wird uns weiterhin noch näher beschäftigen.

Auf die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen reducirt sich die Gruppe G_{17}, wenn man verlangt, dass das Uebereinanderlegen von Strahlen verschiedener Schichten erhalten bleiben soll.

Die siebengliedrige Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen bildet den vollständigen Durchschnitt der Gruppe G_{17} mit der Gruppe G_{15} der (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) collinearen Transformationen.

Ferner verdient der folgende Satz angemerkt zu werden:

Die Gesammtheit aller radialen (dualen) Collineationen, die den Winkel von je zwei Strahlen (gleicher Schicht oder auch verschiedener Schichten) ungeändert lassen, bildet eine continuirliche Gruppe mit zwölf (elf) Parametern.

Diese besonderen Transformationen von G_{17} (G_{16}) haben die ebenfalls charakteristische Eigenschaft, dass jede alle Abstände paralleler Strahlen gleicher Schicht in demselben Verhältniss $1 : k$ ändert (ungeändert lässt).

Die angeführte Gruppe G_{12} entsteht durch Zusammensetzung der Transformationen von G_9 mit der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen, oder auch schon mit der Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt; ebenso entsteht die zweite Gruppe G_{11} aus den Transformationen von G_8 und den Bewegungen (Drehungen um festen Punkt). Beide Gruppen G_{12}, G_{11} können als Untergruppen von G_{17}, G_{16} natürlich auch dadurch erklärt werden, dass ihre gepaarten (contragredienten) Transformationen bestehenden Parallelismus zwischen Strahlen verschiedener Schichten nicht zerstören.

Der Satz ist leicht zu beweisen mit Hülfe des auf Seite 150 angegebenen Ausdrucks für den Abstand paralleler Geraden. Dieser Ausdruck ändert nämlich seine Form nicht, wenn man an Stelle der Plücker'schen Liniencoordinaten Strahlencoordinaten einführt. Es ergiebt sich daraus, dass die Abstände paralleler Geraden in constantem Verhältniss immer dann und nur dann geändert werden, wenn die scalaren Bestandtheile a_{ik} der Grössen $\mathfrak{a}_{ik}$ (Nr. 23, S. 224) das Coefficientensystem einer orthogonalen Transformation bilden. (Vgl. die folgenden Formeln Nr. 5.)

Wir heben schliesslich noch eine übrigens bereits angedeutete Eigenschaft der radialen Projectivitäten hervor, die der Gruppe G_{17} ein besonderes Interesse verleiht:

*Die radialen Projectivitäten umfassen alle Transformationen von Strahlen, die aus dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls immer wieder ein solches hervorgehen lassen**).

---

*) Der hier zu Grunde zu legende Begriff der „Transformation" kann sehr weit gefasst werden. Es genügt, darunter eine Zuordnung reeller eigentlicher Strahlen zu verstehen, die für eine gewisse Umgebung zweier entsprechender Strahlen definirt und in diesem Gebiete gegenseitig eindeutig und stetig ist.

Der Beweis erfordert Hülfsmittel, die uns hier noch nicht zu Gebote stehen.

Lineare Transformationen der Gewinde, die coaxiale Gewinde in ebensolche überführen.

Die Gesammtheit aller Transformationen der Gewinde, die Büschel und daher überhaupt lineare Mannigfaltigkeiten von Gewinden in ebensolche übergehen lassen, bildet eine continuirliche Gruppe mit 35 Parametern. Diese Gruppe Γ_{35} ist nicht wesentlich verschieden von der Gruppe aller Collineationen in einem Gebiete sechster Stufe, und hat daher nur ein geringes *specifisches* Interesse. Wir halten uns nicht auf mit der leichten und schematisch ausführbaren Uebertragung von bekannten Sätzen der projectiven Geometrie des Raumes von fünf Dimensionen auf die Geometrie der Gewinde im gewöhnlichen Raume, um so weniger, als der Gegenstand von Anderen wiederholt breit abgehandelt worden ist.

Wir bemerken darüber nur, dass man auch die Mannigfaltigkeit aller Gewinde doppelt überdecken muss, wenn man zu einer klaren Einsicht in das gegenseitige Verhältniss beider Gruppen gelangen will: *Conjugirte Gewinde*, d. h. *Gewinde „erster" und „zweiter Schicht"*, deren bilineare Invariante

$$(4)\quad (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = \mathfrak{U}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{U}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{U}_{03}\mathfrak{X}_{12} + \mathfrak{U}_{23}\mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{U}_{31}\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{U}_{12}\mathfrak{X}_{03}$$

verschwindet, werden dann durch „contragrediente" lineare Transformationen der Gewinde in ebensolche verwandelt, und die Gruppe Γ_{35} selbst wird bei der doppelten Ueberdeckung der Gewinde-Mannigfaltigkeit durch eine zweite Schaar von linearen Transformationen erweitert, die den Correlationen im Gebiete sechster Stufe zugeordnet werden können.

Die Gruppe Γ_{35} hat nun eine interessante Untergruppe, deren Transformationen die charakteristische Eigenschaft haben, Büschel *coaxialer* Gewinde immer wieder in solche übergehen zu lassen. Wie eine leichte Ueberlegung zeigt, hat jede solche Transformation die Form

$$(5)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{X}'_{01} &= a_{11}\mathfrak{X}_{01} + a_{12}\mathfrak{X}_{02} + a_{13}\mathfrak{X}_{03},\\
\mathfrak{X}'_{02} &= a_{21}\mathfrak{X}_{01} + a_{22}\mathfrak{X}_{02} + a_{23}\mathfrak{X}_{03}, \qquad (k\cdot|a_{11}a_{22}a_{33}| \neq 0),\\
\mathfrak{X}'_{03} &= a_{31}\mathfrak{X}_{01} + a_{32}\mathfrak{X}_{02} + a_{33}\mathfrak{X}_{03},\\
\mathfrak{X}'_{23} &= \alpha_{11}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{12}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{13}\mathfrak{X}_{03} + k(a_{11}\mathfrak{X}_{23} + a_{12}\mathfrak{X}_{31} + a_{13}\mathfrak{X}_{12}),\\
\mathfrak{X}'_{31} &= \alpha_{21}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{22}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{23}\mathfrak{X}_{03} + k(a_{21}\mathfrak{X}_{23} + a_{22}\mathfrak{X}_{31} + a_{23}\mathfrak{X}_{12}),\\
\mathfrak{X}'_{12} &= \alpha_{31}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{32}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{33}\mathfrak{X}_{03} + k(a_{31}\mathfrak{X}_{23} + a_{32}\mathfrak{X}_{31} + a_{33}\mathfrak{X}_{12}),
\end{aligned}$$

wo nunmehr die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ rechtwinklige *Plücker'sche Gewindecoordinaten* bezeichnen. Führt man mehrere Transformationen der Art hinter

einander aus, so werden die zugehörigen Constanten k mit einander multiplicirt. Die zu (15) gehörige „contragrediente" Transformation wird gefunden, wenn man in (5) erstens jeden Coefficienten durch die zugehörige Unterdeterminante der Transformationsdeterminante ersetzt, zweitens die Veränderlichen $\mathfrak{x}_{ik}$ (und $\mathfrak{x}'_{ik}$) mit den zugehörigen contragredienten Veränderlichen

$$\overline{\mathfrak{x}}_{01},\ \overline{\mathfrak{x}}_{02},\ \overline{\mathfrak{x}}_{03},\ \overline{\mathfrak{x}}_{23},\ \overline{\mathfrak{x}}_{31},\ \overline{\mathfrak{x}}_{12}$$

vertauscht. Diese aber sind, wie (4) zeigt, proportional zu den Grössen

$$\mathfrak{u}_{23},\ \mathfrak{u}_{31},\ \mathfrak{u}_{12},\ \mathfrak{u}_{01},\ \mathfrak{u}_{02},\ \mathfrak{u}_{03}.$$

Man erhält daher als Ausdruck der contragredienten Transformation wiederum ein Gleichungssystem der Form (5), mit anderen Coefficienten, aber, wie man leicht findet, gehörig zu *demselben* Werthe der Constanten k.

Es ist also zunächst der folgende Satz bewiesen:

Hat eine lineare Transformation der Gewinde die Eigenschaft, coaxiale Gewinde in ebensolche überzuführen, so hat die zugehörige contragrediente Transformation dieselbe Eigenschaft.

Die Gesammtheit aller dieser zu Paaren angeordneten Transformationen bildet eine continuirliche Gruppe mit 18 Parametern.

Wir werden diese Gruppe mit Γ_{18} bezeichnen; eine zugehörige weitere Schaar von Transformationen, die Gewinde beider Schichten vertauscht (s. oben), werden wir der Kürze halber bei Seite lassen.

Contragrediente Transformationen der genannten Art führen nicht nur conjugirte Gewinde verschiedener Schichten in ebensolche der gleichen Schichten über, sondern ausserdem auch orthogonale Gewinde, d. h. Gewinde verschiedener Schichten, deren Hauptaxen (oder Nebenaxen) einen rechten Winkel bilden, in ebensolche Gewinde.

Auch diese Eigenschaften sind charakteristisch für die Untergruppe Γ_{18} von Γ_{35}.

Wir vergleichen nun die Formeln (5) mit denen Nr. (23) und (26) in § 25. Diese können wir ohne Weiteres auf eine Form bringen, in der die Determinante Δ einen verschwindenden vectoriellen Bestandtheil hat. Die so erhaltenen Transformationsgleichungen deuten wir als Transformationen der Gewinde. Sie sind, wie die vierte der nunmehr sich ergebenden speciellen Beziehungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}') &= \Delta\cdot(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}), & \{\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'\} &= \Delta\cdot\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\},\\ (\mathfrak{U}'|\mathfrak{X}') &= \Delta\cdot(\mathfrak{U}|\mathfrak{X}), & (\mathfrak{U}'\mathfrak{X}') &= \Delta\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{X}),\\ (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}') &= \Delta^2\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}), & \{\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}'\} &= \Delta^2\cdot\{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}\} \end{aligned}$$

zeigt, paarweise contragredient, und bilden eine continuirliche Gruppe, die Γ_{16} genannt werden soll.

Mit den Transformationen von Γ_{16} setzen wir jetzt die Transformationen zweier weiterer eingliedriger Gruppen zusammen. Die eine, die wir mit Γ_1 bezeichnen, kann in dualen Coordinaten dargestellt werden durch die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{array}{llll} X_1' = (1+\lambda\varepsilon)X_1, & X_2' = (1+\lambda\varepsilon)X_2, & X_3' = (1+\lambda\varepsilon)X_3, \\ U_1' = (1-\lambda\varepsilon)U_1, & U_2' = (1-\lambda\varepsilon)U_2, & U_3' = (1-\lambda\varepsilon)U_3, \end{array}$$

in Plücker'schen Gewindecoordinaten also durch die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{array}{l} \mathfrak{X}_{01}' = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}_{23}' = \mathfrak{X}_{23} + \lambda\cdot\mathfrak{X}_{01}, \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{U}_{01}' = \mathfrak{U}_{01}, \quad \mathfrak{U}_{23}' = \mathfrak{U}_{23} - \lambda\cdot\mathfrak{U}_{01}, \text{ u. s. w.}^*), \end{array}$$

woraus folgt

$$(9)\quad \begin{array}{ll} (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}') = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}), & \{\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'\} = \{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\} + 3\lambda\cdot(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}), \\ (\mathfrak{U}'|\mathfrak{X}') = (\mathfrak{U}|\mathfrak{X}), & (\mathfrak{U}'\mathfrak{X}') = (\mathfrak{U}\mathfrak{X}), \\ (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}), & \{\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}'\} = \{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}\} - 3\lambda\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}). \end{array}$$

Die zweite eingliedrige Gruppe wird gebildet von den schon betrachteten perspectiven Aehnlichkeitstransformationen,

$$(10)\quad \begin{array}{l} \mathfrak{X}_{01}' = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}_{23}' = k\cdot\mathfrak{X}_{23} \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{U}_{01}' = \mathfrak{U}_{01}, \quad \mathfrak{U}_{23}' = k\cdot\mathfrak{U}_{23} \text{ u. s. w.}, \end{array}$$

woraus folgt

$$(11)\quad \begin{array}{ll} (\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}') = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}), & \{\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'\} = k\cdot\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}, \\ (\mathfrak{U}'|\mathfrak{X}') = (\mathfrak{U}|\mathfrak{X}), & (\mathfrak{U}'\mathfrak{X}') = k\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{X}), \\ (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}), & \{\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\mathfrak{W}'\} = k\cdot\{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}\}. \end{array}$$

Die Transformationen der Gruppen Γ_{16}, Γ_1, und die genannten perspectiven Aehnlichkeitstransformationen gehören nun sämmtlich der Gruppe Γ_{18} an, und sie erzeugen, wie man ohne Weiteres erkennt, diese ganze Gruppe. So kommt man zu den folgenden Sätzen:

Mit jedem Paar contragredienter Transformationen der Gruppe Γ_{18} (Nr. 5) *ist ein bestimmtes Paar contragredienter radialer Collineationen verbunden, die angeben, wie die Hauptaxen der Gewinde beider Schichten vertauscht werden.*

Umgekehrt gehört zu jedem Paar contragredienter Transformationen von G_{17} *eine Schaar von* ∞^1 *Paaren contragredienter Transformationen von* Γ_{18}, *die alle dieselbe Vertauschung von Strahlen einer jeden Schicht hervorbringen.*

---

*) Die Grösse λ ist dieselbe, die wir auf S. 57 eingeführt und dort ebenso bezeichnet haben.

Diese Transformationen unterscheiden sich von einander um Transformationen der eingliedrigen invarianten Untergruppe Γ_1 von Γ_{18} (Nr. 8).

Diese Untergruppe ist dadurch charakterisirt, dass sie jedes einzelne Büschel coaxialer Gewinde in der einen Schicht und daher auch jedes solche Büschel in der anderen Schicht in Ruhe lässt. Ihre Transformationen haben überdies die Eigenschaft, aus jedem Gewinde erster (zweiter) Schicht vom Parameter $\mathfrak{J}$ (S. 153) *das coaxiale Gewinde vom Parameter* $\mathfrak{J} + \frac{\lambda}{2}\left(\mathfrak{J} - \frac{\lambda}{2}\right)$ *hervorgehen zu lassen, wobei der Zuwuchs* $\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$ *des Parameters für die Transformation charakteristisch, also unabhängig von dem ihr unterworfenen Gewinde ist.*

Die Gruppe Γ_{18} kann auch bezeichnet werden als die grösste Gruppe von linearen Transformationen der Gewinde, die diese Gruppe Γ_1 als invariante Untergruppe enthält.

Alle mit den Transformationen von Γ_1 vertauschbaren linearen Gewindetransformationen bilden eine in Γ_{18} invariant enthaltene continuirliche Gruppe Γ_{17}, die in zwei mit einander vertauschbare Gruppen Γ_1 und Γ_{16} (s. oben) zerlegt werden kann.

Die Gleichungen der Gruppe Γ_{16} entstehen aus denen der Gruppe Γ_{18} (Nr. 5), *wenn man*

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(13)\qquad k = 1$$

setzt. Sie ist holoëdrisch (im engsten Sinne des Wortes, nämlich eineindeutig) isomorph zur Gruppe G_{16} der dualen Collineationen:

Die Transformationen der Gruppen Γ_{16} und G_{16} bestimmen einander gegenseitig.

Die Gruppe Γ_{16} kann u. A. dadurch charakterisirt werden, dass der von uns in einem besonderen Falle (vgl. S. 212) bereits betrachtete Quotient

$$(14)\qquad \frac{\{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\}}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})}$$

bei ihren Transformationen eine absolute Invariante ist. Eine andere bemerkenswerthe (siebzehngliedrige) Untergruppe von Γ_{18} ist charakterisirt durch die Invarianz der *Gleichung* $\{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\} = 0$. Sie entsteht durch Zusammensetzung von Γ_{16} mit den Aehnlichkeitstransformationen; sie (nicht aber die Gruppe Γ_{17}) ist also isomorph zur Gruppe G_{17} der radialen Collineationen. In Γ_{18} ist sie *nicht* invariant.

Von demselben Verfasser erschien im gleichen Verlag:

Methoden zur Theorie der ternären Formen.

[XII u. 210 S.] gr. 8. 1889. geh. n. *M.* 6.—

Eine Darstellung der Grundlagen der sogenannten symbolischen Methoden der Invariantentheorie, die, nach Ansicht des Verfassers, bei vielen speciellen Problemen der projektiven Geometrie das geeignetste, jedenfalls das eleganteste analytische Hülfsmittel bilden. Die Theorie der von Clebsch und Gordan angegebenen Reihenentwickelungen wird weitergeführt und der Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Lie'schen Gruppentheorie ausführlich erörtert. Die mitgetheilte Theorie der Differentialgleichungen der Invarianten die in einen einzigen Ausdruck zusammengefasst werden, geht wesentlich hinaus über Untersuchungen, die später von S. Lie und G. Scheffers in deren „Vorlesungen über continuirliche Gruppen" (Leipzig 1893) veröffentlicht worden sind.

Die Beschränkung auf ternäre Formen wurde gewählt, weil die entsprechenden Untersuchungen über quaternäre und höhere Formen sich in einem zu unvollkommenen Zustande befanden, um eine zusammenfassende Darstellung zu gestatten (wie es übrigens noch heute der Fall ist).

Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen.

(Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XX, Nr. II. 1893.)

[148 S.] Lex.-8. 1893. geh. n. *M.* 5.—

In einem ersten Abschnitt wird aus sphärischen Dreiecken eine Anzahl von endlichen und unendlichen Gruppen discreter Substitutionen abgeleitet. Es wird eine Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen vorgenommen, die bereits Gauss bekannt, aber wieder in Vergessenheit gerathen war.

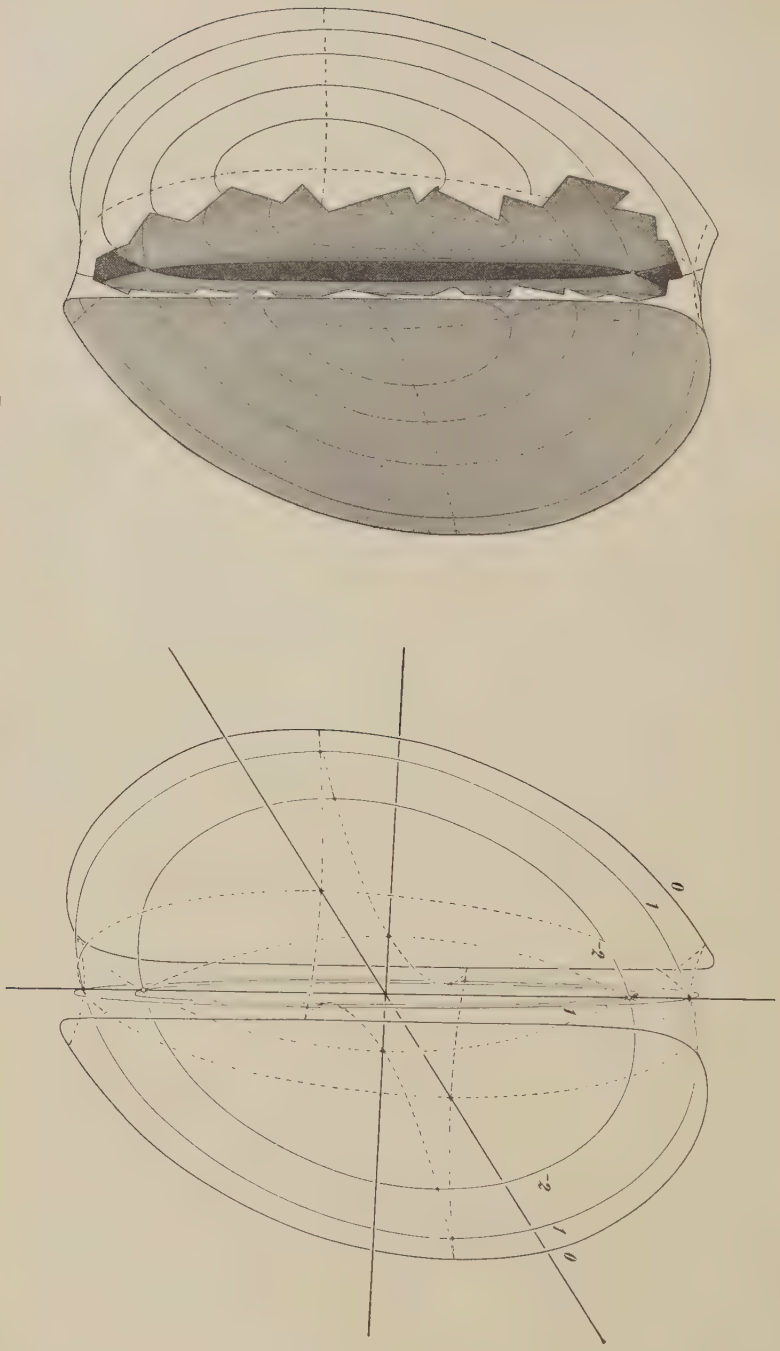
Der zweite und dritte Abschnitt handeln von Darstellungen gewisser goniometrischer Functionen der Seiten und Winkel eines sphä-

rischen Dreiecks durch eindeutige Functionen unabhängiger Parameter (also von der sogenannten Uniformisirung der Formeln der sphärischen Trigonometrie).

Im zweiten Abschnitt werden unter Anderem die Cosinus der Seiten und Winkel eindeutig ausgedrückt durch die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution und damit durch die zugehörigen Euler'schen Parameter. Daraus ergiebt sich eine Abbildung der sphärischen Dreiecke auf den Punktraum, in deren Theorie die sogenannten desmischen Tetraeder und die Kummer'sche Configuration auftreten, ferner eine in der Ebene ausführbare Construction der Winkel aus gegebenen Seiten und umgekehrt.

Im dritten Abschnitt wird die von Lagrange gefundene Darstellung sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen auf orthogonale Substitutionen übertragen, im Rahmen der Weierstrass'schen Theorie auf eine elegantere Form gebracht, und ausserdem verallgemeinert. Der Zusammenhang zwischen den Additionstheoremen der Functionen σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ wird, auf Grund gruppentheoretischer Ueberlegungen, zum ersten Male vollständig dargelegt. Die dreigliedrigen (Weierstrass'schen) Additionstheoreme — 256 an der Zahl — werden auf 16 Familien von je 16 vertheilt, und alle zusammen werden durch ein übersichtlich gebautes System von linearen Gleichungen dargestellt. Zu jeder der 16 Familien gehört ein System von Additionstheoremen des Jacobi'schen Typus, das aus den genannten linearen Gleichungen durch elementare Eliminationen hervorgeht.

Eine Berichtigung und verschiedene Ergänzungen finden sich Leipz. Ber. 1895, S. 553, und Amer. Journal of Mathematics, Bd. 16 (1894), S. 156.



Brennfläche einer aplanaren Kettencongruenz.

Lineare Transformationen der Motoren, die coaxiale Motoren in ebensolche überführen.

Die zuletzt angestellten Betrachtungen enthalten eine vollständigere geometrische Deutung der zu Schluss des § 25 aufgeführten Gleichungen. Man kann nun offenbar in dieser Richtung noch einen Schritt weitergehen: Man kann in den genannten Gleichungen, und ebenso auch in den Gleichungen (5) des gegenwärtigen Paragraphen, die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ als nicht-homogene Grössen, als Coordinaten etwa eines *Motors* auffassen. Man wird dann natürlich auch die Werthe der Grössen a_{ik}, α_{ik} selbst, und nicht nur deren Verhältnisse, als für die betrachtete Transformation charakteristisch anzusehen haben: Die Gleichungen (5) stellen jetzt eine continuirliche Gruppe mit 19 Parametern dar.

Die Structur dieser Gruppe wird in derselben Weise untersucht werden können, wie die Structur der Gruppe Γ_{18}, deren Raumelement das Gewinde ist. Wir wollen diesen Gedanken nicht mehr ins Einzelne ausführen. *Wir weisen aber darauf hin, dass die meisten der demnächst zu entwickelnden Sätze unserer „Geometrie der Dynamen" untergeordnet werden können, dass man sie, wenn man will, als Aussagen über infinitesimale Bewegungen, Motoren u. s. w. ansehen kann.*

Das duale Doppelverhältniss.

Wir haben bisher die Gruppe G_{16} der dualen Collineationen auf zwei Weisen charakterisirt. Einmal analytisch, durch die linearen synektischen Transformationen (S. 224, 231). Sodann gruppentheoretisch, als invariante Untergruppe der umfassenderen Gruppe G_{17} der radialen Collineationen, die nach einem bis jetzt allerdings ohne Beweis angeführten Satze (S. 236), geometrisch erklärt werden kann. Man wird sich nun die Frage vorlegen können, worin sich denn geometrisch die dualen Collineationen von beliebigen radialen Collineationen unterscheiden, und wie man überhaupt durch geometrische Constructionen diese verschiedenen Arten von Strahlentransformationen finden kann.

Eine von der Geometrie der Gewinde und Motoren unabhängige Beantwortung dieser wichtigen Fragen kann in einer Reihe von Sätzen gefunden werden, die wir nunmehr darlegen wollen. Die Beweise und auch verschiedene Einzelheiten glauben wir dem Leser überlassen zu dürfen. Diese Beweise sind nämlich zum Theil vollkommen analog den Beweisen bekannter Sätze der ebenen projectiven Geometrie, in allen Fällen aber sind sie so leicht zu führen, dass ein Leser, der uns bis

hierher mit Aufmerksamkeit gefolgt ist, sie ohne Mühe wird ergänzen können. —

Wir bilden zunächst einen Begriff, der analog ist dem Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden oder von vier Geraden eines Punktes in der ebenen projectiven Geometrie, und der den Begriff dieser letzten Doppelverhältnisse als besonderen Fall umfasst.

Es mögen P, Q, R, S vier eigentliche Strahlen etwa „erster Schicht" bedeuten, die dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls angehören, und von denen wir überdies zunächst voraussetzen wollen, dass sie in diesem Normalennetz *„allgemeine Lage"* haben, dass nämlich, keine zwei von ihnen parallel sind. Ist dann O ein fünfter eigentlicher Strahl, der, übrigens ganz beliebig, nicht dem uneigentlichen Linienkreuz angehören soll, von dem P, Q, R, S Querlinien sind, so hat der Nenner des Quotienten

$$D = \frac{(OPR)\,(OQS)}{(OPS)\,(OQR)} \tag{15}$$

einen von Null verschiedenen scalaren Bestandtheil. Der duale Werth D dieses Quotienten ist ferner unabhängig von der Lage des Strahles O, und zum Beispiel gleich

$$\frac{\sin(P, R) \cdot \sin(Q, S)}{\sin(P, S) \cdot \sin(Q, R)}; \tag{16}$$

endlich ist dieser Quotient (15) eine absolute Invariante gegenüber dualen Projectivitäten. Wir nennen ihn das *duale Doppelverhältniss* der vier Strahlen P, Q, R, S — in dieser Reihenfolge — und bezeichnen ihn mit

$$D = d + \delta\varepsilon = (P, Q, R, S). \tag{17}$$

Aus vier Strahlen allgemeiner Lage (s. oben) desselben Normalennetzes kann man sechs solcher Doppelverhältnisse bilden, deren Werthe wie folgt zusammenhängen:

$$\begin{aligned}
&D_1 = (P, Q, R, S) = D, && D_1' = (P, Q, S, R) = \frac{1}{D}, \\
&D_2 = (P, R, S, Q) = \frac{1}{1-D}, && D_2' = (P, R, Q, S) = 1 - D, \\
&D_3 = (P, S, Q, R) = \frac{D-1}{D}, && D_3' = (P, S, R, Q) = \frac{D}{D-1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Unter der von uns gemachten Voraussetzung haben alle diese Grössen bestimmte endliche und daher sämmtlich auch solche Werthe, deren scalare Bestandtheile von Null und Eins verschieden sind. Erweitern wir aber unsere Voraussetzung dahin, dass wir nur noch für drei der betrachteten Strahlen, etwa für P, Q, R „allgemeine Lage"

annehmen, so werden, falls der vierte Strahl S zu einem von diesen parallel wird, immer einige der sechs Doppelverhältnisse unbestimmt oder sinnlos. Nehmen wir z. B. an, dass S von R verschieden, aber zu R parallel sei, so wird $d = 1$, $\delta \neq 0$, und daher

$$D_1 = 1 + \delta\varepsilon, \quad D_2 = \ast, \quad D_3 = \delta\varepsilon.$$
$$D_1' = 1 - \delta\varepsilon, \quad D_2' = -\delta\varepsilon, \quad D_3' = \ast.$$

Die durch Sterne bezeichneten Doppelverhältnisse haben nur eine formale Existenz: Ihre Ausdrücke enthalten den Factor ε^{-1} und sind daher von der Betrachtung auszuschliessen*).

Nach diesen Vorbereitungen werden die folgenden Sätze verständlich sein:

Sind P, Q, R drei eigentliche Strahlen desselben Normalennetzes (Querlinien desselben eigentlichen Linienkreuzes), von denen keine zwei parallel sind, und bedeutet S einen beliebigen vierten eigentlichen Strahl desselben Netzes, so sind unter den sechs dualen Doppelverhältnissen, die man der Form nach aus den vier Strahlen bilden kann, immer einige zulässig, und der Werth irgend eines dieser Doppelverhältnisse bestimmt eindeutig die Lage des Strahls S.

Nehmen wir z. B. an, dass das erste Doppelverhältniss D einen zulässigen Werth habe, womit die Lage $S \| P$ ausgeschlossen ist, so wird, bis auf einen willkürlich bleibenden dualen Factor,

$$(19) \qquad (US) = (ORP) \cdot (UQ) + D \cdot (OQR) \cdot (UP).$$

Es ist also die Lage von S völlig bestimmt durch die Lage von P, Q, R und durch den gegebenen Werth D.

Das duale Doppelverhältniss ist eine absolute Invariante der Gruppe der dualen Projectivitäten. Man kann drei Strahlen P, Q, R von der bezeichneten allgemeinen Lage drei anderen P', Q', R' gleicher Eigenschaft beliebig zuordnen. Damit ist dann die duale Collineation oder Correlation soweit bestimmt, als Strahlen der beiden einander zugeordneten Normalennetze in Frage kommen.

*) Zur Ergänzung des auf Seite 197 Gesagten bemerken wir nachträglich noch, dass man in der Theorie der dualen Grössen ein Symbol ∞ durch den der Form nach gebildeten Ausdruck $\frac{1+\delta\varepsilon}{k\varepsilon}$ erklären kann. Der Gebrauch dieses Symbols ist dann ähnlichen Einschränkungen unterworfen, wie der Gebrauch des Symbols $\infty = \frac{1}{0}$ in der gewöhnlichen Analysis; $0 \cdot \infty$ und $\varepsilon \cdot \infty$ bezeichnen unbestimmte Grössen. Danach würde man auch sagen können, dass die im Texte mit D_2 und D_3' bezeichneten Doppelverhältnisse „unendlich" werden oder den „Werth ∞" haben.

Das duale Doppelverhältniss ist dagegen nicht invariant gegenüber beliebigen radialen Projectivitäten.

Eine radiale Projectivität lässt vielmehr aus dem Doppelverhältniss $D = d + \delta\varepsilon$ *ein Doppelverhältniss der Form*

$$D' = d + k\delta \cdot \varepsilon \tag{20}$$

hervorgehen. Dabei bedeutet k *die in den Transformationsgleichungen* (5) *auftretende Constante — im Falle einer Transformation, die den absoluten Kegelschnitt in Ruhe lässt (einer Transformation von* G_{12} S. 236) —, *das Verhältniss, in dem alle Abstände paralleler Strahlen gleicher Schicht vergrössert werden.*

Der Annahme $k = +1$ entsprechen die dualen Collineationen und Correlationen; d. h. diese Transformationen sind durch die Invarianz der dualen Doppelverhältnisse charakterisirt; und ebenso sind die dualen Anticollineationen und Anticorrelationen durch die Annahme $k = -1$ gekennzeichnet. Die besonderen scalaren Doppelverhältnisse, deren vectorieller Coefficient verschwindet, sind natürlich invariant gegenüber radialen Projectivitäten überhaupt. Wir werden auf die Figur von vier Strahlen mit scalaren Doppelverhältnissen weiterhin noch zurückkommen*).

Zur Ergänzung fügen wir noch hinzu: *Im Parallelenbüschel haben schon drei eigentliche Strahlen gegenüber dualen (oder radialen) Collineationen eine absolute Invariante, nämlich das Verhältniss ihrer gegenseitigen Abstände.* Mit jedem Paar paralleler Strahlen ist also ein einzelner eigentlicher Strahl invariant verknüpft, nämlich der Strahl, der den Abstand der Strahlen des Paares halbirt.

Geometrische Construction der dualen Projectivitäten.

Wir wollen nun sagen, die Normalennetze von irgend zwei eigentlichen Strahlen (derselben Schicht oder auch verschiedener Schichten) seien *dual-projectiv* auf einander bezogen, wenn jedem Strahl des einen ein Strahl des anderen zugeordnet ist, und entsprechende duale Doppelverhältnisse gleich sind. Wir wollen ferner sagen, zwei Normalennetze verschiedener Schichten, deren Axen einander *nicht rechtwinklig* kreuzen oder schneiden, seien *dual-perspectiv* auf einander bezogen, wenn je zwei sich senkrecht schneidende Strahlen einander zugeordnet sind. Dann gelten die Sätze:

Dual-perspective Normalennetze sind zugleich dual-projectiv.

Jede dual-projective Beziehung zweier Normalennetze $\begin{matrix}\text{derselben Schicht}\\ \text{verschiedener Schichten}\end{matrix}$

*) In der imaginären projectiven Geometrie der Ebene sind das Analogon dazu die „neutralen“ Würfe v. Staudt's.

kann auf mannigfache Art dadurch hergestellt werden, dass man zwischen beide eine $\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}$ *Zahl anderer Normalennetze (im ungünstigsten Falle fünf) einschaltet, deren jedes zu dem vorhergehenden dual-perspectiv liegt.* Hieraus ergeben sich Lösungen der Aufgabe, die allgemeinste duale Collineation (oder Correlation) geometrisch zu construiren.

Irgend vier eigentliche Strahlen X_0, X_1, X_2, X_3, *von denen keine drei demselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Linienkreuz als Querlinien angehören, können in irgend vier andere der Art* X_0', X_1', X_2', X_3' *durch eine einzige duale Collineation übergeführt werden.*

Um zu einem beliebigen fünften eigentlichen Strahl X *den zugeordneten Strahl* X' *zu finden, braucht man nur zu wiederholten Malen eine einzige Construction aufzuwenden, nämlich das Ziehen der gemeinsamen Normale zwischen zwei nicht parallelen eigentlichen Strahlen gleicher Schicht.*

Dagegen können radiale Projectivitäten, die nicht dual-projectiv sind, insbesondere die dualen Antiprojectivitäten, *nicht* durch dieses Hülfsmittel bestimmt werden. Um auch sie zu finden, kann man so verfahren, dass man zwischen die Strahlen X_i, X_i' noch eine weitere Figur von vier Strahlen $\overline{X}_i$ einschiebt, die einem Strahlenbündel mit eigentlichem Mittelpunkt o angehören. Solche vier Strahlen, deren keine drei in einem Strahlenbüschel liegen, gestatten eine Gruppe von ∞^1 radialen Collineationen, nämlich die perspectiven Aehnlichkeitstransformationen mit dem Centrum o. Aus diesen und dualen Collineationen lassen sich daher die ∞^1 radialen Collineationen zusammensetzen, die vier gegebene Strahlen X_i in vier andere Strahlen X_i' überführen.

Analytisch gestaltet sich die Bestimmung der dualen Collineation, die den Strahlen X_i die Strahlen X_i' zuordnet, wie folgt.

Man stelle zunächst den Strahl X, dessen zugeordneter Strahl X' bestimmt werden soll, mit Hülfe dreier dualer Parameter $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ in der Form dar

$$(X_1 X_2 X_3)(UX) =$$
$$= \lambda_1 (X_2 X_3 X_0)(UX_1) + \lambda_2 (X_3 X_1 X_0)(UX_2) + \lambda_3 (X_1 X_2 X_0)(UX_3),$$

was unter den angegebenen Voraussetzungen immer und im Wesentlichen nur auf eine Weise geschehen kann. Setzt man dann

$$(X_1' X_2' X_3')(UX') =$$
$$= \lambda_1 (X_2' X_3' X_0')(UX_1') + \lambda_2 (X_3' X_1' X_0')(UX_2') + \lambda_3 (X_1' X_2' X_0')(UX_3'),$$

so ist X' der gesuchte Strahl. Die Grössen λ_i kann man als *dual-projective Strahlencoordinaten* bezeichnen, in Bezug auf zwei einander

zugeordnete Coordinatensysteme, in denen die Strahlen X_i und X_i' die Coordinaten:

$$\begin{aligned} 0) &\quad 1:1:1, \\ 1) &\quad 1:0:0, \\ 2) &\quad 0:1:0, \\ 3) &\quad 0:0:1 \end{aligned}$$

erhalten.

Die Werthe der Parameter oder Coordinaten λ_i des Strahles X im ersten Coordinatensystem lassen sich leicht bestimmen. Die gesuchte Transformation kann daher ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$(21) \qquad (X_1 X_2 X_3)(UX') = \frac{(X_2 X_3 X)}{(X_2 X_3 X_0)}(X_2' X_3' X_0')(UX_1') +$$
$$+ \frac{(X_3 X_1 X)}{(X_3 X_1 X_0)}(X_3' X_1' X_0')(UX_2') + \frac{(X_1 X_2 X)}{(X_1 X_2 X_0)}(X_1' X_2' X_0')(UX_3');$$

d. h. man erhält die Transformation, indem man diese in X und U lineare Form gleich Null setzt, oder indem man beiderseits die Coefficienten der drei dualen Coordinaten des unbestimmten Strahls U vergleicht.

Der auf der linken Seite zugefügte Factor $(X_1 X_2 X_3)$ kann natürlich als unwesentlich angesehen und unterdrückt werden. Wir haben ihn hinzugefügt, damit die aus der Gleichung

$$(X'Y'Z') = \Delta \cdot (XYZ)$$

zu bestimmende Transformationsdeterminante Δ ein möglichst durchsichtiges Bildungsgesetz erhalte. Man findet nach leichter Rechnung

$$(22) \qquad \Delta = \frac{(X_1' X_2' X_3') \cdot (X_2' X_3' X_0') \cdot (X_3' X_0' X_1') \cdot (X_0' X_1' X_2')}{(X_1 X_2 X_3) \cdot (X_2 X_3 X_0) \cdot (X_3 X_0 X_1) \cdot (X_0 X_1 X_2)}.$$

Damit die Transformation existire, ist also nothwendig und hinreichend, dass jeder der Factoren im Zähler und Nenner von Δ einen von Null verschiedenen scalaren Bestandtheil hat. Das gerade ist aber der algebraische Ausdruck der Voraussetzung, die wir gemacht hatten.

Nachdem nunmehr die Transformationen, mit denen wir es weiterhin zu thun haben werden, erklärt sind, wird es nothwendig, das Object dieser Transformationen, den Grundbegriff des Strahls selbst, einer sorgfältigen Untersuchung zu unterwerfen. Es wird sich dabei vor Allem darum handeln, die Schwierigkeiten zu überwinden, von denen auf S. 207 die Rede war. Natürlich wünschen wir eine principiell so wichtige Frage nicht nur fragmentarisch zu erörtern: Wir können uns nicht durchaus auf Das beschränken, was im Rahmen unserer „Geometrie der Dynamen“ unbedingt erforderlich ist. —

Wir fügen bei dieser Gelegenheit noch eine Bemerkung über den Ausdruck $\{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\}$ hinzu.

Eine trilineare alternirende Form eines Gebietes sechster Stufe definirt, gleich Null gesetzt, eine gewisse Gruppe von Collineationen dieses Gebietes. Die Form hat eine biquadratische Invariante, und wenn diese nicht verschwindet, *so hat die genannte Gruppe 16 Parameter; sie ist gemischt und ihre continuirliche Untergruppe ist halb-einfach.* Die genannte Gleichung lässt sich dann, wie Fr. Engel (in einer noch nicht veröffentlichten Untersuchung) durch wirkliche Ausführung der nöthigen Rechnungen gezeigt hat, auf die Form

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + (\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\mathfrak{z}') = 0$$

bringen, wo $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ die Determinante, gebildet aus den drei ersten Veränderlichen eines jeden der drei Systeme, und $(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')$ die Determinante aus den drei letzten bedeutet. Wenn aber jene Invariante verschwindet, ohne dass eine gewisse weitere Specialisirung eintritt, *so gestattet die besprochene Gleichung eine continuirliche projective Gruppe mit 17 Parametern.* Die trilineare Gleichung zwischen drei Systemen von sechs Veränderlichen lässt sich dann in die Form

$$\{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\} = 0$$

setzen: Man erhält dann gerade die mit G_{17} isomorphe Gruppe, von der auf S. 240 die Rede war. Der Ausdruck $\{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\}$ hat also noch eine allgemeinere Bedeutung, als die ihm nach der speciellen Anlage unserer Untersuchung zunächst zuzukommen scheint.

§ 27.

Der Strahlenraum als Continuum.

Die Einfachheit, die vielen Aussagen der modernen Geometrie, im Gegensatz zu entsprechenden Aussagen der Geometrie der Alten, innewohnt, beruht ganz wesentlich darauf, dass man den ursprünglichen *Begriff des Punktes* erweitert hat. Die ursprünglich allein bekannten im Endlichen gelegenen Punkte mit rechtwinkligen Coordinaten x_i bilden ein *Continuum* (von besonderer Art): Es ist möglich, Systeme in einem Intervall etwa von $t = 0$ bis $t = 1$ *stetiger* Functionen eines Parameters t anzugeben, die für $t = 0$ die Coordinaten des einen, für $t = 1$ die Coordinaten des anderen von irgend zwei Punkten liefern*). Anders ausgedrückt: Es ist möglich, irgend zwei Punkte (auf unendlich viele Arten) durch eine *stetige Curve* (in dem durch das Vorhergehende erklärten sehr umfassenden Sinne des Wortes, insbesondere auch durch eine reelle analytische Curve) zu verbinden. Dieses Con-

*) Nicht jedes Continuum hat diese Eigenschaft, wie das bekannte Beispiel

$$x = t, \qquad y = \sin\frac{1}{t} \quad (t > 0),$$
$$x = 0, \quad -1 \leq y \leq +1$$

zeigt.

tinuum hat aber *nicht* die Eigenschaft der Abgeschlossenheit: Es giebt in ihm unendliche Punktmengen, die keinen dem Continuum selbst angehörigen Häufungspunkt haben (z. B. die Gesammtheit aller Punkte, die auf einer Geraden in gleichen Abständen auf einander folgen).

Durch die Schöpfung des Begriffs der „uneigentlichen" oder „unendlich fernen" Punkte, verbunden mit der Einführung des algebraischen Hülfsmittels der *homogenen* Coordinaten, wird nun, unter Verzicht auf das Merkmal der sogenannten Anschaulichkeit, das Punktcontinuum derart erweitert, dass es den Charakter der Abgeschlossenheit erhält. In dem durch die uneigentlichen Punkte vervollständigten Continuum, dem Punktcontinuum der projectiven Geometrie, gehört jedem „Punkt" ein bestimmtes Werthsystem zwar nicht der homogenen Coordinaten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ selbst, wohl aber der Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2 : \ldots$ dieser Coordinaten zu, indem proportionale Werthe der Coordinaten als *äquivalent* erachtet werden, das Werthsystem $0, 0, 0, \ldots$ aber *ausgeschlossen* wird. Je zwei Punkte können dann wiederum durch eine im Continuum verlaufende „stetige Curve" verbunden werden; d. h. es ist möglich die Grössen x_i als stetige Functionen eines Parameters t ($\geqq 0, \leqq 1$) so zu wählen, dass für $t = 0$ die Coordinaten des einen, für $t = 1$ die des anderen Punktes erhalten werden, *und dass die zwischen diesen Grenzen liegenden Werthsysteme der genannten Functionen dem Werthsystem* $0, 0, 0, \ldots$ *nicht beliebig nahe kommen.* Es hat ferner in dem erweiterten Continuum *jede* unendliche Punktmenge Häufungsstellen: Das Continuum ist nunmehr *abgeschlossen**).

*) Der Begriff des abgeschlossenen Continuums rührt von dem Begründer der Mengenlehre überhaupt, Herrn G. Cantor her (Vgl. Math. Ann. Bd. 21, S. 572 u. ff.). Herr Cantor will aber das Wort Continuum, auch ohne Zusatz, *nur* da angewendet wissen, wo das Merkmal der Abgeschlossenheit vorliegt. Danach bilden die Transformationen einer *continuirlichen* Gruppe kein Continuum in seinem Sinne, und selbst der Punktraum der Elementargeometrie, Cantor's *„Linearcontinuum"*, ist für ihn nicht nothwendig ein „Continuum", ja nicht einmal ein „Semicontinuum". (A. a. O. S. 590, 591.)

Zu grösserer Uebereinstimmung mit der sonst üblichen Terminologie kommt man etwa auf folgende Art:

Man erklärt zunächst, von dem (nicht-abgeschlossenen) Punktraum der Elementargeometrie ausgehend, den *Begriff der perfecten Menge,* wie bei Cantor. (Vgl. auch Schoenflies, Math. Enc. I, A, 5; Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII, 2 (1900).) Hierauf *das abgeschlossene Continuum, als perfecte Menge, die nicht in zwei ebenfalls perfecte Mengen zerlegt werden kann.* Hierauf endlich *den allgemeinen Begriff des Continuums, als Menge, in der irgend zwei Stellen durch (mindestens) ein abgeschlossenes Continuum verbunden werden können.*

Die verschiedenartigen Erweiterungen des Continuums der Elementargeometrie erfolgen *dann erst* auf Grund besonderer Definitionen, deren eine wir im Texte erörtert haben. — Die angegebene sehr einfache und schöne Definition des

Der Nutzen dieser Begriffsbildungen tritt in prägnanter Form in dem Satze hervor, dass in dem *erweiterten* Punktcontinuum die Collineationen überall *wohldefinirt, eindeutig* und *stetig* sind.

Tritt der Fall ein, dass vorgelegte Functionen $x_i(t)$ in jedem Intervall von $t = \delta$ bis $t = 1$ $(\delta > 0)$ die verlangten Eigenschaften haben, im Intervall von $t = 0$ bis $t = 1$ aber nicht mehr, so stellen diese Functionen eine „Curve" dar, die in der Nähe des Parameterwerthes $t = 0$ zunächst überhaupt *nicht definirt* ist. Wenn aber insbesondere die Grenzwerte $x_i(0)$ sämmtlich vorhanden, und alle gleich Null sind, so kann es sein, dass eine Function $\varrho(t)$ existirt, der folgende Eigenschaften zukommen:

1) $\varrho(t)$ ist stetig und von Null verschieden in jedem Intervall von $t = \delta$ bis $t = 1$ $(\delta > 0)$

2) Die Producte $x_i'(t) = \varrho(t) \cdot x_i(t)$ ändern sich stetig auch noch bei Annäherung an die Stelle $t = 0$.

3) Die Grenzwerthe $x_i'(0)$ sind nicht alle gleich Null.

Tritt dieser Fall ein, so ist es statthaft, den Punkt mit den homogenen Coordinaten $x_i'(0)$ der betrachteten Curve hinzuzurechnen: Man hat dann eine Curve vor sich, die *„stetig"* ist für das ganze Intervall von $t = 0$ bis $t = 1$ *mit Einschluss der Grenze* $t = 0$. Dass die Coordinatenverhältnisse des hinzugefügten Grenzpunktes von der in der Function $\varrho(t)$ noch enthaltenen Willkür nicht abhängen, ist evident. Die in der ursprünglichen Darstellung $x_i(t)$ bei $t = 0$ vorhandene Unregelmässigkeit ist in diesem Falle als unwesentlich oder *„hebbar"* zu betrachten.

Der genannte Fall tritt insbesondere *immer* dann ein, wenn die Functionen $x_i(t)$ analytische Functionen sind, im Inneren von deren Existenzbereich das Werthsystem $0, 0, 0, \ldots$ auftritt. Diese Functionen lassen sich dann nach ganzen Potenzen von $t - t_0$ entwickeln, und die Hebung der genannten, etwa bei $t = t_0$ stattfindenden Unregelmässigkeit erfolgt durch Division mit einer Potenz von $t - t_0$.*)

Liegt überhaupt eine continuirliche Mannigfaltigkeit eigentlicher Punkte vor, die nicht abgeschlossen ist, so erfolgt deren Ergänzung

---

Begriffs „abgeschlossenes Continuum" verdankt der Verfasser einer brieflichen Mittheilung des Herrn Schoenflies.

*) Der Verfasser muss um Entschuldigung bitten, wenn er etwa allgemein Bekanntes vorträgt. Er hat in der ihm bekannten Litteratur keine ausdrückliche Erklärung dieser Bestimmungen finden können, die bei Rechnungen mit homogenen Coordinaten thatsächlich verwendet werden, und die der Leser weiterhin gegenwärtig haben muss. So wesentliche Festsetzungen dürfen wohl nicht stillschweigend abgethan werden.

zu einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit, die im Allgemeinen auch uneigentliche Punkte enthalten wird, durch Grenzübergänge, in besonderen Fällen durch den *Process der analytischen Fortsetzung.*

Es ist nun offenbar eine Frage von grundsätzlicher Bedeutung, ob ähnliche Bestimmungen zu einer zweckmässigen Ausgestaltung eines Systems der Geometrie der radial-projectiven Transformationen führen können.

Eine befriedigende Antwort hierauf ist nicht so leicht zu geben, wie bei den (nicht gerade zahlreichen) geometrischen Disciplinen, die sich bisher wenigstens einiger Ausbildung zu erfreuen hatten. Um ein klar definirtes mathematisches *Problem* formuliren und lösen zu können, werden wir Betrachtungen nöthig haben, die nicht mehr als ganz elementar werden gelten können.

Wir werden zeigen, dass der zunächst sich darbietende Weg nicht zum Ziele führt.

Die Strahlencoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ sind besonders in den dualen Verbindungen X_i in vieler Hinsicht analog zu den homogenen Punktcoordinaten der projectiven Geometrie. Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls wird, wie wir gesehen haben, dargestellt durch eine synektische Gleichung, die genau dieselbe einfache Form hat, wie die Gleichung einer geraden Linie in der Ebene. Ferner sind die radialen Collineationen in den Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ wohldefinirt (abgesehen von der natürlichen Unbestimmtheit, die in der Unbestimmtheit der Coordinaten selbst ihren Grund hat) und eindeutig, und auch sie werden durch Gleichungen ausgedrückt, die an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig lassen, überdies auch, im Falle der *dualen* Collineationen, ganz dieselbe Form haben wie die Gleichungen für die Collineationen einer Ebene.

Gleichwohl ist es, wie wir darlegen werden, unmöglich, durch stetige Aenderungen der Coordinaten X_i (oder $\mathfrak{X}_{ik}$) ein „Strahlencontinuum" zu erklären, dessen Eigenschaften denen des Punktcontinuums der projectiven Geometrie oder des Plücker'schen Liniencontinuums vergleichbar wären.

In diesem wichtigen Punkte versagt die sonst vorhandene Analogie zwischen den Strahlencoordinaten X_i und gewöhnlichen homogenen Coordinaten nahezu vollständig.

Ein irreguläres Strahlencontinuum.

Fasst man die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ zunächst als Gewindecoordinaten auf, so kann man durch sie ein Gewindecontinuum erklären, das eindeutig-umkehrbar und stetig abgebildet ist auf das Punktcontinuum der projectiven Geometrie in einem sogenannten ebenen Raume von fünf

Dimensionen. Darin ist enthalten *das Plücker'sche Liniencontinuum*, das durch eine quadratische Gleichung zwischen den Gewindecoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ definirt wird. —

In der Gewindemannigfaltigkeit ist nun aber *stetig* u. A. der Grenzübergang

$$X_i' = (\sigma + \tau\varepsilon)X_i, \quad \lim \sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Bei Auffassung der Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ als Strahlencoordinaten bedeutet dieser Process einen völlig unvermittelten Uebergang von einem bestimmten, nicht veränderlichen eigentlichen Strahl zu dem uneigentlichen Strahl, der ihn zu einem Linienkreuz ergänzt. Diese Art continuirlicher Aenderung der Strahlencoordinaten muss daher als eine *nicht* continuirliche Aenderung der Strahlen selbst angesehen werden. Sie, und noch allgemeinere Arten des Grenzübergangs sind auszuschliessen, ebenso, wie im Gewindecontinuum selbst die Annäherung an das Werthsystem 0, 0, 0, 0, 0, 0 ausgeschlossen werden muss. (S. oben, S. 248.) Es handelt sich also darum, eine Erklärung „stetiger" Lagenänderung von Strahlen zu geben, die der Unbestimmtheit der Strahlencoordinaten Rechnung trägt.

Wir betrachten der Kürze halber gleich von vorn herein den Fall, auf dessen Untersuchung es schliesslich ankommt. Wir nehmen an, die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ seien als Functionen eines Parameters t gegeben, die *stetig* sind im Intervall von Null bis Eins, *mit Einschluss der Grenzen.* Es sollen ferner die Grössen $\mathfrak{X}_{01}(t)$, $\mathfrak{X}_{02}(t)$, $\mathfrak{X}_{03}(t)$ wenigstens zum Theil von Null verschieden sein in jedem Intervall von $t = \delta$ bis $t = 1$ $(\delta > 0)$. Dagegen soll $\mathfrak{X}_{01}(0) = \mathfrak{X}_{02}(0) = \mathfrak{X}_{03}(0) = 0$ sein, während wiederum die Grössen $\mathfrak{X}_{23}(0)$, $\mathfrak{X}_{31}(0)$, $\mathfrak{X}_{12}(0)$ nicht alle verschwinden. Dann liegt zunächst eine Mannigfaltigkeit eigentlicher Strahlen vor, die den Werthen von t, > 0 und ≤ 1, eindeutig und *„stetig"* zugeordnet ist. Für $t = 0$ aber tritt möglicher Weise eine Unstetigkeit ein: Wir betrachten daher einen diesem Werthe entsprechenden Strahl der Mannigfaltigkeit zunächst als *nicht definirt.*

Als *äquivalent* mit der angegebenen Darstellung der betrachteten Strahlenmannigfaltigkeit $(0 < t < 1)$ sind nun, nach der Definition der Strahlencoordinaten, alle anderen anzusehen, die in der Form

$$(1) \qquad \mathfrak{X}_{01}'(t) = \sigma(t) \cdot \mathfrak{X}_{01}(t), \quad \mathfrak{X}_{23}'(t) = \sigma(t) \cdot \mathfrak{X}_{23}(t) + \tau(t) \cdot \mathfrak{X}_{01}(t)$$

(u. s. w.) enthalten sind, wofern $\sigma(t)$ und $\tau(t)$ irgend welche Functionen von t bedeuten, die stetig sind in jedem Intervall von $t = \delta$ bis $t = 1 (\delta > 0)$, und deren erste überdies in diesem Intervall nicht verschwindet.

Ist es nun möglich, die Functionen σ und τ so zu wählen, dass

bestimmte Grenzwerthe $\mathfrak{X}'_{ik}(0)$ existiren, und einen *eigentlichen* Strahl darstellen, so haben wir bei $t = 0$ eine *hebbare* Unregelmässigkeit der Darstellung $\mathfrak{X}_{ik}(t)$ unserer Strahlenmannigfaltigkeit vor uns. Der Strahl $\mathfrak{X}'_{ik}(0)$ wird dann dieser Mannigfaltigkeit hinzuzufügen sein, die nach der Aenderung „stetig" wird auch noch bei $t = 0$. (Vgl. das vorhin über die Punktmannigfaltigkeit der projectiven Geometrie Gesagte.) Ist es *zweitens* zwar nicht möglich, zu erreichen, dass bestimmte, einen *eigentlichen* Strahl darstellende Grössenwerthe $\mathfrak{X}'_{ik}(0)$ vorhanden sind, wohl aber, dass die Grössen $\mathfrak{X}'_{ik}(t)$ bei Annäherung von t an die Stelle $t = 0$ nicht auch nur zum Theil über alle Grenzen wachsen, und dass unter den Verdichtungsstellen von $\mathfrak{X}'_{01}(t)$, $\mathfrak{X}'_{02}(t)$, $\mathfrak{X}'_{03}(t)$ das Werthsystem 0, 0, 0 *nicht* vorkommt, so wird ein „stetiger" Uebergang von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen an der Stelle $t = 0$ ebenfalls *nicht* anzunehmen sein. Die Strahlenmannigfaltigkeit ist dann bei $t = 0$ überhaupt als *unstetig* anzusehen*). Es kann aber *drittens* auch der Fall eintreten, dass das Erscheinen des Werthsystems 0, 0, 0 durch Einführung der Hülfsfunctionen σ und τ nicht beseitigt werden kann, ohne dass bei Annäherung von t an die Stelle $t = 0$ wenigstens eine der Functionen $\mathfrak{X}'_{23}(t)$, $\mathfrak{X}'_{31}(t)$, $\mathfrak{X}'_{12}(t)$ über alle Grenzen wächst. Die letzte Art des Uebergangs von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen tritt z. B. dann ein, wenn in einem Parallelenbüschel ein Strahl ins Unendliche rückt (wie wir sogleich näher ausführen werden).

Wollten wir nun auch diese Arten des Grenzübergangs sämmtlich als nicht in dem zu definirenden „Strahlencontinuum" verlaufend, mithin als unstetig erklären, so würde überhaupt keine Möglichkeit eines „stetigen" Uebergangs von eigentlichen zn uneigentlichen Strahlen übrig bleiben. Die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Strahlen aber bildet kein *abgeschlossenes* Continuum: Eine Reihe von Strahlen z. B., die in einem Parallelenbüschel in gleichen Abständen auf einander folgen, hat keinen dem Continuum der eigentlichen Strahlen zugehörigen Strahl als Grenze. Damit wäre die geforderte Analogie zum Punktcontinuum der projectiven Geometrie, in dessen Abgeschlossenheit wir wohl eine wesentliche Eigenschaft erblicken dürfen, von vorn herein unmöglich. Wir sind also genöthigt, die Grenzübergänge der dritten Art wenigstens zum Theil für stetig zu erklären. Eine Einschränkung, die wir noch hinzufügen müssen, ist offenbar die, dass *bestimmte* Grenzverhältnisse

*) Damit ist nicht gesagt, dass sie nicht zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt werden kann. Die Curve $y = \sin\frac{1}{x}$ ist unstetig bei $x = 0$, kann aber gleichwohl zu einem Continuum ergänzt werden. Vgl. S. 247.

$$\lim \{ \mathfrak{X}_{01}(t) : \mathfrak{X}_{02}(t) : \mathfrak{X}_{03}(t) \}_{t=0}$$

existiren.

Es ist nun nicht schwer zu erkennen, dass die hiermit erklärte Stetigkeit eines speciellen Grenzübergangs von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen trotz der zuletzt eingeführten Voraussetzung immer noch nicht die Existenz eines *bestimmten* uneigentlichen Strahls als Grenze der eigentlichen Strahlen $\mathfrak{X}_{ik}(t)$ zur Folge hat.

Sehen wir z. B. zu, was aus unserer Definition folgt, wenn wir einen Grenzübergang von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen insbesondere auf einer einfach ausgedehnten *analytischen* Strahlenmannigfaltigkeit im Inneren von einem Bereiche regulären Verhaltens vornehmen.

Die allgemeinste Annahme, die wir dann zu untersuchen haben werden, wird die sein, dass sich die Functionen $\mathfrak{X}_{ik}(t)$ durch Potenzreihen darstellen lassen, die convergiren innerhalb eines gewissen Bereiches $|t - t_0| < \delta$, und die folgende besondere Form haben:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = (t-t_0)^\lambda \{a_0 + \cdots\}, \quad \mathfrak{X}_{23} = \alpha_0 + \alpha_1 (t-t_0) + \cdots, \\ (2) \quad &\mathfrak{X}_{02} = (t-t_0)^\lambda \{b_0 + \cdots\}, \quad \mathfrak{X}_{31} = \beta_0 + \beta_1 (t-t_0) + \cdots, \\ &\mathfrak{X}_{03} = (t-t_0)^\lambda \{c_0 + \cdots\}, \quad \mathfrak{X}_{12} = \gamma_0 + \gamma_1 (t-t_0) + \cdots. \end{aligned}$$

Irgend eine der Grössen a_0, b_0, c_0 und irgend eine der Grössen α_0, β_0, γ_0 darf als von Null verschieden angenommen werden, da andernfalls der Exponent λ entweder erhöht, oder, durch Division mit einer Potenz von $(t - t_0)$, erniedrigt werden könnte.

Von den drei zuvor betrachteten Annahmen kann nun nur noch die erste und dritte gemacht werden, und diese beiden Annahmen sind leicht zu unterscheiden.

Ist

$$(3) \qquad a_0 : b_0 : c_0 = \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0,$$

so kann man durch Subtraction eines Multiplums der Potenzreihen $\{a_0 + \cdots\}$ u. s. w. von den Ausdrücken rechts die Glieder nullten Grades in $(t - t_0)$ zum Verschwinden bringen, und man kann dann durch Division mit einer Potenz von $(t - t_0)$ den Werth des Exponenten λ herabdrücken. Bei der neu enstandenen Entwickelung liegt möglicher Weise dieselbe Voraussetzung vor, und es kann dann der gleiche Process nochmals angewendet werden. Endet dieses Verfahren mit dem Exponenten $\lambda = 0$, so gehört der durch (2) formal dargestellte Uebergang von eigentlichen Strahlen zu einem uneigentlichen zu denen, die wir für unstetig und zugleich *hebbar* erklärt hatten. (Erster Fall.) Bricht aber der angegebene Reductionsprocess früher

ab, so liegt ein zulässiger *stetiger* Uebergang zu dem uneigentlichen Strahl vor. (Dritter Fall.)

Wir können bei der letzten Annahme, ohne eine wirkliche Beschränkung einzuführen, voraussetzen, dass schon von vorn herein

$$a_0 : b_0 : c_0 \neq \alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 \tag{4}$$

sei. Jetzt aber ergeben sich, nach geeigneter Verfügung über die Functionen $\sigma(t)$ und $\tau(t)$, als „Grenzlagen" von eigentlichen Strahlen der Schar (2), überhaupt *alle* uneigentlichen Strahlen, deren Coordinaten die Form

$$\mathfrak{X}_{23} = \sigma\alpha_0 + \tau a_0, \quad \mathfrak{X}_{31} = \sigma\beta_0 + \tau b_0, \quad \mathfrak{X}_{12} = \sigma\gamma_0 + \tau c_0 \tag{5}$$

haben. Dieselben ∞^1 uneigentlichen Strahlen würden wir sogar schon gefunden haben, wenn wir den Grenzübergang von vorn herein in speciellster Form in dem Parallelenbüschel

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= (t - t_0)a_0, \quad \mathfrak{X}_{23} = \alpha_0 + (t - t_0)\alpha_1, \\ \mathfrak{X}_{02} &= (t - t_0)b_0, \quad \mathfrak{X}_{31} = \beta_0 + (t - t_0)\beta_1, \\ \mathfrak{X}_{03} &= (t - t_0)c_0, \quad \mathfrak{X}_{12} = \gamma_0 + (t - t_0)\gamma_1, \end{aligned} \tag{6}$$

also in einer *algebraischen* Strahlenmannigfaltigkeit von denkbar einfachster Beschaffenheit vorgenommen hätten.

Wir erkennen also, dass die beiden Operationen: Uebergang von einer Darstellung $\mathfrak{X}_{ik}(t)$ der betrachteten Strahlenmannigfaltigkeit zu einer (im Allgemeinen) äquivalenten Darstellung $\mathfrak{X}'_{ik}(t)$, und Uebergang von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen nicht vertauschbar sind, dass die für bestimmte eigentliche Strahlen vorhandene Aequivalenz beider Darstellungen beim Uebergang zur Grenze verloren geht:

Das Ergebniss jedes im erklärten Sinne stetigen Uebergangs von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen, der auf einer eindimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit im Inneren von deren Existenzbereich stattfindet, ist stets ein unbestimmter uneigentlicher Strahl eines gewissen Büschels. Die genannte Art von Unbestimmtheit tritt also bereits ein bei einem Parallelenbüschel, in dem ein beweglicher Strahl ins Unendliche rückt.

Die folgende Fig. 39 zeigt, in projectiver Verzerrung, zwei in einer Ebene φ gelegene zu einander orthogonale Parallelenbüschel mit den unendlich fernen Scheiteln ξ, η, und deren Polaren Ξ, H in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt. Die Schnittlinie Z der Ebene φ mit der unendlich fernen Ebene ω ist die völlig bestimmte Grenzlage für die *Geraden* beider Büschel in dem Plücker'schen Liniencontinuum, von dem vorher gelegentlich die Rede war. Fig. 40 zeigt daneben die

Lage der ∞^1 uneigentlichen Strahlen, die aus dem zuletzt besprochenen Grenzübergang sich ergeben, wenn man mit einem *Strahl* des Büschels (φ, ξ) zur Grenze übergeht.

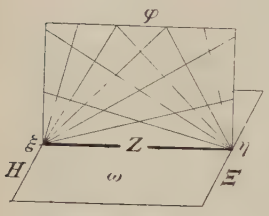


Fig. 39.

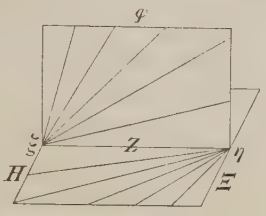


Fig. 40.

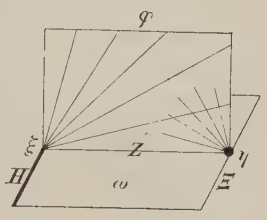


Fig. 41.

Die betrachtete Art von Continuität des Strahlenraumes, die dadurch zu Stande gekommen ist, dass wir gewisse Arten des Uebergangs von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen als unzulässig erklärt haben (und erklären *mussten*), unterscheidet sich sehr wesentlich von allen Arten continuirlichen Zusammenhangs, die bei Untersuchungen über Punktmannigfaltigkeiten bisher aufgetreten sind; insbesondere ist sie völlig verschieden von den Arten des Zusammenhangs, die möglich sind bei einer Punktmannigfaltigkeit, die durch algebraische Gleichungen zwischen homogenen Coordinaten aus dem Punktcontinuum der projectiven Geometrie abgeschieden werden kann. Immerhin ist sie noch *Continuität*. Irgend zwei eigentliche oder uneigentliche Strahlen können in mannigfacher Weise durch ein abgeschlossenes, von Strahlen gebildetes Continuum, u. A. auch durch ein Continuum der besonderen Form $\mathfrak{X}_{ik}(t)$ verbunden werden; das Continuum aller Strahlen ist ferner, wie unmittelbar deutlich, abgeschlossen. Ueberdies hat das erklärte Continuum gewisse Eigenschaften, die analog sind denen des Punktcontinuums der projectiven Geometrie: In unserem Strahlencontinuum sind die radialen Projectivitäten nicht nur überall wohldefinirt und eindeutig, sondern überdies auch *stetig*. Jedem Strahl $\mathfrak{X}$ wird durch irgend eine radiale Collineation *ein* bestimmter Strahl $\mathfrak{X}'$ zugeordnet. Aendert dann $\mathfrak{X}$ seine Lage stetig, so thut $\mathfrak{X}'$ dasselbe; Grad und Art der bei einem Uebergang zu uneigentlichen Strahlen auftretenden Unbestimmtheit sind dieselben, und wenn der uneigentliche Strahl $\mathfrak{Y}$ als Grenzlage eigentlicher Strahlen $\mathfrak{X}(t)$ erscheint, so erscheint der entsprechende Strahl $\mathfrak{Y}'$ als Grenzlage der entsprechenden Strahlen $\mathfrak{X}'(t)$.

Dass die begrifflich und durch Formeln ausgedrückte Continuität nicht auch eine Continuität für die Anschauung ist, selbst nicht in der verzerrten Figur 40, kann als eine Schwierigkeit empfunden werden, deren Vorhandensein wir nicht in Abrede stellen. *Diese* Schwierigkeit

hat aber ihre Quelle, wie uns scheint, nicht in der Natur der Sache, sondern lediglich in Vorurtheil und Gewöhnung. Sie ist von derselben Art wie die Schwierigkeit, die von Einigen in den Begriffsbildungen der Nicht-Euklidischen Geometrie gefunden wird*).

Ernstere, weil in der Sache selbst begründete, Schwierigkeiten zeigen sich bei weiterem Ausbau der Geometrie der radial-projectiven Transformationen auf dieser Grundlage. Da schon ein Parallelenbüschel erst durch Zufügung von unendlich vielen uneigentlichen Strahlen ein abgeschlossenes Continuum wird, so giebt es hier keinen Irreducibilitätsbegriff, der an Einfachheit den entsprechenden Begriffsbildungen der gewöhnlichen projectiven Geometrie an die Seite gestellt werden könnte, und dieser Mangel wird natürlich die Quelle zahlreicher Verwickelungen. Es ist daher die Frage zu stellen, ob man nicht durch *weitere Einschränkungen* der als zulässig oder „stetig" zu betrachtenden Uebergänge von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen, also durch eine zweckmässige Aenderung im Begriff des „Strahlencontinuums" selbst zu einfacheren Begriffsbildungen kommen kann?

Versucht man nun, die Unbestimmtheit aufzuheben, die schon beim Grenzübergang auf einer analytischen Strahlenmannigfaltigkeit, insbesondere im Parallelenbüschel, sich zeigt, so kann das, wenn überhaupt in sachgemässer Weise, jedenfalls nur auf *eine* Art geschehen. Hält man nämlich ein Parallelenbüschel fest, so werden, wie eine leichte Rechnung zeigt, von den dann noch möglichen radialen Collineationen die ∞^1 uneigentlichen Strahlen, die nach der bisherigen Definition Grenzlagen von Strahlen des Büschels waren (Fig. 40), *transitiv* unter einander vertauscht. *Jeder von diesen uneigentlichen Strahlen kann in jeden anderen übergeführt werden, mit Ausnahme eines einzigen Strahls*, der absoluten Polare Ξ des unendlich fernen Scheitels ξ des Büschels. Sobald man also einen Grenzübergang für zulässig erklärt, der zu einem von Ξ verschiedenen Strahl führt (z. B. den im Plückerschen Liniencontinuum ausführbaren Uebergang zum Strahl Z, Fig. 39), so muss man auch alle anderen (Fig. 40) für zulässig erklären, und damit hat man wieder die besprochene Unbestimmtheit in ihrem ganzen Umfang. Man muss also alle diese Grenzübergänge für unzulässig,

*) Wir würden einen hieraus etwa abzuleitenden Einwand als nicht sachgemäss betrachten müssen. „Anschaulichkeit" ist kein klar definirbarer Begriff. Ausserdem würde derselbe Einwand auch schon den allgemein angenommenen Begriff der unendlich fernen Punkte treffen. Bringt man diese, wie wir es gethan haben, durch eine Collineation ins Endliche, so hebt man doch nur den Mangel der Anschaulichkeit durch eine Construction auf, die gleichfalls nicht anschaulich ist.

„unstetig“ erklären, mit Ausnahme des einen, der zu dem ausgezeichneten Strahl Ξ führt. Die weitere Folge wird sein, dass beim Uebergang auf einer analytischen Mannigfaltigkeit (2) unter der Voraussetzung (4) an Stelle von (5) nur noch der Strahl

$$\mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12} = a_0 : b_0 : c_0 \tag{5b}$$

als zulässige Grenzlage angesehen werden kann.

Diese Festsetzung ist nun zwar nicht, wie unsere erste, eine nothwendige Folge der Unbestimmtheit der Strahlencoordinaten — aber *zulässig* ist sie ebenfalls. Die weitere Folge ist, dass allgemein einer continuirlichen Schaar von eigentlichen Strahlen $X(t)$ ein bestimmter uneigentlicher Strahl als Grenzlage zugerechnet werden muss, wenn bei verschwindenden Grenzwerthen $\mathfrak{X}_{0k}(0)$ aber nicht verschwindenden Grenzwerthen $\mathfrak{X}_{ik}(0)$ $(i, k = 1, 2, 3)$ die Verhältnisse der zuerst genannten gegen bestimmte Grenzen convergiren, ohne dass eine *hebbare* Unstetigkeit eintritt. Eine Schaar von eigentlichen Strahlen $X(t)$ „enthält“ dann einen bestimmten uneigentlichen Strahl, wenn das zu einem veränderlichen Strahl der Schaar gehörige Parallelenbündel sich einer bestimmten Grenzlage nähert, während der Strahl ins Unendliche rückt; man erhält dann *den* uneigentlichen Strahl, der die Strahlen des genannten Bündels zu einem uneigentlichen Linienkreuz ergänzt (den Strahl Ξ, Fig. 40). Da auch mit jedem eigentlichen Strahl ein Linienkreuz verbunden ist, so kann das auf die geschilderte Art entstehende Strahlencontinuum als *Continuum der Linienkreuze* bezeichnet werden: Von dem besprochenen Grenzübergang haben wir, in speciellen Fällen, thatsächlich in unserem ersten Abschnitt bereits ausgedehnten Gebrauch gemacht.

Ist sonach, wie der Leser weiterhin noch deutlicher erkennen wird, die zuletzt getroffene Bestimmung legitim, so führt doch auch sie nicht zu einer Ausgestaltung der algebraischen Geometrie der radialen Projectivitäten, die mit der projectiven Geometrie (der Plücker'schen Liniengeometrie, der Möbius'schen Geometrie der Inversionen, der Lie'schen Kugelgeometrie u. s. w.) in Parallele gesetzt werden könnte.

Das Continuum der Linienkreuze kann nicht durch eine analytische Abbildung durchaus (auch bei complexen Veränderlichen) eindeutig und stetig auf eine Punktmannigfaltigkeit bezogen werden, die in einem projectiven Punktcontinuum von n Dimensionen verläuft.

Die Begründung dieser Behauptung erbringen wir erst weiter unten, nach Entwickelung neuer Hülfsmittel (S. 280). Nehmen wir sie als richtig an, so lassen sich Schwierigkeiten vorhersehen, die sich daraus ergeben müssen, namentlich in Bezug auf die Einführung zweckmässiger Festsetzungen über die sogenannte Multiplicität eines uneigent-

lichen Strahls, der einer algebraischen Mannigfaltigkeit angehört. Wir wünschen aber, bei einem Gegenstande, der ohnehin des Neuen und Fremdartigen schon genug bieten wird, das Brett nicht gerade dort zu bohren, wo es am dicksten ist. Deshalb ziehen wir es vor, die Ergänzung unserer Strahlenmannigfaltigkeit zu einem abgeschlossenen Continuum überhaupt auf einem anderen Wege zu versuchen.

Uebrigens werden die hier angestellten Ueberlegungen für uns nicht verloren sein. Wir werden sogleich Veranlassung haben, die erörterten Grenzprocesse von Neuem zu betrachten.

Um für die zuerst besprochene Art der Continuität, bei der ein ins Unendliche rückender Strahl auch im günstigsten Falle noch ∞^1 uneigentliche Strahlen zu Grenzlagen hat, eine kurze Bezeichnung zu haben, brauchen wir dafür den Ausdruck *irreguläres Strahlencontinuum*. Ein Missverständniss kann dadurch deshalb nicht hervorgerufen werden, weil wir andere Continua, die ebenfalls irregulär zu nennen sein würden, nicht betrachten werden, ausser dem Continuum der Linienkreuze, für das wir eben diese besondere Bezeichnung haben.

Das erste reguläre und natürliche Strahlencontinuum.

Unsere bisherigen Ueberlegungen lassen die Möglichkeit offen, „stetige" Ortsänderungen eines Strahls überhaupt nicht durch stetige Aenderungen der Strahlencoordinaten $\mathfrak{x}_{ik}$, sondern in anderer Weise zu erklären, vielleicht auch die Ergänzung der Mannigfaltigkeit der im Endlichen verlaufenden, eigentlichen Strahlen durch „uneigentliche" Elemente zu einem abgeschlossenen Continuum in ganz anderer Weise vorzunehmen, als bisher geschehen. Und in der That erweist sich als hierzu brauchbar ein System von *„Strahlencoordinaten zweiter Art"*, denen wir nunmehr die bisher allein benutzten als *„Coordinaten erster Art"* gegenüberstellen wollen.

Die neuen Coordinaten können wir zunächst nur für *eigentliche* Strahlen erklären. Sie haben einen geringeren Grad von Unbestimmtheit als die Grössen $\mathfrak{x}_{ik}$. Sie werden durch diese so ausgedrückt:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_{01}, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_{02}, \quad \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_{03},$$

$$(7) \qquad \mathfrak{x}_{11} = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{02} & \mathfrak{x}_{31} \\ \mathfrak{x}_{03} & \mathfrak{x}_{12} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_{22} = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{03} & \mathfrak{x}_{12} \\ \mathfrak{x}_{01} & \mathfrak{x}_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{x}_{33} = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{01} & \mathfrak{x}_{23} \\ \mathfrak{x}_{02} & \mathfrak{x}_{31} \end{vmatrix}.$$

Danach gehört zu jedem *eigentlichen* durch die Grössen $\mathfrak{x}_{ik}$ bestimmten Strahl ein System von sechs Grössen $\mathfrak{x}_k$, $\mathfrak{x}_{kk}$, die durch die identische Relation

$$(8) \qquad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_{11} + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_{22} + \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_{33} = 0$$

verbunden sind. Und da den Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ ein gemeinsamer Proportionalitätsfactor ϱ hinzugefügt werden darf, so ist als *äquivalent* mit den Coordinaten $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ das folgende System anzusehen:

$$\varrho\mathfrak{X}_1,\ \varrho\mathfrak{X}_2,\ \varrho\mathfrak{X}_3,\ \varrho^2\mathfrak{X}_{11},\ \varrho^2\mathfrak{X}_{22},\ \varrho^2\mathfrak{X}_{33}.\quad (\varrho \neq 0). \tag{9}$$

Die neuen Coordinaten sind also wieder *homogene* Grössen, aber nicht ganz im üblichen Sinne des Wortes. Es wird hier vorausgesetzt, dass man den Grössen $\mathfrak{X}_{kk}$ das doppelte Gewicht beilegt, wie den Grössen $\mathfrak{X}_k$: Ein System von Gleichungen zwischen den genannten sechs Grössen, das einen geometrischen Sinn haben soll, darf sich nicht ändern, wenn nach Anweisung von (9) diesen Grössen Factoren ϱ, ϱ^2 hinzugefügt werden.

Wir zeigen nun zunächst, dass unter der angegebenen Voraussetzung — wenn nämlich wenigstens eine der Grössen $\mathfrak{X}_k$ von Null verschieden ist — aus den Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ auch umgekehrt wieder die Strahlencoordinaten erster Stufe $\mathfrak{X}_{ik}$ *eindeutig*, und zwar durch *rationale* Operationen bestimmt werden können — abgesehen selbstverständlich von der ihnen anhaftenden natürlichen Unbestimmtheit.

Wir wählen drei Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ so, dass

$$(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{X}_3 \neq 0 \tag{10}$$

wird, und im Uebrigen beliebig. Nehmen wir dann z. B. an, dass $\mathfrak{X}_1 \neq 0$ ist, so ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{22} &= \quad \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{23} \qquad * \quad - \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{12}, \\ \mathfrak{X}_{33} &= -\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{31} \qquad * \quad , \\ 0 &= \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{X}_{12}, \end{aligned}$$

und aus (7), (8) das folgende Werthsystem der Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_1, \quad (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})\mathfrak{X}_{23} = -\mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_{33} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{X}_{22}, \\ &\mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_2, \quad (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})\mathfrak{X}_{31} = -\mathfrak{A}_3\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_{33}, \\ &\mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{X}_3, \quad (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})\mathfrak{X}_{12} = -\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_{11}. \end{aligned} \tag{11}$$

Die so berechneten Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ haben gerade die erforderte Art von Unbestimmtheit — sie enthalten nur scheinbar zwei, in Wirklichkeit nur einen wesentlichen Parameter — und die Symmetrie ihrer Ausdrücke zeigt überdies, dass die Voraussetzung $\mathfrak{X}_1 \neq 0$ ohne Aenderung des Ergebnisses durch eine der anderen $\mathfrak{X}_2 \neq 0$, $\mathfrak{X}_3 \neq 0$ ersetzt werden darf.

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass es möglich ist, die durch die Identität (8) verknüpften Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ als *im Uebrigen*

unabhängige Veränderliche aufzufassen. Daraus ergiebt sich aber sogleich die Erklärung eines Continuums, das wir *regulär* nennen und als *das erste natürliche Strahlencontinuum* bezeichnen*). Es muss möglich sein, auch noch die bisher ausgeschlossenen Werthsysteme, die der Bedingung

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 = 0 \tag{12}$$

genügen, in irgend einem Sinne als Coordinaten eines „Strahls" aufzufassen: „Stetige" Ortsänderungen in diesem Strahlencontinuum werden dann zu definiren sein durch stetige Aenderungen der Grössen $\mathfrak{x}_k$, $\mathfrak{x}_{kk}$, unter Ausschluss unbegrenzter Annäherung an das einzige Werthsystem 0, 0, 0, 0, 0, 0. Es handelt sich also nur noch darum, den Begriff des „eigentlichen Strahls" so zu erweitern, dass die Gleichungen (12) einen geometrischen Sinn erhalten. Wir drücken zu diesem Zweck *die Bedingung für das rechtwinklige Schneiden zweier eigentlicher Strahlen X, U* in den neuen Coordinaten aus.

Führen wir die *auch weiterhin vielfach zu benutzenden* Abkürzungen ein

$$(\mathfrak{x}\,|\,\underline{\mathfrak{z}}) = \mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_{11} + \mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_{22} + \mathfrak{x}_3\mathfrak{z}_{33}, \quad (\mathfrak{u}\mathfrak{v}\,\underline{\mathfrak{z}}) = |\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_2\mathfrak{z}_{33}|, \tag{13}$$

und wählen wir ein neues System von drei Hülfsgrössen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gemäss der Ungleichung

$$(\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{u}) = \mathfrak{P}_1\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{P}_2\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{P}_3\mathfrak{u}_3 \neq 0, \tag{10}$$

so finden sich die Gleichungen

$$(\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{x}) = 0, \tag{14}$$

$$(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{x})(\mathfrak{P}\mathfrak{x}\underline{\mathfrak{u}}) + (\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{u})(\mathfrak{A}\mathfrak{u}\underline{\mathfrak{x}}) = 0, \tag{15}$$

die bestehen müssen für alle Werthsysteme der Grössen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{P}_k$, gleichwohl aber zusammen nicht zehn, sondern, nach der in solchen Fällen üblichen Ausdrucksweise, nur *zwei* Bedingungen für die gegenseitige Lage der beiden Strahlen *X*, *U* bedeuten.

Die Gleichungen (14) *und* (15) *stellen also das Normalennetz eines eigentlichen Strahls X dar, soweit es von eigentlichen Strahlen U gebildet wird. Diese Gleichungen behalten aber auch dann noch einen geometri-*

*) Es dürfte sich vielleicht empfehlen, „regulär" ein Continuum zu nennen, das eindeutig umkehrbar und stetig auf ein abgeschlossenes Punktcontinuum abgebildet werden kann, das im projectiven Punktcontinuum verläuft. — Das im Texte behandelte Continuum hat noch eine Reihe weiterer besonderer Eigenschaften. Wir kommen darauf noch zurück.

schen Sinn, wenn im Grenzfall die Gleichungen (12) *stattfinden.* Sie reduciren sich nämlich dann auf die Gleichungen

$$(16) \qquad \mathfrak{U}_1 : \mathfrak{U}_2 : \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{X}_{11} : \mathfrak{X}_{22} : \mathfrak{X}_{33},$$

die aussagen, dass der eigentliche Strahl U einem bestimmten Parallelenbündel angehört. Die Gleichungen (14, 15) werden ausserdem — was wohl zu beachten ist — dadurch befriedigt, dass man $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_3 = 0$ setzt.

So werden wir dahin geführt, die Figur der eigentlichen Strahlen eines Parallenbündels als Grenzfall der Figur der eigentlichen Strahlen im Normalennetz eines eigentlichen Strahls anzusehen. Wir schöpfen aus dieser auch geometrisch evidenten Möglichkeit die Berechtigung, auch das Parallelenbündel als Bestandtheil des „Normalennetzes eines Strahles" aufzufassen. Hiermit brauchen wir natürlich das Wort Strahl selbst in einem neuen und erweiterten Sinne; ähnlich wie man beim Aufbau der projectiven Geometrie dem Worte Punkt eine neue Bedeutung beilegt, wenn man von dem Parallelenbündel als dem System aller Geraden spricht, die durch einen „Punkt" gehen. Wir wollen für die neu einzuführende Art „uneigentlicher" Raumelemente, im Interesse der Klarheit der Darstellung, auch ein neues Wort gebrauchen: wir nennen sie *Punktstrahlen.*

Es giebt also ∞^2 *Punktstrahlen, und jeder von ihnen entspricht einem Parallelenbündel, und ist durch dieses Bündel erklärt. Jeder wird eindeutig dargestellt durch ein System von homogenen Coordinaten* $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$, *die den Gleichungen* (12) *genügen.*

Diese „Punktstrahlen" verhalten sich, wie ihre natürlich invariante Beziehung zu den sie definirenden Parallelenbündeln zeigt (und wie auch die weiterhin aufzustellenden Formeln erkennen lassen), gegenüber radialen Collineationen nicht anders als die „Punkte" der unendlich fernen Ebene gegenüber gewöhnlichen Collineationen in dieser Ebene. Man kann daher mit beiden Worten denselben Begriff (dieselbe Vorstellung des Parallelenbündels) verbinden, und geradezu eine Gleichsetzung vornehmen:

Punktstrahl = unendlich ferner Punkt.

Man kann sich, wenn man will, die Vorstellung bilden, dass ein Strahl, der etwa in einem Parallelenbüschel ins Unendliche rückt, im Grenzfall zu einem Punkt zuammenschrumpft: Wenn ein eigentlicher Strahl eines Parallelenbüschels (ξ, φ), betrachtet als Hauptaxe des durch ihn definirten Normalennetzes, ins Unendliche rückt, tritt an seine Stelle ein uneigentlicher Punkt η, der Scheitel eines bestimmten

Parallelenbündels, das Grenzlage (genauer, wie wir sehen werden, Bestandtheil der Grenzlage) aller jener Normalennetze ist (Fig. 41). Aber wir werden in unserem Zusammenhang die Terminologie nach einer anderen Richtung hin auszubilden haben, als in der projectiven Geometrie, und darum brauchen wir statt des Wortes Punkt ein anderes Wort.

Nachdem nunmehr der für alles Folgende grundlegende Begriff des Punktstrahls gebildet ist, können wir die Gleichungen (14), (15) in weiterem Umfang geometrisch deuten, als bisher: Wir können in diesen Gleichungen von vorn herein auch Punktstrahlen X, U statt eigentlicher Strahlen zulassen. Wir erkennen dann, dass dem Normalennetz eines *eigentlichen* Strahls U ein einziger völlig bestimmter Punktstrahl X zugerechnet werden muss, der erklärt ist durch die Gleichungen (12), (16). Dieser Punktstrahl gehört dann auch sämmtlichen Parallelenbüscheln an, die in dem Normalennetz enthalten sind. Jedes Parallelenbüschel enthält *einen* Punktstrahl. Einem Parallelenbündel aber werden ∞^1 Punktstrahlen zugerechnet werden müssen, deren Ort in der unendlich fernen Ebene ein *uneigentlicher Strahl* (oder eine uneigentliche Gerade) ist. Ferner ergiebt sich, wenn man das Normalennetz eines eigentlichen Strahls betrachtet, und diesen Strahl — etwa in einem Parallelenbüschel — in einen Punktstrahl übergehen lässt:

Als Normalennetz eines Punktstrahls ist eine reducibele Figur zu betrachten, deren Bestandtheile erstens die Gesammtheit aller eigentlichen und Punktstrahlen eines Parallelenbündels, zweitens das Feld aller Punktstrahlen sind.

Als wesentlichstes Ergebniss der vorausgehenden Ueberlegungen heben wir nunmehr hervor:

Die Gesammtheit der ∞^4 eigentlichen und der ∞^2 Punktstrahlen bildet ein abgeschlossenes Continuum. Die Elemente dieses „ersten natürlichen Strahlencontinuums“ werden eindeutig dargestellt durch die Strahlencoordinaten zweiter Art, und „stetige“ Ortsänderungen im Continuum sind erklärt durch stetige Aenderungen dieser Coordinaten.

Aus dem Vorgetragenen ergiebt sich nunmehr die Nothwendigkeit, oder zum Mindesten die Zweckmässigkeit, einer Anzahl weiterer Definitionen, die wir kurz zusammenstellen.

Ein eigentlicher Strahl U und ein Punktstrahl X „schneiden einander rechtwinklig“, wenn der eigentliche Strahl zu dem den Punktstrahl definirenden Parallelenbündel gehört.

Die analytische Bedingung hierfür ist, dass die Coordinaten (zweiter Art) beider Strahlen den Gleichungen (16) genügen.

Je zwei Punktstrahlen sind zu einander orthogonal, oder schneiden sich rechtwinklig.

D. h., jeder gehört zu dem Normalennetz des anderen. Das Normalennetz eines Punktstrahls ist aber, wie gesagt, reducibel, und der nicht von lauter Punktstrahlen gebildete Bestandtheil enthält ebenfalls noch ∞^1 Punktstrahlen. Gehört ein zweiter Punktstrahl zu diesen, so findet die Beziehung der Orthogonalität zwischen beiden gewissermassen in einem höheren Grade statt:

Wir werden sagen, zwei Punktstrahlen U, X seien zu einander doppelt-orthogonal, wenn der eine dem Parallelenbündel angehört, dessen eigentliche Strahlen den anderen rechtwinklig schneiden.

Die analytische Bedingung hierfür ist das Bestehen der Gleichung

$$(17) \qquad (\underline{\mathfrak{U}} \,|\, \underline{\mathfrak{X}}) = \mathfrak{U}_{11}\mathfrak{x}_{11} + \mathfrak{U}_{22}\mathfrak{x}_{22} + \mathfrak{U}_{33}\mathfrak{x}_{33} = 0.$$

Ein eigentlicher Strahl X und ein Punktstrahl Y heissen parallel, wenn der Punktstrahl in dem Parallelenbündel liegt, das durch den eigentlichen Strahl bestimmt wird.

Die analytische Bedingung hierfür ist:

$$(18) \qquad (\mathfrak{X} \,|\, \underline{\mathfrak{Y}}) = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_{33} = 0.$$

Der Punktstrahl ist dann doppelt-orthogonal zu dem Punktstrahl U, zu dem der eigentliche Strahl orthogonal ist.

Je zwei Punktstrahlen heissen zu einander parallel.

Der Satz „zwei Strahlen sind zu einander parallel, wenn sie zu einem und demselben dritten Strahl parallel sind“ ist daher nur unter den Einschränkungen richtig, die sich aus dem Vorhergehenden ergeben.

Ferner werden wir nunmehr auch unser Strahlencontinuum doppelt überdecken; wir brauchen aber, um Verwechselungen nicht vollkommen identischer Begriffe wirksam vorzubeugen, nicht das bisherige Wort „Schicht“, sondern nunmehr das in der Theorie der Riemann'schen Flächen gebräuchliche *„Blatt“*. Beide Blätter des erklärten Strahlencontinuums unterscheiden sich, ähnlich wie die zuvor betrachteten Schichten, durch ihr Verhalten gegenüber radialen Collineationen. Diese selbst sind zunächst nur erklärt für eigentliche Strahlen. *Wir setzen aber fest, dass dieselben Formeln auch für Punktstrahlen gelten sollen.* Eigentliche oder Punktstrahlen $X, Y, Z, \ldots$ *des ersten Blattes* werden dann durch eine radiale Collineation wie folgt unter einander vertauscht (vgl. § 26, Nr. 5, S. 237):

(19)

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1' &= a_{11}\mathfrak{X}_1 + a_{12}\mathfrak{X}_2 + a_{13}\mathfrak{X}_3, \\ \mathfrak{X}_2' &= a_{21}\mathfrak{X}_1 + a_{22}\mathfrak{X}_3 + a_{23}\mathfrak{X}_3, \\ \mathfrak{X}_3' &= a_{31}\mathfrak{X}_1 + a_{32}\mathfrak{X}_2 + a_{33}\mathfrak{X}_3, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{X}_{11}' = \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^j \begin{vmatrix} a_{2i} & a_{3i} \\ a_{2j} & a_{3j} \end{vmatrix} \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_j + k \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{11} & \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

u. s. w. $\qquad \{k \neq 0, \quad |a_{11}a_{22}a_{33}| \neq 0\}.$

Entsprechende Gleichungen, auf deren Anführung wir vorläufig verzichten können, ergeben sich für Strahlen *U, V, W* des zweiten Blattes. — Die Gleichungen (19) ändern, wie vorauszusehen, ihre Form nicht, wenn man die Matrix $\| \alpha_{ik} \|$ um irgend ein Vielfaches der Matrix $\| a_{ik} \|$ vermehrt. — Die radialen Collineationen sind hiernach im ersten natürlichen Strahlencontinuum überall *wohldefinirt, eindeutig* und *stetig.*

Wir wollen von mehreren Strahlen des ersten Blattes, die gleichzeitig derselben radialen Collineation unterworfen werden, sagen, sie werden *concordant* transformirt. Die entsprechenden Transformationen für Strahlen *U, V, W, ...* des zweiten Blattes bezeichnen wir dann als im Vergleich zu den erstgenannten *discordant.* Behalten wir im Sinn, dass Strahlen desselben Blattes stets concordant, Strahlen verschiedener Blätter discordant transformirt werden sollen, so können wir nunmehr den Satz aussprechen:

Radiale Projectivitäten lassen invariant rechtwinkliges Schneiden (sowie doppelte Orthogonalität) von (eigentlichen oder Punkt-)Strahlen verschiedener Blätter, und Parallelismus von Strahlen desselben Blattes.

Dies sind im Wesentlichen dieselben Eigenschaften, die wir bereits im vorigen Paragraphen (S. 231, Nr. 1...8) aufgeführt hatten. Unsere jetzige Formulirung zeigt aber, im Vergleich zu der früheren, eine nicht unbedeutende Vereinfachung.

Beziehungen zwischen dem irregulären und dem ersten natürlichen Continuum.

Es ist nunmehr begrifflich evident, und überdies aus den Gleichungen (19), und den Gleichungen (5) des § 26 leicht abzulesen, dass zwischen den betrachteten beiden Arten von Continuität im Strahlenraume einfache Beziehungen bestehen.

Soweit nur eigentliche Strahlen in Frage kommen, sind die Begriffe Schicht und Blatt, ferner Cogredienz und Concordanz, Contragredienz und Discordanz identisch, und ebenso besteht kein Unterschied zwischen den beiden Continuitätsbegriffen.

Diese Continuitätsbegriffe sind in der Umgebung eines eigentlichen (reellen) Strahls überdies identisch mit dem der elementaren analytischen Geometrie, und also auch mit dem der Plücker'schen Liniengeometrie.

Dies ändert sich jedoch, sobald man den Bereich der eigentlichen Strahlen verlässt.

Die uneigentlichen Strahlen der ersten (zweiten) Schicht werden von den radialen Collineationen ebenso — d. h. durch genau dieselben Formeln — unter einander vertauscht, wie die Punktstrahlen des zweiten (ersten) Blattes.

Man kann daher zwischen den uneigentlichen Strahlen und den Punktstrahlen eine gegenseitig-eindeutige Zuordnung herstellen,

$$(20)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_{23} : \mathfrak{x}_{31} : \mathfrak{x}_{12} &= \mathfrak{U}_{11} : \mathfrak{U}_{22} : \mathfrak{U}_{33}, \\ \mathfrak{V}_{23} : \mathfrak{V}_{31} : \mathfrak{V}_{12} &= \mathfrak{y}_{11} : \mathfrak{y}_{22} : \mathfrak{y}_{33}, \end{aligned}$$

die nicht zerstört wird durch beliebige radiale Projectivitäten.

Bei irgend einer radialen Collineation werden die uneigentlichen Strahlen $\mathfrak{x}$ der ersten Schicht und die Punktstrahlen $\mathfrak{U}$ des zweiten Blattes vertauscht durch die Transformation:

$$\mathfrak{x}'_{23} = a_{11}\mathfrak{x}_{23} + a_{12}\mathfrak{x}_{31} + a_{13}\mathfrak{x}_{12}, \quad \mathfrak{U}'_{11} = a_{11}\mathfrak{U}_{11} + a_{12}\mathfrak{U}_{22} + a_{13}\mathfrak{U}_{33},$$

u. s. f., ebenso die uneigentlichen Strahlen $\mathfrak{V}$ der zweiten Schicht und die Punktstrahlen $\mathfrak{y}$ des ersten Blattes durch die — im gewöhnlichen Sinne der Theorie der ternären Formen zu jener contragrediente — Transformation:

$$\mathfrak{V}'_{23} = b_{11}\mathfrak{V}_{23} + b_{12}\mathfrak{V}_{31} + b_{13}\mathfrak{V}_{12}, \quad \mathfrak{y}'_{11} = b_{11}\mathfrak{y}_{11} + b_{12}\mathfrak{y}_{22} + b_{13}\mathfrak{y}_{33},$$

u. s. w.

Zwischen den Begriffen uneigentlicher Strahl und Punktstrahl besteht daher ein wesentlicher Unterschied, ein solcher, der auch in den Formeln (anders als durch doppelte Bezeichnung derselben Grössen) zum Ausdruck gebracht werden könnte, überhaupt nicht.

Wir hätten den Begriff „Punktstrahl" auch ganz entbehren können. Wir hätten dann z. B. statt der bereits besprochenen Anschauung, wonach aus den eigentlichen Strahlen eines Parallelenbüschels (φ, ξ) des ersten Blattes durch Grenzübergang ein Punktstrahl oder „unendlich ferner Punkt" η entsteht (Fig. 41), uns eine andere bilden müssen, die so beschrieben werden kann: „Beim Uebergang von eigentlichen Strahlen eines Parallelenbüschels erster Schicht zu uneigentlichen Strahlen findet, im ersten natür-

lichen Continuum', zugleich ein Uebergang zur *zweiten* Schicht statt. Als „Grenzlage" der Strahlen des Büschels ist anzusehen *der* eigentliche Strahl H (Fig. 41), der zum unendlich fernen Scheitel η des orthogonalen Büschels (φ, η) absolute Polare ist." Ein derartiges Verfahren ist möglich, und es lässt sich folgerecht durchführen. Man kommt aber von da aus zu einer Terminologie, die sehr leicht Missverständnisse erzeugen kann. Aus diesem Grunde (*unter anderen*) halten wir in der Ausdrucksweise auch ferner an der Unterscheidung zwischen Punktstrahlen und uneigentlichen Strahlen fest, heben aber ausdrücklich hervor, dass diese Unterscheidung, vom Standpunkte der Algebra betrachtet, auch *nur* die Terminologie betrifft, und also *formaler* Natur ist. *Principiell verschieden* ist dagegen die Art, wie in beiden zuvor betrachteten Begriffssystemen die Strahlenmannigfaltigkeit als Continuum aufgefasst wird. Man kann daher der von den eigentlichen und uneigentlichen (*oder* Punkt-)Strahlen gebildeten Mannigfaltigkeit eine *doppelte Continuität* zuschreiben, die nicht zerstört wird durch rationale Collineationen.

Sagen wir, ein uneigentlicher Strahl X der ersten Schicht und ein Punktstrahl Y des *ersten* Blattes befinden sich *in vereinigter Lage*, wenn die Relation

$$\mathfrak{x}_{23}\mathfrak{y}_{11} + \mathfrak{x}_{31}\mathfrak{y}_{22} + \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{y}_{33} = 0 \tag{21}$$

besteht, so kann das gegenseitige Verhältniss der beiden Strahlencontinua durch folgenden Satz weiter erläutert werden:

Man ordne jedem eigentlichen Strahl des ersten (zweiten) Blattes des ersten natürlichen Strahlencontinuums den mit ihm identischen Strahl der ersten (zweiten) Schicht des irregulären Strahlencontinuums zu, ferner jedem Punktstrahl des ersten (zweiten) Blattes die ∞^1 uneigentlichen Strahlen der ersten (zweiten) Schicht, die mit ihm vereinigt liegen, und umgekehrt. Ist dann ein Punktstrahl Grenzlage von ∞^1 eigentlichen Strahlen, die eine analytische Mannigfaltigkeit bilden (und zwar Grenzlage im Inneren von deren Existenzbereich) im ersten natürlichen Strahlencontinuum, so ist jeder der zugeordneten uneigentlichen Strahlen Grenzlage derselben ∞^1 eigentlichen Strahlen im irregulären Strahlencontinuum.

Da die uneigentlichen Strahlen der *ersten* Schicht sich gegenüber radialen Projectivitäten ebenso verhalten, wie die Punktstrahlen des *zweiten* Blattes (von denen sie, wie gesagt, nicht wesentlich verschieden sind) und also contragredient — im gewöhnlichen Sinne der ebenen projectiven Geometrie — transformirt werden zu den Punktstrahlen des *ersten* Blattes, so bleibt die im Satze genannte Beziehung erhalten bei radialen Projectivitäten.

Im Zusammenhang hiermit wollen wir noch auf eine Eigenthümlichkeit des angewendeten Systems von Bezeichnungen aufmerksam machen, die sich aus der doppelten Continuität der Strahlenmannigfaltigkeit ergiebt.

Wir hatten, um die beiden Schichten des irregulären Strahlencontinuums auseinanderzuhalten, Strahlen der ersten Schicht durch Zeichen $X, Y, Z, \ldots$, solche der zweiten Schicht durch Zeichen $U, V, W, \ldots$ dargestellt. Ebenso hatten wir, im ersten natürlichen Continuum, die beiden Blätter unterschieden. Beide Arten der Bezeichnung lassen sich, jede für sich, folgerecht durchführen; wo aber beide Continua neben einander betrachtet werden, da kommen sie mit einander in Collision, insofern uneigentliche Strahlen der *ersten* Schicht ebenso zu bezeichnen sind, wie die von ihnen nicht wesentlich verschiedenen Punktstrahlen des *zweiten* Blattes, und umgekehrt. Wir haben eben aus diesem Grunde neben der Bezeichnung „Contragredienz" noch die zweite „Concordanz" eingeführt. Beide Begriffe decken sich in weitem Umfang, *aber nicht vollständig.*

Das zweite reguläre und natürliche Strahlencontinuum.

Lassen wir einen Strahl des zweiten Blattes in einem bestimmten Parallelenbüschel ins Unendliche rücken, so erhalten wir einen Punktstrahl, zu dessen Normalennetz, ausser dem Feld aller Punktstrahlen, ein Parallelenbündel gehört. In diesem Bündel von Parallelen des ersten Blattes nun lässt der angewendete Process eine bestimmte Structur zurück: Das Bündel ist, wie wir sagen wollen, *gestreift;* das Parallelenbündel erscheint als Grenzfall eines Normalennetzes, dessen Strahlen ja auf ∞^1 Parallelenbüschel vertheilt sind, und es hat seine Strahlen ebenfalls noch auf ∞^1 solche Büschel vertheilt, die in parallelen Ebenen liegen.

Diese Bemerkung weist darauf hin, dass es möglich ist, die Mannigfaltigkeit der ∞^4 eigentlichen Strahlen noch auf andere Art als bisher geschehen, durch Einführung „uneigentlicher" Elemente in zweckmässiger Weise zu einem abgeschlossenen Continuum zu ergänzen. Es ist möglich, auch *die gestreiften Parallelenbündel,* deren es ∞^3 verschiedene giebt, neben den Normalennetzen eigentlicher Strahlen als Raumelemente einzuführen, und in einem uneigentlichen Sinne von „Strahlen" zu reden, denen sie zugeordnet sind. Wir bezeichnen diese neue Art von Strahlen mit einem neuen Wort; wir nennen sie *Grenzstrahlen.*

Die Reihe von Begriffsbildungen, die hiermit eröffnet ist, werden wir nur kurz betrachten. Es scheint uns aber doch von principieller Bedeutung zu sein, wenigstens *die Möglichkeit* einer Ausgestaltung der Geometrie der radial-projectiven Transformationen klar zu erkennen, die in wesentlichen Punkten verschieden ist von der auf die Theorie des ersten regulären Strahlencontinuums zu gründenden.

Wir werden nachweisen, dass die Mannigfaltigkeit der ∞^4 Normalennetze eigentlicher Strahlen und der ∞^3 gestreiften Parallelenbündel,

oder, wie wir sagen, der Inbegriff der ∞^4 eigentlichen Strahlen und der ∞^3 Grenzstrahlen, ebenfalls durch verschiedene Werthsysteme eines und desselben Systems von Coordinaten (Parametern) dargestellt werden kann. Wir werden sodann „stetige" Ortsänderungen in dieser Mannigfaltigkeit durch stetige Aenderungen der neuen Coordinaten erklären.

Unter allen ∞^1 uneigentlichen Strahlen, die im irregulären Strahlencontinuum beim Uebergang von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen auf einer analytischen Mannigfaltigkeit sich ergeben (vgl. Nr. 2, 5), ist, wie wir schon bemerkt haben, ein einzelner Strahl

$$(22) \qquad \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12} = a_0 : b_0 : c_0$$

dadurch ausgezeichnet, dass er zu den eigentlichen Strahlen der Mannigfaltigkeit in einer Beziehung steht, die durch *cogrediente* radiale Projectivitäten nicht zerstört werden kann (S. 256, 257).

Führen wir den entsprechenden Grenzübergang im ersten natürlichen Strahlencontinuum aus, setzen wir in den im Allgemeinen mit (2) äquivalenten Gleichungen

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \sqrt{(t-t_0)^\lambda}\,\{a_0 + \cdots\}, & \mathfrak{X}_{11} &= (b_0\gamma_0 - c_0\beta_0) + \cdots, \\ \mathfrak{X}_2 &= \sqrt{(t-t_0)^\lambda}\,\{b_0 + \cdots\}, & \mathfrak{X}_{22} &= (c_0\alpha_0 - a_0\gamma_0) + \cdots, \\ \mathfrak{X}_3 &= \sqrt{(t-t_0)^\lambda}\,\{c_0 + \cdots\}, & \mathfrak{X}_{33} &= (a_0\beta_0 - b_0\alpha_0) + \cdots, \end{aligned}$$

$t = t_0$, so ergiebt sich unter der Voraussetzung (4) ein bestimmter Punktstrahl mit den Coordinaten zweiter Art $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = 0$, und

$$(24) \qquad \mathfrak{X}_{11} : \mathfrak{X}_{22} : \mathfrak{X}_{33} = \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ \gamma_0 & \alpha_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{vmatrix},$$

dessen Beziehung zu den eigentlichen Strahlen der Mannigfaltigkeit nicht zerstört wird durch *concordante* radiale Projectivitäten.

Beide Strahlen (22) und (24) liegen vereinigt; sie können daher als ein in der unendlich fernen Ebene gelegenes *Linienelement* aufgefasst werden, als die Figur einer unendlich fernen Geraden und eines auf dieser gelegenen unendlich fernen Punktes. Dasselbe Linienelement würde sich auch schon ergeben haben, wenn wir die beiden Arten des Grenzübergangs insbesondere in einem Parallelenbüschel ausgeführt hätten, nämlich in den Formeln (6) und in den zugehörigen Gleichungen

$$(25) \qquad \mathfrak{X}_1 = \sqrt{t-t_0}\cdot a_0, \qquad \mathfrak{X}_{11} = \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{vmatrix} + (t-t_0)\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix},$$

u. s. w.

Die Lage des gefundenen Linienelements ändert sich nun nicht, wenn wir an Stelle der Grössen α_0, β_0, γ_0 irgend welche zu ihnen proportionale Grössen einführen, und ausserdem die Werthe α_1, β_1, γ_1 durch irgend welche andere Werthe ersetzen. Diese Operation aber hat, wie leicht zu erkennen, die Wirkung, dass an Stelle des Büschels (6) oder (25) irgend ein anderes Büschel tritt, das demselben Bündel angehört, *und überdies in einer Ebene liegt, die zur Ebene des ersten Büschels parallel ist.* Die beiden Systeme von Verhältnissgrössen (22) und (24) bestimmen also zusammen das *gestreifte* Parallelenbündel, d. h. den Grenzstrahl. Die Mannigfaltigkeit der ∞^3 Grenzstrahlen ist daher, wie geometrisch von vorn herein deutlich, eindeutig-umkehrbar zugeordnet der Mannigfaltigkeit der ∞^3 Linienelemente in der unendlich fernen Ebene.

Man kann nun, auf mannigfache Art, Systeme von Coordinaten angeben, die die eigentlichen und die Grenzstrahlen zusammen darstellen. Ein solches System lässt sich, wie wir zeigen werden, aus den Grössen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, zusammen mit den folgenden neun Producten ableiten:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{x}_{111} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_{11}, \quad \mathfrak{x}_{122} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_{22}, \quad \mathfrak{x}_{133} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_{33}, \\
&\mathfrak{x}_{211} = \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_{11}, \quad \mathfrak{x}_{222} = \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_{22}, \quad \mathfrak{x}_{233} = \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_{33}, \\
&\mathfrak{x}_{311} = \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_{11}, \quad \mathfrak{x}_{322} = \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_{22}, \quad \mathfrak{x}_{333} = \mathfrak{x}_3 \cdot \mathfrak{x}_{33}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Die genannten zwölf Grössen sind verbunden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_{111} + \mathfrak{x}_{222} + \mathfrak{x}_{333} = 0, \tag{27}$$

$$\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_{\beta\gamma\gamma} - \mathfrak{x}_\beta \mathfrak{x}_{\alpha\gamma\gamma} = 0, \tag{28}$$

$$\mathfrak{x}_{\alpha\gamma\gamma} \mathfrak{x}_{\beta\delta\delta} - \mathfrak{x}_{\beta\gamma\gamma} \mathfrak{x}_{\alpha\delta\delta} = 0. \tag{29}$$

Sie sind *homogen* in dem Sinne, dass alle Systeme solcher Coordinaten als äquivalent gelten, die durch Multiplication von $\mathfrak{x}_\alpha$ und $\mathfrak{x}_{\beta\gamma\gamma}$ etc. mit Factoren ϱ, ϱ^3 $(\varrho \neq 0)$ auseinander hervorgehen.

Offenbar kann man, wenn die neuen Coordinaten gegeben sind, d. h. wenn *irgend* ein System von Grössen vorliegt, das den Gleichungen (27)...(29) genügt, vermöge (26) immer die Strahlencoordinaten zweiter und erster Art eindeutig bestimmen, sobald nur eine der drei Grössen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ von Null verschieden ist. *Das System der Gleichungen* (27)...(29) *umfasst aber auch noch den hiermit ausgeschlossenen Fall:* Die Grössen $\mathfrak{x}_{\alpha\beta\beta}$ können dann unmittelbar als Coordinaten eines Linienelementes in der unendlich fernen Ebene, oder eines gestreiften Parallelenbündels, oder endlich eines Grenzstrahls angesehen werden.

Hiermit haben wir die Erklärung dessen, was wir als *zweites natürliches Strahlencontinuum* bezeichnen.

Wir sagen, dass ein Strahl *in diesem Continuum* seine Lage „*stetig*" ändert, wenn die erklärten Coordinaten gemäss den Bedingungen (27) .. (29), ihre Werthe stetig ändern, unter Ausschluss unbegrenzter Annäherung an das eine Werthsystem $\mathfrak{X}_\alpha = 0$, $\mathfrak{X}_{\beta\gamma\gamma} = 0$. Auch in diesem Continuum, das ebenfalls doppelt überdeckt werden kann, sind dann die radialen Projectivitäten überall *wohldefinirt, eindeutig und stetig.*

Erwähnt sei noch, dass auch im zweiten natürlichen Continuum beim Uebergang von einem eigentlichen zu einem Grenzstrahl das Normalennetz des eigentlichen Strahls nicht einfach in ein Parallelenbündel übergeht, sondern dass ein *Zerfallen* der Figur eintritt, so dass also auch das Normalennetz eines Grenzstrahls aus zwei irreducibelen Bestandtheilen sich zusammensetzt: Aus einem Parallelenbündel und aus einer zweiten lediglich von Grenzstrahlen gebildeten Figur. —

Das angeführte System von Coordinaten einer Stelle des zweiten natürlichen Strahlencontinuums ist nützlich zur Vorbereitung einer weiterhin anzustellenden Betrachtung. Man kann aber die eigentlichen und Grenzstrahlen zusammen noch auf eine einfachere Art analytisch darstellen. Wir bezeichnen zu diesem Zweck die Grössen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ anders, indem wir sie nämlich als Producte der Form $\Xi\mathfrak{X}_1$, $\Xi\mathfrak{X}_2$, $\Xi\mathfrak{X}_3$ schreiben, und nun die durch die Gleichung $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0$ verbundenen Grössen

$$\Xi,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ \mathfrak{X}_3,\ \mathfrak{X}_{11},\ \mathfrak{X}_{22},\ \mathfrak{X}_{33} \tag{30}$$

als überzählige Strahlencoordinaten betrachten. Einen und denselben Strahl stellen dann Coordinaten dar, die aus denen Nr. (30) durch Multiplication mit Factoren

$$\varrho^0,\ \varrho^1,\ \varrho^1,\ \varrho^1,\ \varrho^2,\ \varrho^2,\ \varrho^2$$

oder mit Factoren

$$\varrho^{-1},\ \varrho^1,\ \varrho^1,\ \varrho^1,\ \varrho^0,\ \varrho^0,\ \varrho^0$$

hervorgehen. *Auszunehmen* von der Veränderlichkeit der Grössen Ξ, $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ ist jetzt das Werthsystem $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = 0$.

Durch diese *Coordinaten dritter Art* Nr. (30) wird dann jeder Strahl des zweiten natürlichen Continuums dargestellt; den Werthsystemen der Form

$$0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ \mathfrak{X}_3,\ \mathfrak{X}_{11},\ \mathfrak{X}_{22},\ \mathfrak{X}_{33}, \tag{33}$$

die mit der Relation $(\mathfrak{X} \mid \underline{\mathfrak{X}}) = 0$ verträglich sind, entsprechen die Grenzstrahlen. Stetige Lagenänderung eines Strahls im zweiten regulären

Continuum wird ausgedrückt oder kann ausgedrückt werden durch *stetige* Aenderung der Coordinaten dritter Art.

Wir werden uns fernerhin vielfach einer Methode bedienen, als deren eigentlichen Urheber man wohl Plücker bezeichnen darf, obgleich sie gelegentlich wohl schon früher angewendet worden ist. Der *Wechsel des Raumelementes*, in seiner Anwendung nicht nur auf die im engeren Sinne so genannte Geometrie, sondern auf die *Geometrie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten* überhaupt, hat sich in den Händen von S. Lie, und von anderen, neuerdings besonders *italienischen* Geometern, als ein ungemein fruchtbares Mittel geometrischer Forschung gezeigt, und auch für uns wird dieser Gedanke von Nutzen sein. Der Verfasser ist überhaupt durch solche Abbildungsmethoden zur Geometrie der radial-projectiven Transformationen gekommen. —

Wenn man von einer „Geometrie" im n-fach ausgedehnten Raume spricht, so meint man damit natürlich analytische Beziehungen. Es liegt aber kein Grund vor, die geometrische Terminologie nicht in solcher Ausdehnung anzuwenden; andernfalls müsste man eine neue erfinden, was für den dreifach ausgedehnten Raum eine Verdoppelung des terminologischen Apparates bedeuten würde. Durch die Erinnerung an geläufige Vorstellungen wird das Verständniss algebraischer Beziehungen ganz wesentlich erleichtert; wenigstens für den, der überhaupt genügende geometrische Kenntnisse hat. Sagt man, drei Punkte liegen in gerader Linie, so drückt man ausserdem das Wesentliche des zu Grunde liegenden algebraischen Gedankens klarer aus, als wenn man sagt: „Zwischen drei Werthsystemen von $n + 1$ homogenen Veränderlichen besteht eine lineare Gleichung." Denn auf die Werthe der Veränderlichen, die vom Coordinatensystem abhängen, und daher in mannigfacher Weise durch andere ersetzt werden können, kommt es in der Regel gar nicht an.

Ob man Betrachtungen dieser Art noch zur „Geometrie" rechnen will, oder nicht, daran ist sehr wenig gelegen. Wenn sie, wie in dem sogleich zu behandelnden Beispiel, zur Aufklärung eines sonst nicht leicht zu verstehenden Sachverhalts Wesentliches beitragen, so müssen sie angestellt werden. Dies ist jedenfalls die Ansicht hervorragender Geometer gewesen, deren Einige sich solcher Ueberlegungen bedient haben, ohne je ein Wort der Rechtfertigung für nöthig zu halten. Es giebt indessen namhafte Geometer, die, wenn wir recht verstehen, Betrachtungen dieser Art ablehnen wollen, sie jedenfalls zu vermeiden suchen. Die Gründe, die dafür geltend gemacht werden, scheinen uns nicht durchschlagend zu sein. „Anschaulichkeit", ein stark subjectives Moment, ist kein Kriterium für „geometrische" Untersuchungen, deren vielen dieses Merkmal beinahe völlig zu fehlen scheint. „Reinheit der Methode", d. h. die consequente Verfolgung logisch begrenzter Gedankenreihen, ist gewiss eine berechtigte Forderung, daneben aber steht die in noch höherem Grade erziehend wirkende Forderung, dass die mathematische Wissenschaft nicht zersplittert, sondern als ein Ganzes begriffen werde. Beide Forderungen lassen sich übrigens recht wohl vereinigen. Wenn es, wie hier, bei umfangreichen Aufgaben einem Einzelnen nicht gelingen mag, allen berechtigten Ansprüchen zu genügen, so kennt doch die Wissenschaft im Ganzen solche Schranken nicht.

Die in der Litteratur der mehrdimensionalen Geometrie häufigen banalen Verallgemeinerungen bekannter Sätze wünschen wir mit dem Gesagten natürlich nicht zu empfehlen.

Ein gruppentheoretisches Problem.

Dass die Raumelemente des ersten oder zweiten natürlichen Strahlencontinuums stetig auf Punktmannigfaltigkeiten M_4 abgebildet werden können, ist ohne Weiteres zu sehen. Um eine solche Abbildung des ersten Continuums zu erhalten, braucht man nur z. B. die sechs Producte zweiten Grades der Grössen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, und die drei Grössen $\mathfrak{X}_{kk}$ zusammen als homogene Punktcoordinaten in einem Gebiete neunter Stufe, einem „ebenen Raume“ (projectiven Punktcontinuum) von acht Dimensionen zu deuten. Beim zweiten Continuum benutzt man ebenso die zehn Producte dritten Grades der Grössen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ zusammen mit acht linear-unabhängigen der Grössen $\mathfrak{X}_{\alpha,\beta,\gamma}$. Wie die Gleichungen (19) sofort erkennen lassen, haben die beiden nachgewiesenen Abbildungen überdies noch eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft: Durch die Abbildungen selbst wird die Gruppe G_{17} der radialen Collineationen in je eine *projective* Gruppe übergeführt. Die beiden gefundenen Mannigfaltigkeiten M_4 im Raume von acht oder siebzehn Dimensionen haben also *zusammen*, vielleicht noch mit anderen, für die Geometrie der radial-projectiven Transformationen eine ganz ähnliche Bedeutung, wie die bekannte quadratische Mannigfaltigkeit eines Raumes von fünf Dimensionen für die Plücker'sche Liniengeometrie.

Hiermit ist der Weg gewiesen, auf dem wir an Stelle des bisherigen empirischen, ja möglicher Weise nicht erschöpfenden, Verfahrens zur Vervollständigung des Continuums der eigentlichen Strahlen einen systematischen Process eintreten lassen können. Wir stellen nunmehr folgende Aufgabe:

Es sollen alle vierfach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten M_4 *eines Gebietes* N^{ter} *Stufe gefunden werden, denen folgende beiden Eigenschaften zukommen:*

1) *Die Coordinaten eines Punktes allgemeiner Lage von* M_4 *sind rationale und (wie man ohne Beschränkung des Problems annehmen darf) ganze homogene Functionen der Coordinaten* $\mathfrak{X}_{ik}$ *oder* $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ *eines eigentlichen Strahls.*

2) *Durch die hiermit gegebene Abbildung wird die Gruppe* G_{16} *der dualen Collineationen in eine zu ihr holoëdrisch isomorphe projective Gruppe übergeführt.*

Da das Continuum der eigentlichen Strahlen nicht abgeschlossen ist, so muss jede Lösung M_4 dieses Problems (wenigstens) eine invariante

Mannigfaltigkeit niederer Dimension tragen: Man kommt so zu solchen Erweiterungen des Strahlencontinuums, die in gewissem Sinne *natürlich* sind, nämlich einen möglichst geringen Grad von Willkür enthalten.

Die Beschränkung auf *rationale* Mannigfaltigkeiten M_4 haben wir nur eintreten lassen, um weiterhin möglichst elementar zu Werke gehen zu können. Die Voraussetzung einer algebraischen, oder analytischen, oder auch einer reellen im Allgemeinen - stetigen Abbildung der zu suchenden M_4 auf die Strahlenmannigfaltigkeit führt *nicht* zu allgemeineren Ergebnissen. Auch braucht, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, nicht ausdrücklich gefordert zu werden, dass die Umkehrung der Abbildung der eigentlichen Strahlen auf Punkte von M_4 eindeutig sein soll.

Zur Lösung unserer Aufgabe bedürfen wir noch einer Hülfsbetrachtung, der übrigens auch ein selbstständiges Interesse und eine besondere Bedeutung im Rahmen unserer Theorie zukommt.

Classification der algebraischen Strahlencomplexe.

Ein analytischer Strahlencomplex, Ort von ∞^3 zunächst eigentlichen Strahlen, oder der Inbegriff mehrerer solcher Complexe, wird dargestellt durch eine gleich Null gesetzte analytische Function $\Phi(\mathfrak{X}_{ik})$ der Strahlencoordinaten erster Art, die der Euler'schen Homogeneitätsbedingung

$$\sum \mathfrak{X}_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_{ik}} = m \cdot \Phi \tag{30}$$

und der weiteren partiellen Differentialgleichung

$$\mathfrak{X}_{01} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_{23}} + \mathfrak{X}_{02} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_{31}} + \mathfrak{X}_{03} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_{12}} = 0 \tag{31}$$

genügt. Die letzte Gleichung sagt aus, dass die Strahlencoordinaten nur in den Verbindungen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ vorkommen, die wir als Strahlencoordinaten zweiter Art bezeichnet baben. Wir können setzen

$$\Phi(\mathfrak{X}_{ik}) = \Psi(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{kk}),$$

und erhalten dann an Stelle der Gleichung (30) die folgende:

$$\sum \left\{ \mathfrak{X}_k \frac{\partial \Psi}{\partial \mathfrak{X}_k} + 2\mathfrak{X}_{kk} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathfrak{X}_{kk}} \right\} = m \cdot \Psi, \tag{32}$$

die der besonderen Art von Homogenität der Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ entspricht, und unmittelbar ebenso begründet werden kann, wie die Euler'sche Gleichung (30).

Liegt umgekehrt eine Gleichung $\Psi = 0$ der vorausgesetzten Beschaffenheit vor, so wird sie, auch wenn (wie wir hier annehmen), ihre Coefficienten sämmtlich reell sind, nicht nothwendig durch ∞^3 reelle Strahlen befriedigt werden. Da sie aber dadurch identisch befriedigt werden kann, dass man die Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ oder vielmehr deren richtig gebildete Verhältnisse gleich analytischen Functionen dreier wesentlicher Parameter setzt, so werden wir gleichwohl sagen, sie definire einen *Strahlencomplex*, indem wir uns eine Erörterung darüber, welche Begriffe mit „imaginären Strahlen" zu verbinden sind, für später vorbehalten (§ 28).

Wir betrachten nun, unter vorläufiger Beschränkung auf das erste natürliche Strahlencontinuum, *algebraische* Strahlencomplexe, d. h. solche, deren Strahlen Coordinaten $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ haben, die als algebraische Functionen dreier wesentlicher Parameter dargestellt werden können. Von ihnen gilt der Satz:

*Jeder algebraische Strahlencomplex im ersten natürlichen Continuum kann rein dadurch dargestellt werden, dass man eine einzige ganze rationale und im erklärten Sinne homogene Function Ψ der Strahlencoordinaten zweiter Art $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ gleich Null setzt**).

Bei dem Beweise dieses grundlegenden Satzes genügt es anzunehmen, dass der betrachtete Complex *irreducibel* sei, d. h., dass man, bei stetiger Aenderung der drei — als complex-veränderlich zu betrachtenden — Parameter des Complexstrahls durch analytische Fortsetzung (und eventuell Parameterwechsel) von den Coordinaten eines jeden Complexstrahls zu denen eines jeden anderen kommen kann.

Kann man, durch Elimination der genannten Parameter, eine Gleichung der besonderen Form $\Psi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3) = 0$ gewinnen, so ist der zu beweisende Satz evident. Er reducirt sich nämlich auf den entsprechenden Satz über ebene algebraische Curven. Die Complexstrahlen lassen sich auf ∞^1 Parallelenbündel vertheilen; der Complex besteht aus allen Strahlen, die die Punktstrahlen (Punkte) einer in der unendlich fernen Ebene gelegenen Curve orthogonal schneiden (S. 262). — Ist die genannte Voraussetzung nicht erfüllt, so lassen

*) Im zweiten natürlichen Continuum gilt dann offenbar ein ganz ähnlicher Satz. Jeder irreducibele algebraische Complex, mit alleiniger Ausnahme des Complexes $\Xi = 0$, wird dargestellt durch eine Gleichung $\Psi(\Xi, \mathfrak{X}_k; \mathfrak{X}_{kk}) = 0$, deren linke Seite, eine ganze und rationale Function, nicht durch Ξ theilbar ist, und ihre Form nicht ändert bei den auf S. 270 angegebenen Substitutionen. Vgl. Leipz. Ber. 1891, S. 338—403, insbesondere § 8, wo ein vollkommen analoger Satz aufgestellt wird.

sich die ∞^3 eigentlichen Complexstrahlen auf ∞^2 Parallelenbündel vertheilen. Die umfassendste Annahme, die man — bei einem irreducibelen Complex — machen kann, ist dann die, dass in einem Parallelenbündel allgemeiner Lage λ verschiedene irreducibele Cylinder eines und desselben Grades ν_λ vorhanden sind, die dem Complex angehören, und deren jeder mit jedem dadurch vertauscht werden kann, dass man das Parallenbündel $(\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_3 : \mathfrak{X}_3)$, oder den ihm zugeordneten unendlich fernen Punkt, einen geeignet gewählten geschlossenen Weg durchlaufen lässt.

Ein Cylinder von gegebener Richtung der Erzeugenden und vom Grade ν kann nun, wie unschwer zu erkennen, stets — in mannigfacher Weise — dargestellt werden durch die Zusammenstellung der Gleichung (8) mit einer (nicht homogenen) Gleichung zwischen $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$, die in diesen Grössen ganz und rational ist, und bis zum Grade ν ansteigt. Eine Gleichung dieser Art vom Grade $\nu = \lambda \cdot \nu_\lambda$ muss sich also durch Elimination der Parameter aus der angenommenen Parameterstellung des Complexes herleiten lassen, und zwar eine solche mit Coefficienten, die *rational* von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ abhängen. Denn der zu einer Richtung allgemeiner Lage $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ gehörige Cylinder ist durch diese Richtung zugleich algebraisch und eindeutig bestimmt. Diese Gleichung kann man dann auf die Form $\Psi(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{kk}) = 0$ bringen, wo Ψ eine *ganze* rationale und homogene Function ihrer Argumente ist. Ueberdies darf angenommen werden, dass Ψ nicht für alle Werthe der Veränderlichen verschwindet, die einer Gleichung der Form $\Psi_1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3) = 0$ genügen; denn dann würde nach dem Noether'schen Fundamentalsatz*) Ψ die Form $\Psi_1 \cdot \Psi_2 + (\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}) \cdot \Psi_3$ haben, und man könnte die Gleichung $\Psi = 0$ durch die einfachere $\Psi_2 = 0$ ersetzen. Schliesst man diesen Fall aus, so stellt die Gleichung $\Psi = 0$ den vorgelegten Complex *rein* dar**). Hiermit ist der behauptete Satz bewiesen.

Wir behaupten nun weiter, dass die einen (irreducibelen oder reducibelen) algebraischen Strahlencomplex darstellende Gleichung $\Psi = 0$ in eine (bis auf einen willkürlich bleibenden constanten Factor von Ψ) völlig bestimmte Form (Normalform) gesetzt werden kann.

Wegen der Homogeneität der Function Ψ lässt sich diese, unter Anwendung des von uns benutzten Systems von Bezeichnungen abkürzend, oder, wie man sagt, symbolisch, so schreiben

*) Vgl. die Anmerkung auf Seite 281.

**) Einen weiteren auf anderer Grundlage ruhenden Beweis erbringen wir später. (§ 28.)

$$(33) \qquad \Psi = \sum_0^{\nu} {}_k (\mathfrak{A}_k \,|\, \mathfrak{X})^{m-2k} (\mathfrak{P}_k \,|\, \mathfrak{X})^k \qquad (2\nu \leqq m).$$

Dabei ist festzusetzen, dass jedesmal die Producte $(m - 2k)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen $\mathfrak{A}_{k1}$, $\mathfrak{A}_{k2}$, $\mathfrak{A}_{k3}$ multiplicirt mit den Produkten k^{ten} Grades der Grössen $\mathfrak{P}_{k1}$, $\mathfrak{P}_{k2}$, $\mathfrak{P}_{k3}$ durch irgend welche Zahlenwerthe ersetzt werden sollen, die indessen so gewählt sein müssen, dass Ψ weder identisch verschwindet, noch durch $(\mathfrak{X} \,|\, \mathfrak{X})$ theilbar wird. Jedes einem bestimmten Werthe von k entsprechende Glied der Summe (33) umfasst dann alle die Terme, die in den Coordinaten $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$ eben den Grad k haben. Auf solche Weise erhält man, da die Veränderlichen durch die Identität (8) verbunden sind, noch jeden Complex $\Psi = 0$ unendlich oft. Die Darstellung dieses Complexes durch eine Gleichung $\Psi = 0$ wird jedoch, wie aus der Theorie der ternären Formen bekannt, eindeutig bestimmt, wenn man jedes Glied als sogenannte *ternäre Normalform* wählt, so nämlich, dass der Differentiationsprocess

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{X}_1 \partial \mathfrak{X}_{11}} + \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{X}_2 \partial \mathfrak{X}_{22}} + \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{X}_3 \partial \mathfrak{X}_{33}},$$

auf dieses Glied angewendet, identisch Null liefert*).

Da solche Glieder, die zu verschieden Werthen von k gehören, offenbar ganz unabhängig von einander sind, so hängt demnach die linke Seite der Gleichung $\Psi = 0$ *linear* und homogen von sovielen Constanten ab, als alle diese Normalformen zusammen Constante haben, also von

$$N = \sum_{\nu} \tfrac{1}{2}(m - 2\nu + 1)(\nu + 1)(m - \nu + 2) \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq \left[\tfrac{m}{2}\right]\right)$$

Constanten. —

Die Individuen der gefundenen „linearen“ Mannigfaltigkeit von Strahlencomplexen werden durch die radialen Collineationen in gewisser Weise unter einander vertauscht. Es lassen sich aber überdies *alle linearen* Manigfaltigkeiten von Strahlencomplexen erschöpfend angeben, denen diese Eigenschaft zukommt.

Schränkt man nämlich die Transformationen der betrachteten Gruppe zunächst dadurch ein, dass man alle Constanten α_{ik} (S. 237) gleich Null setzt, so erkennt man, dass in einer solchen Mannigfaltigkeit mit irgend einem zu einem bestimmten Werthepaar ν, m gehörigen Complex zugleich auch alle übrigen vorhanden sein müssen. Denn es

*) S. des Verfassers „Methoden zur Theorie der ternären Formen“, Leipzig, 1889, II, § 3. Vgl. auch § 11.

ist aus der Theorie der ternären Formen bekannt, dass die lineare Mannigfaltigkeit aller Normalformen mit den Ordnungzahlen $(m-2\nu, \nu)$ keine kleinere gegenüber linearen Transformationen invariante ebenfalls lineare Mannigfaltigkeit enthält*). Uebt man nachher eine allgemeinere radiale Collineation aus, so treten, wie die Gleichung (19) erkennen lässt, Normalformen auf, die irgend welchen Werthen $k < \nu$ entsprechen. Durch Wiederholung derselben Schlussweise folgt dann, dass auch diese Normalformen *sämmtlich* in der betrachteten Mannigfaltigkeit vorkommen müssen. Die fraglichen linearen Mannigfaltigkeiten werden also sämmtlich gefunden, wenn man, bei gegebenem Werthe der Zahl m, die Reihe (33) nicht gerade bis zum höchsten zulässigen Werth von ν festsetzt, sondern schon vorher, also bei irgend einem Werthe $\nu \leqq \frac{m}{2}$, abbricht.

Der hiermit bewiesene Satz lässt sich, wenn wir μ für die Zahl $m - \nu$ schreiben, noch etwas vervollständigt, so aussprechen:

Alle Mannigfaltigkeiten von algebraischen Strahlencomplexen, die bei beliebigen radialen (oder auch schon dualen) Collineationen in Ruhe bleiben und zugleich durch lineare Gleichungen zwischen den Constanten der Complexgleichung $\Psi = 0$ dargestellt werden können, lassen sich durch die Werthe zweier ganzer Zahlen μ, ν charakterisiren, die der Ungleichung $\mu - \nu \geqq 0$ genügen.

Die in einer solchen linearen Mannigfaltigkeit enthaltenen Complexe hängen von

$$N_{\mu,\nu} = \binom{\mu+2}{2}\binom{\nu+2}{2} \qquad (\mu \geqq \nu \geqq 0,\ \mu > 0) \tag{34}$$

homogen und linear auftretenden Constanten auf folgende Weise ab:

$$\Psi_{\mu,\nu} = \sum_0^{\nu} (\mathfrak{A}_k | \mathfrak{X})^{\mu+\nu-2k} (\mathfrak{P}_k | \underline{\mathfrak{X}})^k . \tag{35}$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe enthalten je

$$\tfrac{1}{2}(\mu + \nu - 2k + 1)(k + 1)(\mu + \nu - k + 2)$$

linear-unabhängige Constante. Sie genügen identisch den Gleichungen

$$(\mathfrak{A}_k | \mathfrak{P}_k)(\mathfrak{A}_k | \mathfrak{X})^{\mu+\nu-2k-1} (\mathfrak{P}_k | \underline{\mathfrak{X}})^{k-1} = 0. \ — \tag{36}$$

Auf die Frage nach der geometrischen Bedeutung der Zahlen

*) Vgl. die soeben citirte Schrift, wo der Satz allerdings nicht ausdrücklich formulirt ist.

μ, ν, die zusammen in der Geometrie der radial projectiven Transformationen eine ähnliche Bedeutung haben, wie der *Grad* eines Liniencomplexes in der Plücker'schen Liniengeometrie, werden wir erst später eingehen können.

Abbildungen der Strahlenmannigfaltigkeit auf Punktmannigfaltigkeiten M_4.

Wir wenden uns nun zur Lösung der vorhin gestellten Aufgabe (S. 272).

Die homogenen Coordinaten $x_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ eines Punktes der zu suchenden M_4 sollen ganze rationale und homogene Functionen der Strahlencoordinaten $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ zweiter Art sein. Irgend eine ebene Mannigfaltigkeit (u_i) $N-1^{\text{ter}}$ Stufe oder $N-2^{\text{ter}}$ Dimension des Gebietes N^{ter} Stufe wird dann aus der M_4 eine M_3 ausschneiden, der im ersten natürlichen Continuum ein algebraischer Complex entspricht. *Es darf angenommen werden, dass gerade N dieser Complexe linear-unabhängig sind, und dass sie keinen gemeinsamen Bestandtheil enthalten, der selbst ein Complex wäre.* Sind nämlich weniger als N unter ihnen linear-unabhängig, so kann man, ohne M_4 zu ändern, die Zahl der Coordinaten, also den Werth von N verringern. Haben sie einen gemeinsamen Bestandtheil, so können die Functionen u_i, wie nachgewiesen, von Producten der Form $\Psi_0 \cdot \Psi_i$ nur um Vielfache der linken Seite von (8) sich unterscheiden; wir können dann einfacher setzen $u_i = \Psi_i$.

Alle genannten Complexe müssen nun eine gegenüber dualen Collineationen invariante, und im zuvor erklärten Sinnn *lineare* Mannigfaltigkeit bilden. Diese Mannigfaltigkeiten von Complexen aber haben wir erschöpfend bestimmt. Es folgt also, dass die Zahl N die Form (34) hat, wobei nur der Fall $\nu = 0$ ausgeschlossen werden muss, und dass die gesuchten M_4 sämmtlich gefunden werden, wenn man für die Punktcoordinaten x_i ein vollständiges System zu gegebenen Werthen von μ, ν gehöriger linear-unabhängiger Producte der Coordinaten zweiter Art setzt. Weiter ergiebt sich sofort, dass durch diese Abbildung des Continuums der eigentlichen Strahlen auf einen Punktraum nicht nur die Gruppe G_{16}, sondern auch die Gruppe G_{17} der *radialen* Projectivitäten in eine projective Gruppe übergeführt wird. Endlich lässt sich auch zeigen, was wir indessen hier nicht näher ausführen können, dass irgend eine der gefundenen M_4 weitere projective Transformationen *nicht* zulässt.

Die Mannigfaltigkeiten M_4 *der verlangten Art sind von zweierlei Beschaffenheit. Die der Annahme* $\mu = \nu$ *entsprechenden sind sämmtlich*

eindeutig und durchaus-stetig abgebildet auf das erste natürliche Strahlencontinuum. Die der Annahme $\mu > \nu$ entsprechenden sind eindeutig und durchaus-stetig abgebildet auf das zweite natürliche Strahlencontinuum.

Der erste Theil des Satzes ist evident.

Die zugehörigen M_4 tragen jede eine invariante M_2, eine sogenannte rationale *Normalfläche*, die birational abgebildet ist auf das ternäre Gebiet der Punktstrahlen, und die in einem ebenen Gebiete der Stufe $\binom{\nu+2}{2}$ liegt, dessen Punkte durch eine zu G_{17} meroëdrisch-isomorphe Gruppe vertauscht werden, nämlich ebenso, wie die ebenen Curven ν^{ter} Classe durch die Collineationen der Ebene. Das einfachste Beispiel der Art ($\mu = \nu = 1$, $N = 9$) haben wir bereits angeführt. Die invariante M_2 ($\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = 0$) ist in diesem Falle eine Ebene.

Ist $\mu > \nu$, so giebt es auf der M_4 Punkte, die sich der Darstellung durch die Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ zunächst entziehen. Sie werden leicht gefunden durch einen Grenzübergang:

$$\mathfrak{X}'_k = \Xi \cdot \mathfrak{X}_k, \quad \mathfrak{X}'_{kk} = \mathfrak{X}_{kk} \qquad (\lim \Xi = 0).$$

Auf diese Weise kommt man aber von eigentlichen Strahlen zu Grenzstrahlen: Die fraglichen Punkte bilden eine M_3, einen sogenannten *Normalraum*, der eindeutig abgebildet ist auf die Linienelemente einer Ebene. (Vgl. S. 268.) Diese Punkte werden dargestellt durch zwei getrennte Systeme von je drei Verhältnissgrössen, die durch eine Gleichung der Form (21) verbunden, im Uebrigen aber von einander unabhängig sind. Die M_3 verläuft in einem ebenen Gebiete der Stufe

$$\tfrac{1}{2}(\mu - \nu + 1)(\nu + 1)(\mu + 2);$$

die Punkte dieses Gebietes werden gerade so unter einander vertauscht, wie in der ebenen Geometrie die Normalconnexe, deren Gleichungen in Liniencoordinaten den Grad ν, in Punktcoordinaten den Grad $\mu - \nu$ haben, durch die Gruppe aller ternären Collineationen.

Das einfachste hierher gehörige Beispiel ($\mu = 2$, $\nu = 1$, $N = 18$) haben wir ebenfalls schon angeführt. (S. 272.)

Wir gehen auf die Theorie der Punktmannigfaltigkeiten M_4 vorläufig nicht weiter ein. Sie haben den Zweck erfüllt, um dessentwillen wir sie betrachtet haben. *Es ist nachgewiesen, dass die radialprojective Geometrie im ersten und zweiten natürlichen Strahlencontinuum sich deckt mit der projectiven Geometrie auf gewissen Punktmanigfaltigkeiten, und namentlich, dass die erörterten beiden Erweiterungen des nicht abgeschlossenen Continuums der eigentlichen Strahlen nicht willkürlich, sondern die einzigen Lösungen eines präcise formulirten Problems sind.*

Hiermit aber haben wir eine klarere Einsicht in die principielle Bedeutung dieser Begriffsbildungen erlangt, als der Erfolg in der Anwendung allein zu gewähren vermöchte. Denn dann würde die Frage offen bleiben, ob nicht derselbe oder auch ein besserer Erfolg auch durch andere Methoden erzielt werden kann, als die, die wir benutzen werden.

Eine Anwendung werden wir indessen von dem Vorgetragenen sogleich machen, indem wir den Beweis der auf S. 257 formulirten Behauptung erbringen. Wir wollen zunächst hervorheben:

Das erste natürliche Strahlencontinuum geht aus dem zweiten durch Einführung eines Aequivalenzbegriffs hervor, indem solche Grenzstrahlen nicht von einander unterschieden werden, deren zugehörige Linienelemente denselben Punkt enthalten.

Hierzu gehört als Seitenstück die weitere Bemerkung:

Das „Continuum der Linienkreuze" geht aus dem zweiten natürlichen Strahlencontinuum ebenfalls durch Einführung eines Aequivalenzbegriffs hervor, wenn nämlich solche Grenzstrahlen nicht von einander unterschieden werden, deren zugehörige Linienelemente dieselbe Gerade enthalten.

Zum Beweise des erwähnten Satzes, der offenbar einen tiefgehenden Unterschied zwischen den beiden letzten in der Form so ähnlichen Aequivalenzbegriffen begründet, machen wir nun die hypothetische Annahme, es gebe eine Punktmannigfaltigkeit M_4', die durch eine analytische Abbildung eindeutig umkehrbar und durchaus stetig auf das Continuum der Linienkreuze bezogen ist, und diese Eigenschaft auch dann noch behält, wenn man den in Betracht kommenden Veränderlichen *complexe* Werthe beilegt.

Diese im projectiven Punktcontinuum eines Raumes R_n verlaufende Mannigfaltigkeit muss nun zunächst algebraisch und insbesondere rational sein. Die Coordinaten x_i eines Punktes allgemeiner Lage von M_4' müssen ganze rationale und homogene Functionen der Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ sein. M_4' entsteht also, nach der Ausdrucksweise der Geometrie, *durch Projection* aus einer der erklärten Mannigfaltigkeiten M_4, und zwar natürlich aus einer solchen des zweiten Typus, mit invarianter M_3. Während bei dem Projectionsprocess M_4 seine Dimensionenzahl vier nicht ändern darf, soll M_3 in eine Fläche M_2' zusammengezogen werden, die eindeutig-umkehrbar und stetig auf die ∞^2 uneigentlichen Strahlen bezogen, und daher entweder mit einer der besprochenen Normalflächen M_2 identisch oder eine geeignete Projection einer solchen Fläche ist. Da nun der Uebergang von eigentlichen zu uneigentlichen

Strahlen durch die Substitution $\mathfrak{X}_k' = \Xi \cdot \mathfrak{X}_k$ ($\lim \Xi = 0$) bewirkt werden kann, so müssen die Glieder niedersten Grades in den $\mathfrak{X}_k$ (und höchsten Grades in den $\mathfrak{X}_{kk}$) in den Ausdrücken x_i gerade die Coordinaten der Punkte von M_2' liefern. Diese Glieder sind also Producte der Grössen $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_k$, die alle in eine und dieselbe homogene Function $\Phi(\mathfrak{X}_{kk})$ multiplicirt sind. Das noch in hohem Grade willkürliche System der Coordinaten x_i lässt sich dann immer so wählen, dass eine gewisse Anzahl*) von ihnen *nur* solche Glieder enthalten, und also Φ als Factor haben, während *alle* übrigen die Grössen $\mathfrak{X}_k$ in einem höheren Grade enthalten.

Es bezeichne jetzt Φ_1 einen irreducibelen Theiler von Φ. Dann lässt sich einsehen, dass die Coordinaten der zweiten unter den genannten Gruppen nicht sämmtlich verschwinden, wenn man Φ_1 gleich Null setzt, es sei denn, dass *sämmtliche* Coordinaten durch Φ_1 theilbar sind. In der That müssen, wenn die Gleichung $\Phi_1 = 0$ das Verschwinden sämmtlicher Coordinaten x_i nach sich zieht, diese als Functionen der Grössen $\mathfrak{X}_{kk}$ betrachtet, nach dem Noether'schen Fundamentalsatze über ebene Curven**) in die Form $A_i \cdot (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) + B_i \cdot \Phi_1$ gesetzt werden können. Da die Glieder mit Factoren $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})$ weggelassen werden dürfen, so können sämmtliche Coordinaten um den Factor Φ_1 gekürzt werden, und es kann also der Maximalgrad der Grössen x_i in Bezug auf $\mathfrak{X}_{kk}$ heruntergedrückt werden. Da nachher wieder die gleiche Argumentation anwendbar ist, so darf man, unbeschadet der Allgemeinheit, diese Möglichkeit *ausschliessen.*

Nunmehr führen wir zwei verschiedene Grenzübergänge zu demselben, übrigens beliebigen, uneigentlichen Strahl aus: Einen so, dass während des ganzen Processes $\Phi \neq 0$ bleibt, den anderen so, dass bereits vor Uebergang zur Grenze $\Phi_1 = 0$ angenommen wird, die von dem Factor Φ_1 freien Coordinaten x_i aber auch in der Grenze nicht sämmtlich verschwinden (was unter Umständen complexe Veränderlichkeit der Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ voraussetzt). Dann erhalten wir nothwendig zwei verschiedene Grenzlagen für die Bilder des veränderlichen Strahls, gegen die Voraussetzung, dass die Abbildung stetig sei. Die hypothetisch angenommene Abbildung existirt also nicht***).

---

*) Nämlich die Stufenzahl des projectiven Punktcontinuums *kleinster* Stufe (oder Dimension), in dem die Fläche M_2' liegt.

**) Brill und Noether, Algebraische Functionen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung III (1893), Nr. 53, 54.

***) Der Leser möge sich deutlich machen, warum beim ersten natürlichen Continuum ein ähnlicher Schluss nicht möglich ist.

Die Erweiterung eines zunächst nicht abgeschlossenen algebraischen Continuums zu einem in Bezug auf eine bestimmte Gruppe birationaler Transformationen *„natürlichen Continuum"* ist von Geometern schon in einigen Fällen ausgeführt worden. (Punktcontinua der projectiven und Inversionsgeometrie, Kugelcontinuum der Inversionsgeometrie, Plücker'sches Liniencontinuum und andere aus der projectiven Geometrie abgeleitete Continua.) Man hat aber nicht mit Bewusstsein einen derartigen Begriff gebildet, und man hat kein bestimmtes Problem formulirt.

Zahlreiche Aufgaben ähnlich der unsrigen entspringen der Theorie der Gruppen birationaler Transformationen, und bei einer Anzahl von wichtigen stark-transitiven Gruppen lässt sich die vollständige Lösung auch auf eine ähnliche Art bewirken*). So zeigt die angewendete Methode u. A., dass das *Plücker'sche Liniencontinuum* stetig abbildbar ist auf gewisse M_4, mit projectiver G_{15}, die in Gebieten der Stufen $\frac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3)$ verlaufen und auch nur „im Allgemeinen" eindeutig *auf keine anderen* M_4 *derart* — dass also das Plückersche Continuum einzig ist, was freilich kaum eines besonderen Beweises bedarf. Der Gegenstand ist von viel einfacherer Natur, als der hier behandelte.

Auch in der Geometrie der hyperbolischen und elliptischen dual-projectiven und antiprojectiven Transformationen (S. 231, Anmerkung) liegen *sehr viel einfachere* Verhältnisse vor, als die von uns betrachteten.

Die Figuren, die an Stelle unserer Figur des Strahls treten müssen, bilden hier von vorn herein ein abgeschlossenes Continuum, abbildbar auf M_4 mit projectiver halb-einfacher Gruppe G_{16}, die ebenfalls in Gebieten der Stufen $\binom{\mu+2}{2}\binom{\nu+2}{2} - (\mu, \nu > 0)$ — liegen (und von denen im elliptischen Falle ausschliesslich die der Annahme $\mu = \nu$ entsprechenden reelle Abbildungen liefern können). Die zugehörigen projectiven Gruppen sind zu sich selbst correlativ; invariante Mannigfaltigkeiten niederer Dimension (analog M_2, M_3) existiren nicht.

Aehnliche Verhältnisse, wie die im Texte geschilderten, bietet übrigens schon eine nach anderer Richtung wohlbekannte Figur dar. Die *specielle* Liniencongruenz 1. O. 1. Cl., die mit zusammenfallenden Brennlinien, gestattet bekanntlich eine projective Gruppe g_7, mit invarianter g_6 (und g_4, g_3). Die projectiven Coordinaten der Punkte, die auf einer „eigentlichen", nämlich von der Brennlinie verschiedenen Geraden der Congruenz liegen, können als überzählige Coordinaten der Geraden selbst betrachtet werden; die Punkte des Raumes definiren daher (ebenso wie auch die Ebenen) eine Art von Strahlencontinuum, mit Eigenschaften, die in hohem Grade irregulär sind. Ferner giebt es zwei verschiedene Classen von Mannigfaltigkeiten M_2, mit projectiver Gruppe g_7, deren Punkte allgemeiner Lage den eigentlichen Congruenzlinien stetig entsprechen. Die der ersten Classe liegen in Gebieten der Stufen $(\nu+1)^2$; die zugehörigen g_7 lassen je einen Punkt auf M_2 in Ruhe. Der einfachste Repräsentant dieser Classe ist der irreducibele Kegel 2. Ordnung im dreifach ausgedehnten Raume. Die M_2

*) Ein Beispiel hat der Verfasser ausführlich behandelt, Leipz. Ber. 1891, S. 338—403 (Natürliche Continua von Elementen 2. Ordnung). Vgl. dort auch die Anmerkung auf S. 380.

der zweiten Classe liegen in Gebieten der Stufen $(\mu + 1)(\nu + 1)$ $(\mu > \nu > 0)$; die zugehörigen y_7 lassen je eine rationale Curve auf M_2 in Ruhe.

Die M_2 der ersten Classe sind eindeutig und stetig abgebildet auf das Continuum der Congruenzlinien, wenn man dieses, wie üblich, durch die Brennlinie erweitert. Die M_2 der zweiten Classe definiren ebenso ein weiteres natürliches Continuum, bei dem statt der Brennlinie ∞^1 „Grenzlinien" den eigentlichen Congruenzlinien hinzuzufügen sind. Diese (der gewöhnlichen projectiven Geometrie fremden) Grenzlinien entsprechen eindeutig den ∞^1 ebenen Büscheln in der Congruenz. — Die Analogie zu den beiden natürlichen Strahlencontinuis des Textes ist augenscheinlich: Man hat die beiden ersten Glieder einer unbegrenzten Reihe algebraisch-geometrischer Theorieen vor sich.

Mit diesen fragmentarischen Andeutungen müssen wir uns begnügen, da die zuletzt besprochenen Gegenstände unseren eigentlichen Aufgaben im Ganzen zu ferne liegen*).

§ 28.

Imaginäre Strahlen.

Im reellen Gebiete braucht, wie wir gesehen haben, ein Unterschied zwischen den Begriffen der Geraden und des Strahls selbst nicht angenommen zu werden, wenn man die Strahlenmannigfaltigkeit als abgeschlossenes Continuum auffassen will, in dem die radial-projectiven Transformationen wohldefinirt und stetig sind: Die (einzeln betrachteten) reellen Strahlen des irregulären Continuums sind von den reellen Geraden des Plücker'schen Liniencontinuums von vorn herein nicht verschieden, und bei Ersetzung dieses Continuums durch das erste natürliche braucht ein Unterschied wenigstens nicht nothwendig angenommen zu werden. (S. 265.) Beim zweiten natürlichen Strahlencontinuum besteht eine gleiche Identität wenigstens noch bei den Begriffen der eigentlichen Geraden und des eigentlichen Strahls. Führen wir dagegen nunmehr imaginäre Gerade und imaginäre Strahlen ein, so zeigt sich sogleich, dass eine Identität beider Begriffe in viel geringerem Umfange stattfindet. Es wird daher das gegenseitige Verhältniss dieser Begriffsbildungen einer Erörterung bedürfen, wenn nicht die Gefahr entstehen soll, dass Sätze der Plücker'schen Liniengeometrie in unzulässiger Weise auf unsere Strahlengeometrie übertragen werden.

Wir ergänzen zunächst die auf S. 200 angegebenen Definitionen dahin, dass wir für Gewinde-, Linien- oder Strahlencoordinaten nunmehr allgemein *complexe* Werthe zulassen. Wir reden dem entsprechend

*) Man vergleiche indessen noch § 28 (Schlussbemerkung) und § 30, wo die besprochenen Analogieen aus einem anderen Gesichtspunkt betrachtet werden.

von einem imaginären Gewinde, einer imaginären Geraden oder einem imaginären Strahl, ferner von dem auf diese Weise *erweiterten* Gewindecontinuum, dem erweiterten Plücker'schen Liniencontinuum, den erweiterten Strahlencontinuis. Von zwei Systemen complex-dualer Grössen X_i, X_i' sagen wir, dass sie *denselben* Strahl darstellen, wenn das eine aus dem anderen durch Multiplication mit einem *complex*-dualen Factor $\sigma + \tau\varepsilon$ $(\sigma \neq 0)$ abgeleitet werden kann. Entsprechend erweitern wir den Begriff der radialen und dualen Projectivitäten. Dann gilt offenbar der Satz:

In jedem der erklärten Continua von reellen und imaginären Strahlen sind die radialen Collineationen überall wohldefinirt, eindeutig und stetig.

Drücken wir alle diese Transformationen in Plücker'schen Liniencoordinaten aus, und benutzen wir den zum Plücker'schen Liniencontinuum gehörigen Stetigkeitsbegriff, so haben sie die genannten Eigenschaften *nicht*. Es treten Stellen der Unbestimmtheit auf, und ein Gleiches findet statt, wenn man umgekehrt die gewöhnlichen Collineationen als Transformationen in einem der Strahlencontinua betrachtet.

Es giebt im imaginären Gebiete eigentliche Strahlen, die nicht zugleich als imaginäre gerade Linien angesehen werden können.

Wenn nämlich die scalaren Bestandtheile $\mathfrak{X}_{0i}$ der dualen Verhältnissgrössen X_i nicht sämmtlich verschwinden, aber der Gleichung

$$(1) \qquad (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{01}^{\,2} + \mathfrak{X}_{02}^{\,2} + \mathfrak{X}_{03}^{\,2} = 0$$

genügen, und wenn zugleich

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} \neq 0$$

ist, so behält das System der Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ diese seine Eigenschaften bei, wenn man den dualen Verbindungen X_i einen Factor $\sigma + \tau\varepsilon$ hinzufügt, dessen scalarer Bestandtheil σ nicht verschwindet. Man kann also durch diesen Process jetzt nicht mehr Plücker'sche Liniencoordinaten gewinnen.

Wenn dagegen neben der Gleichung (1) die Gleichung

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0$$

besteht, so liefert uns der nämliche Process die Coordinaten von ∞^1 verschiedenen eigentlichen geraden Linien, sogenannten *Minimalgeraden*. Diese liegen sämmtlich in einem Parallelenbüschel, dessen Scheitel dem absoluten Kegelschnitt angehört, und dessen Ebene diesen Kegelschnitt berührt.

Es giebt also im imaginären Gebiete zweitens eigentliche Strahlen, deren Coordinaten (erster Art) zwar als Plücker'sche Coordinaten gerader

Linien, aber nicht als Coordinaten bestimmter gerader Linien angesehen werden können. —

Wir untersuchen nun diese beiden Arten imaginärer Strahlen genauer, indem wir zugleich zeigen, wie man von der Plücker'schen Liniengeometrie aus unmittelbar zu ihnen kommen kann.

Wir glauben durch diese Anknüpfung an geläufige Vorstellungen einmal das Verständniss der radial-projectiven Geometrie selbst zu erleichtern; dann aber wünschen wir auch spätere Betrachtungen vorzubereiten, in denen beide Systeme von Begriffsbildungen neben einander zu verwenden sein werden.

Wir betrachten jetzt *zwei* Systeme dualer Grössen $X_1 : X_2 : X_3$ und $U_1 : U_2 : U_3$. Diese sollen durch die synektische Gleichung

$$(4) \qquad (UX) = (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{X}) + (\mathfrak{U}\mathfrak{X})\varepsilon = 0$$

verbunden sein. Es möge ferner das System der Grössen X_i als bestimmt gegeben betrachtet werden, während das System der Grössen U_i derart veränderlich sein soll, dass die Plücker'sche Relation $\frac{1}{2}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}) = 0$ besteht. Unter diesen Voraussetzungen hat die Gleichung oder das Gleichungspaar (4) immer eine geometrische, oder — da es sich um imaginäre Figuren handelt — quasi-geometrische*) Bedeutung in der Plücker'schen Liniengeometrie. —

Sei *zuerst* $(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}) \neq 0$, so bedeutet die Gleichung $(\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = 0$, dass die Gerade $\mathfrak{U}$ Leitlinie ist eines Gewindes mit den Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$; sie stellt also im üblichen Sinne dieses Gewinde dar. Der Nullpunkt der unendlich fernen Ebene in Bezug auf das zugehörige Nullsystem liegt nicht auf dem absoluten Kegelschnitt, und es gehören daher zwei verschiedene Tangenten dieser Curve dem Gewinde an. Die duale Gleichung (4) sagt nun aus, dass die Leitlinie $\mathfrak{U}$ überdies die Nebenaxe $(\mathfrak{U} \mid \mathfrak{X}) = 0$ des Nullsystems oder Gewindes, die zu jenen Tangenten gehörige Berührungssehne, trifft. Alle diese Leitlinien aber bilden eine Congruenz 1. Ordnung 1. Classe, deren eine Brennlinie eben die Nebenaxe, deren andere Brennlinie die Hauptaxe des Nullsystems ist; mit anderen Worten, die duale Gleichung definirt, wie wir (unter Beschränkung auf reelle Figuren) schon früher gesehen haben, die Normalencongruenz der Hauptaxe des Nullsystems, als Ort aller in ihr enthaltenen Geraden $\mathfrak{U}$.

Diese Congruenz 1. Ordnung 1. Classe bestimmt also vollkommen

---

*) Nach der v. Staudt'schen Theorie des Imaginären kann man übrigens bekanntlich mit dem Begriff einer imaginären Geraden auch eine reale, freilich verwickelte liniengeometrische Vorstellung verbinden. —

eine Gerade, oder, wie wir lieber sagen, einen *Strahl* X, die *Hauptaxe* des Nullsystems oder Gewindes, als deren Coordinaten die Grössen X_1, X_2, X_3 gelten können.

Sei *zweitens* $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) = 0$, aber $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) \neq 0$, so sind die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ nach wie vor Coordinaten eines (stets imaginären) nicht ausgearteten Gewindes. Der Nullpunkt der unendlich fernen Ebene liegt aber jetzt auf dem absoluten Kegelschnitt und dieser hat nur noch *eine* seiner Tangenten im Gewinde. *Die zuvor als Hauptaxe des Nullsystems bezeichnete Gerade* hat sich mit der Nebenaxe, eben der genannten Tangente, vereinigt, und *hat daher als eigentliche Gerade zu existiren aufgehört.* Die wie vorher definirte Congruenz 1. Ordnung 1. Classe aber ist gleichwohl *nicht* unbestimmt. Wir erhalten vielmehr auch jetzt noch aus der Gleichung (4) eine wohldefinirte Congruenz dieser Art, bestehend aus allen Leitlinien des Nullsystems, die jene Tangente des absoluten Kegelschnitts treffen. Diese Leitlinien bilden (wie hinlänglich bekannt) eine specielle Congruenz 1. Ordnung 1. Classe mit zusammenfallenden Brennlinien, die auch durch eine projective Zuordnung zwischen den Punkten und Ebenen ihrer doppelt zählenden Brennlinie erklärt werden kann. Diese Brennlinie aber ist die genannte Tangente des absoluten Kegelschnitts; in der erwähnten Zuordnung entspricht dem Berührungspunkt die unendlich ferne Ebene. *Wir erkennen also, dass der Normalencongruenz des zuvor erklärten Strahls im betrachteten Grenzfall eine völlig bestimmte Grenzlage zukommt.* Die Grenzlage selbst kann *nicht* durch die erwähnte Tangente des absoluten Kegelschnitts allein definirt werden; sie ist vielmehr erst bestimmt, wenn auch jene projective Zuordnung gegeben ist: Es giebt also jeder der ∞^1 Tangenten des absoluten Kegelschnitts entsprechend ∞^2 Grenzlagen von Normalencongruenzen von Strahlen. Jede von diesen Grenzlagen aber entspricht einem bis auf einen dualen Proportionalitätsfactor ϱ bestimmten System von Verhältnissgrössen $X_1 : X_2 : X_3$: Also können wir diese oder die entsprechenden Systeme $\mathfrak{X}_{ik}$ als „Coordinaten“ unserer Congruenzen auffassen. Es wird dann zur Erleichterung der Redeweise dienen, wenn wir auch von einer solchen Congruenz noch in einem uneigentlichen, übertragenen Sinne als von dem „Normalennetz eines Strahls“ reden. Dieser, wie wir sagen wollen, *accessorische Strahl* hat dann eben dieselben Verhältnissgrössen zu Coordinaten erster Stufe. Wir werden ferner das Recht haben, diesen „Strahl“ *als Hauptaxe des Nullsystems oder Gewindes* zu bezeichnen, während für jene Tangente des absoluten Kegelschnitts das Wort Nebenaxe vorbehalten bleibt.

Hiermit brauchen wir also das Wort „Hauptaxe eines Gewindes“

*in einem neuen Sinne: Wir entfernen uns von der bisher üblichen Terminologie**).

Sei *drittens* $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{X}) = 0$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 0$, aber nicht zugleich $\mathfrak{X}_{01} = 0$, $\mathfrak{X}_{02} = 0$, $\mathfrak{X}_{03} = 0$. Dann sind die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ Coordinaten einer sogenannten Minimalgeraden $\mathfrak{X}$, und die Gleichungen $(\mathfrak{X}\,\mathfrak{U}) = 0$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{U}) = 0$ werden durch alle Geraden $\mathfrak{U}$ befriedigt, die diese Minimalgerade und deren absolute Polare, die $\mathfrak{X}$ schneidende Tangente des absoluten Kegelschnitts treffen. Wir erhalten also wieder eine bestimmte Congruenz 1. Ordnung 1. Classe als Ort der Geraden $\mathfrak{U}$; aber diese Congruenz zerfällt jetzt in eine Congruenz (1, 0) und eine Congruenz (0, 1), nämlich in ein Parallelenbündel, das aus lauter Minimalgeraden besteht, und in die Congruenz (das Feld) aller Geraden, die in einer eigentlichen Berührungsebene des absoluten Kegelschnittes liegen. *Beide* diese Congruenzen ändern sich nicht, wenn man die Minimalgerade $\mathfrak{X}$ in der zugehörigen Ebene variirt, so lange man sie nicht uneigentlich werden lässt; und dieser Operation entspricht wiederum analytisch die Multiplication der dualen Grössen X_i mit einer dualen Grösse ϱ von nicht verschwindendem scalarem Bestandtheil. Wieder also ist es möglich, in einem erweiterten Sinne von der nunmehr reducibelen Congruenz (1, 1) als von der „Normalencongruenz eines Strahls" zu reden: Wir wollen auch einen solchen „Strahl" noch accessorisch, aber zum Unterschied von den zuerst betrachteten accessorischen Strahlen allgemeiner Art einen accessorischen Minimalstrahl oder einfacher einen *Minimalstrahl* nennen. Es giebt ∞^2 derartige Strahlen; sie bilden eine Congruenz. Mit jedem von ihnen sind ∞^1 Minimalgerade auf gleiche Weise verbunden, die *eigentlichen* Geraden eines Parallelenbüschels, dessen Ebene in seinem Scheitel den absoluten Kegelschnitt berührt. Man kommt demnach zum Begriff des accessorischen Minimalstrahls von dem der Minimalgeraden aus durch einen Aequivalenzbegriff: *Je* ∞^1 *Minimalgerade eines der genannten Büschel werden als äquivalent, als nicht von einander unterschieden definirt.*

Wir erkennen ferner, dass es berechtigt ist, auch in diesem Falle wieder von einer *Hauptaxe* (und Nebenaxe) des betrachteten (aus-

*) Diese neue Erweiterung des Begriffes „Hauptaxe eines *reellen* Gewindes", die wir sogleich noch zu vervollständigen haben werden, ist *motivirt* durch das in unserer Untersuchung hervortretende Bedürfniss, den wichtigen und weitreichenden Satz auf S. 239 in gleich einfacher und *nicht von Ausnahmen durchbrochener Form* auf das imaginäre Gebiet zu übertragen. Man darf dann die Hauptaxe eines Gewindes nicht als Gerade, sondern *nur* als Strahl auffassen. Vgl. den weiteren Text.

gearteten) Gewindes zu reden: Wir verstehen darunter auch hier den zugehörigen Strahl. —

In Betrachtungen, die sich auf den Zusammenhang zwischen Gewinden und ihren Hauptaxen beziehen, tritt neben die Eintheilung der Gewinde in nicht-ausgeartete und ausgeartete (Liniengebüsche) eine andere: Wir verstehen unter einem *eigentlichen Gewinde* ein solches, dessen Coordinaten $\mathfrak{X}_{01}$, $\mathfrak{X}_{02}$, $\mathfrak{X}_{03}$ nicht gleichzeitig verschwinden, unter einem *uneigentlichen Gewinde* ein solches, dessen Coordinaten den Gleichungen $\mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = 0$ genügen — also ein Liniengebüsch mit unendlich ferner Axe — *). Bei Gebrauch dieser vielfach nützlichen Terminologie können wir nunmehr den für unsere Untersuchung grundlegenden Satz aussprechen:

Jedes eigentliche reelle oder imaginäre Gewinde hat einen einzigen eigentlichen Strahl als Hauptaxe. Umgekehrt gehört zu jedem reellen oder imaginären eigentlichen Strahl ein bestimmtes Büschel coaxialer Gewinde.

Die Beziehung zwischen Strahl und Gewindebüschel wird nicht zerstört durch zusammengehörige Transformationen der Gruppen Γ_{18} und G_{17}.

Es ist *nicht* erlaubt, in dieser Behauptung das Wort „Strahl" durch das Wort „Gerade" zu ersetzen.

Jedes uneigentliche Gewinde oder Liniengebüsch hat ferner eine uneigentliche Gerade zur Axe und diese ist Nebenaxe von ∞^3 auf ∞^2 coaxiale Büschel vertheilten eigentlichen Gewinden, deren Hauptaxen als *Hauptaxen des uneigentlichen Gewindes* zu bezeichnen sind.

Jedem uneigentlichen Gewinde kommen also ∞^2 in einem Parallelenbündel liegende Strahlen als Hauptaxen zu.

Aus der letzten nicht zu umgehenden Bestimmung ergiebt sich eine eigenthümliche Folgerung, die wohl zu beachten sein wird. Betrachtet man nämlich z. B. eine algebraische Mannigfaltigkeit von Gewinden, *so wird der Ort der Hauptaxen der eigentlichen Gewinde der Mannigfaltigkeit, selbst nachdem man ihn durch analytische Fortsetzung zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt hat, nicht nothwendig analytischen Zusammenhang haben mit dem Ort der Hauptaxen der uneigentlichen Gewinde derselben Mannigfaltigkeit***). Ja es kann, wie schon das

*) Der Inbegriff der *eigentlichen* Geraden eines uneigentlichen Gewindes bildet also die Figur, die wir früher, in der Beschränkung auf reelle Elemente, System der Querlinien eines uneigentlichen Linienkreuzes genannt hatten.

**) Beispiele, in denen beide Oerter *die gleiche* Dimensionenzahl haben, wird man in § 29 finden.

Büschel coaxialer Gewinde zeigt, der zweite Ort sogar eine höhere Dimensionenzahl haben, als der erste*).

Gehen wir auf dem betretenen Wege weiter, so fordert die fernere Ausbildung der Strahlengeometrie nunmehr, dass auch die mit $\mathfrak{U}_{ik}$ bezeichneten Grössen als frei veränderlich betrachtet und als Coordinaten von *Strahlen* aufgefasst werden. Die Gleichung $(UX) = 0$ wird jetzt *Definition* des „rechtwinkligen Schneidens" zweier eigentlicher *Strahlen* X, U; und *damit erleidet der Begriff des Normalennetzes eines eigentlichen Strahles eine tief einschneidende Aenderung.* Dieses ist nun nicht mehr Ort von Geraden, sondern Ort von Strahlen U.

Wir betrachten zunächst nur *eigentliche* Strahlen U.

1) Ist X nicht accessorisch, so enthält das Netz der Strahlen U zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 accessorischen Strahlen, darunter *zwei einzelne Minimalstrahlen* (deren jeder mit ∞^1 Minimalgeraden äquivalent ist, die dem als Ort von Geraden betrachteten Normalennetz der Geraden X angehören).

2) Ist X accessorisch, aber nicht Minimalstrahl, so tritt dem Falle 1) gegenüber die Besonderheit ein, dass die beiden genannten Schaaren von ∞^1 accessorischen Strahlen U zusammenfallen, und *keinen* eigentlichen Minimalstrahl enthalten.

3) Ist X ein accessorischer Minimalstrahl, so würde das „Normalennetz" von X, wenn es noch so erklärt wäre, wie vorher, eine reducibele Congruenz sein. Nun aber auch U einen Strahl bedeutet, ist die durch $(UX) = 0$ definirte Congruenz auch im vorliegenden Falle noch *irreducibel.* Man kann durch analytische Fortsetzung von jedem zulässigen Werthsystem der *Strahlen*-Coordinaten $\mathfrak{U}_{ik}$ aus jedes andere erreichen, da die Plücker'sche Gleichung $\frac{1}{2}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}) = 0$, deren Bestehen dies zuvor verhindert hat, nunmehr wegfällt. Ein Strahl allgemeiner Lage des Normalennetzes von X ist nicht accessorisch, und daher identisch mit einer Geraden, nämlich einer Geraden des zuvor beschriebenen Feldes. Jeder accessorische Strahl des Netzes aber ist zugleich Minimalstrahl, und es giebt in dem Netz ein „Büschel" von ∞^1 Minimalstrahlen, deren jeder einzelne mit ∞^1 ein besonderes Büschel bildenden parallelen Minimalgeraden der projectiven Geometrie äqui-

*) *Diese* Singularitäten, die auch schon in den bisherigen Untersuchungen über die Hauptaxen linearer Mannigfaltigkeiten (Plücker, Ball, Sturm u. Andere) auftreten, aber nicht gehörig beachtet worden sind, lassen sich *nicht* in der Weise beseitigen, wie wir andere Complicationen durch Einführung des Begriffs „Strahl" beseitigt haben. Wir kommen darauf noch zurück.

valent ist. — Dasselbe Büschel von Minimalstrahlen gehört dann überhaupt dem Normalennetz irgend eines unter seinen Strahlen an.

Alles bisher Gesagte bezieht sich nur auf eigentliche Strahlen, und daher auf alle betrachteten Strahlencontinua zugleich. Es werden nun die bisher noch nicht abgeschlossenen Normalennetze durch Zufügung von imaginären uneigentlichen Strahlen, Punktstrahlen oder Grenzstrahlen zu erweitern sein, was in derselben Weise geschehen kann, wie im reellen Gebiet. Um nicht zu sehr ins Breite zu gerathen, beschränken wir uns indessen auf das wichtigste unserer Strahlencontinua, das erste natürliche, und gehen sogleich dazu über, die wesentlichsten Ergebnisse der vorhergehenden Betrachtung mit einigen nahe liegenden Folgerungen zusammenzufassen.

Das erste natürliche Strahlencontinuum enthält ∞^3 accessorische Strahlen. Diese bilden den durch die Gleichung

$$(5) \qquad (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1^{\,2} + \mathfrak{X}_2^{\,2} + \mathfrak{X}_3^{\,2} = 0$$

erklärten accessorischen Complex.

In dem accessorischen Complex liegt erstens die Congruenz der ∞^2 Minimalstrahlen oder die absolute Congruenz, definirt durch die weitere Gleichung

$$(6) \qquad (\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\underline{\mathfrak{X}}) = \mathfrak{X}_{11}^{\,2} + \mathfrak{X}_{22}^{\,2} + \mathfrak{X}_{33}^{\,2} = 0\,.$$

Zweitens die Congruenz (das Feld) der ∞^2 Punktstrahlen, definirt durch die Gleichungen

$$(7) \qquad \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_2 = 0, \quad \mathfrak{X}_3 = 0.$$

Drittens der Durchschnitt beider Congruenzen, der als Ort von Punktstrahlen betrachtete absolute Kegelschnitt

$$(8) \qquad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = 0, \quad \mathfrak{X}_{11}^{\,2} + \mathfrak{X}_{22}^{\,2} + \mathfrak{X}_{33}^{\,2} = 0.$$

Die absolute Congruenz und das Feld aller Punktstrahlen werden zusammen dargestellt durch die Verbindung der Gleichung (5) mit den Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{X}_{11} & \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Aus der linken Seite der Gleichung $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) = 0$ des accessorischen Complexes entsteht durch den Process der Polarenbildung die linke Seite der Gleichung $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{U}) = 0$, die aussagt, dass zwei eigentliche

Strahlen einen rechten Winkel mit einander bilden. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der eine von beiden Strahlen, oder auch jeder von beiden, in einen Punktstrahl übergeht. Daher darf man allgemein sagen (vgl. S. 263):

Der accessorische Complex besteht aus allen Strahlen, die mit sich selbst einen rechten Winkel bilden.

Hiermit wird natürlich nicht behauptet, dass ein Strahl des accessorischen Complexes mit sich selbst überhaupt einen (mod. 2π und bis auf's Vorzeichen) *bestimmten* Winkel bildet; vielmehr wird der Ausdruck für den Winkel

$$\arccos \frac{(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{y})}{\sqrt{\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}}\sqrt{\mathfrak{y} \mid \mathfrak{y}}}$$

unbestimmt, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in denselben Strahl des accessorischen Complexes übergehen. Wenn aber $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zusammenfallen, so kann die Forderung des rechten Winkels nur durch die Strahlen des accessorischen Complexes erfüllt werden.

Ebenso kommt man von den Gleichungen (14), (15) des § 27 aus zu der Einsicht:

Die absolute Congruenz besteht aus allen eigentlichen Strahlen, die sich selbst rechtwinklig schneiden, sowie aus allen Punktstrahlen, die zu sich selbst doppelt-orthogonal sind. (S. 263.)

Darin ist schon enthalten die Aussage:

Der absolute Kegelschnitt besteht aus allen Punktstrahlen, die zu sich selbst doppelt orthogonal sind.

Als *Strahlen*, die sich selbst rechtwinklig *kreuzen*, können bei folgerechter Ausbildung der hier angewendeten Terminologie solche bezeichnet werden, die zum accessorischen Complex, aber nicht zur absoluten Congruenz gehören.

Der accessorische Complex umfasst alle Stellen singulären Charakters der collinearen Transformationen, wenn man als deren Objecte die Strahlen des ersten natürlichen Continuums betrachtet. Entsprechendes gilt von dem sogenannten *Minimalcomplex*, dem Complex $\mathfrak{x}_{01}^2 + \mathfrak{x}_{02}^2 + \mathfrak{x}_{03}^2 = 0$ der Minimalgeraden in der Plücker'schen Liniengeometrie in Bezug auf die radial-projectiven Transformationen.

Das Verhältniss des (erweiterten) ersten natürlichen Strahlencontinuums zum (erweiterten) Plücker'schen Liniencontinuum wird noch deutlicher bezeichnet durch folgende Gegenüberstellung:

Gerade allgemeiner Lage.	Strahl allgemeiner Lage.
Je ∞^1 eigentliche Minimalgerade von specieller Lage.	*Ein* eigentlicher Minimalstrahl (Strahl der absoluten Congruenz).
Eine Tangente des absoluten Kegelschnitts.	Je ∞^2 Strahlen des accessorischen Complexes.
Eine uneigentliche Gerade allgemeiner Lage.	Je ∞^1 Punktstrahlen (Gerade Punktreihe).
Je ∞^1 uneigentliche Gerade (Büschel).	*Ein* Punktstrahl.

Die absolute Congruenz.

Dass die reellen Aehnlichkeitstransformationen nicht nur, wie üblich, als collineare Transformationen, sondern auch als *radial*-collineare Transformationen angesehen werden können, haben wir bereits auseinandergesetzt. Von dem nunmehr gewonnenen Standpunkte aus erkennen wir, dass bei Gebrauch von *Strahlen* als Objecten die Aehnlichkeitstransformationen in jedes der von uns erklärten Continua hinein fortgesetzt werden können, dass man sie auch im imaginären Gebiete als radiale Collineationen betrachten kann. Auf diese Ansicht des Gegenstandes, die sich von der herkömmlichen nur durch die Wahl des Raumelementes unterscheidet, beziehen sich die folgenden Bemerkungen, zu deren besserem Verständniss wir noch daran erinnern, dass die continuirliche Gruppe $\mathfrak{g}_7$ der Aehnlichkeitstransformationen als invariante continuirliche Untergruppen die Gruppe $\mathfrak{g}_6$ der Euklidischen Bewegungen, die Gruppe $\mathfrak{g}_4$ der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen und den Durchschnitt $\mathfrak{g}_3$ beider Gruppen, die von vertauschbaren Transformationen gebildete Gruppe der (gewöhnlichen) Schiebungen enthält.

Wir heben aus den Gruppen G_{17}, G_{16} zunächst die auf S. 236 erklärten Gruppen mit zwölf und elf Parametern durch die Forderung heraus, dass im ersten natürlichen Stralencontinuum der absolute Kegelschnitt, oder in irgend einem der erklärten Strahlencontinua der Inbegriff der eigentlichen Strahlen des accessorischen Complexes in Ruhe bleiben soll. Weiter ergiebt sich dann:

Die Gruppen $\mathfrak{g}_7$ der Aehnlichkeitstransformationen und ihre invarianten Untergruppen $\mathfrak{g}_6$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_3$ werden gebildet von allen Transformationen der Gruppe G_{17} und ihrer invarianten Untergruppen G_{16}, G_9, G_8, die die absolute Congruenz in Ruhe lassen.

Die absolute Congruenz hat also für die Euklidische Geometrie im Raume, mit dem Strahl als Raumelement, eben dieselbe Be-

deutung, wie der absolute Kegel, der zu irgend einem eigentlichen Punkt gehört, für die Geometrie im Linienbündel. Dies tritt denn auch in weiteren Folgerungen hervor. So lässt sich der duale Winkel (S. 205) zweier nicht paralleler eigentlicher Strahlen X, Y darstellen durch das duale Doppelverhältniss D_X^Y, das diese Strahlen mit den beiden zum selben Normalennetz gehörigen Minimalstrahlen bilden, und zwar durch einen Ausdruck, der der Form nach vollkommen übereinstimmt mit dem bekannten Ausdruck für den Winkel zweier Strahlen im Bündel. Man findet:

$$D_X^Y = \frac{(XY) + \sqrt{(XY)^2 - (XX)(YY)}}{(XY) - \sqrt{(XY)^2 - (XX)(YY)}}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cdot \varepsilon = \\ &= \operatorname{arc\,cos} \frac{(XY)}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}} = \frac{1}{2i} \lg D_X^Y. -\end{aligned} \tag{10}$$

Die absolute Congruenz ist ein Specialfall einer irreducibelen *conischen* Congruenz, die, einem irreducibelen Kegel oder Kegelschnitt analog, soweit ihre eigentlichen Strahlen in Frage kommen, symbolisch dargestellt werden kann durch eine synektische Gleichung der Form

$$\begin{gathered}(AX)^2 = (A'X)^2 = (A''X)^2 = \cdots = 0 \\ \{(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')^2 \neq 0\}.\end{gathered} \tag{11}$$

Jede conische Congruenz dieses durch die beigefügte Ungleichung genauer bezeichneten Typus kann, auf ∞^7 (∞^6) Arten, durch radiale (duale) Collineationen übergeführt werden in jede andere. Insbesondere lassen sich auch leicht Collineationen angeben, die die absolute Congruenz und damit auch den accessorischen Complex in eine Figur mit reellen Strahlen überführen. Dann werden die zuvor besprochenen Beziehungen in solche verwandelt, die schon im reellen Gebiete auftreten: An Stelle des rechtwinkligen Schneidens $(XY) = 0$ tritt das — leicht geometrisch zu deutende — Conjugirt-Sein $(AX)(AY) = 0$ zweier Strahlen XY in Bezug auf die conische Conguenz, u. s. w.

Jede von reellen Strahlen erzeugte conische Congruenz des Typus (11) ist dual-projectiv z. B. zu der Congruenz aller reellen eigentlichen Strahlen, die einen gegebenen eigentlichen Strahl unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ treffen.

Die bezeichneten conischen Congruenzen gehören paarweise als *„reciproke“* Congruenzen zusammen. Setzen wir

$$J = \tfrac{1}{6}(AA'A'') \qquad \{(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'') \neq 0\},$$
$$(UA)^2 = (UA')^2 = \cdots = \tfrac{1}{2}(AA'U)^2,$$

so wird

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathsf{AA}'X)^2 = J \cdot (AX)^2.$$

Auf die geometrische Natur dieser Beziehung gehen wir an dieser Stelle nicht ein, bemerken aber:

Es giebt zwei verschiedene Arten conischer Congruenzen, die mit ihren reciproken zusammenfallen, nämlich erstens die absolute Congruenz, und zweitens die ∞^4 Congruenzen, deren Strahlen allgemeiner Lage einen nicht-accessorischen Strahl unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneiden.

In beiden Fällen kommt natürlich die Coincidenz der reciproken Congruenzen auf sehr verschiedene Weise zu Stande.

Linien- und Strahlencoordinaten.

In manchen Fällen wird ein schneller Uebergang von Plücker-schen Liniencoordinaten zu Strahlencoordinaten erwünscht sein. Dieser Uebergang ist, nach dem Vorhergehenden, bestimmt und eindeutig in Bezug auf Strahlen, die *nicht accessorisch*, und Gerade, die *nicht Minimalgerade* sind.

Betrachten wir einen Strahl der genannten Art zunächst als durch seine Coordinaten erster Art $\mathfrak{X}_{ik}$ gegeben, und bezeichnen wir mit u_i die Coordinaten der Ebene, die auf diesem Strahl senkrecht steht und den Anfangspunkt der Coordinaten enthält, ferner mit x_i die Coordinaten des Schnittpunktes von u und $\mathfrak{X}$ — also des zum Coordinatenanfang gehörigen *Fusspunktes* — so finden wir ohne Weiteres (vgl. Nr. 16, S. 129):

$$(13) \qquad \begin{aligned} u_0 : u_1 : u_2 : u_3 &= \quad 0 \quad : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3 , \\ x_0 : x_1 : x_2 : x_3 &= (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) : \mathfrak{X}_{11} : \mathfrak{X}_{22} : \mathfrak{X}_{33} . \end{aligned}$$

Die rechtwinkligen Plücker'schen Coordinaten des durch seine Coordinaten zweiter Art gegebenen Strahls werden daher:

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12} = \\ &= (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) \cdot \mathfrak{X}_1 : (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) \cdot \mathfrak{X}_2 : (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) \cdot \mathfrak{X}_3 : \\ &: -\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_3 & \mathfrak{X}_1 \\ \mathfrak{X}_{33} & \mathfrak{X}_{11} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 \\ \mathfrak{X}_{11} & \mathfrak{X}_{22} \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

In der That findet sich, wenn man den Grössen links von vorn herein den Factor $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})$ hinzusetzt, und dem entsprechend $\mathfrak{X}_{0k} = \mathfrak{X}_k$ annimmt,

$$-\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \end{vmatrix} \equiv (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) \cdot \mathfrak{X}_{23} \text{ mod. } \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}),$$

so dass — *unter Voraussetzung des Nicht-Verschwindens von* $(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})$ — (14) sich auf ein System von Identitäten reducirt, wenn die Strahlencoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ zugleich Plücker'sche Liniencoordinaten sind.

Wir machen hiervon einige einfache Anwendungen.

Die Proportion (14) erlaubt z. B. *die Bedingung für das Schneiden zweier nicht accessorischer Strahlen* durch eine Gleichung zwischen Strahlencoordinaten zweiter Art darzustellen:

$$(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{U}\underline{\mathfrak{U}}) + (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{U})(\mathfrak{U}\mathfrak{X}\underline{\mathfrak{X}}) = 0. \tag{15}$$

Danach lässt sich auch das System der Gleichungen (14), (15) des vorigen Paragraphen im Allgemeinen durch ein System von nur zwei Gleichungen ersetzen. Diese einfacheren Gleichungen haben aber nur unter wesentlich engeren Voraussetzungen Gültigkeit, als jene.

Die Gleichung (15) stellt, wenn der accessorische Strahl $\mathfrak{X}$ gegeben ist, einen speciellen *irreducibelen* Complex ($\mu = 2$, $\nu = 1$) des ersten regulären Strahlencontinuums vor. Geht man aber von ihr zu Plückerschen Liniencoordinaten über, so kommt man zu einer Gleichung, die einen *reducibelen* Plücker'schen Liniencomplex bedeutet:

$$(\mathfrak{X}\;\mathfrak{X}) \cdot (\mathfrak{U}\;\mathfrak{U}) \cdot (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) = 0. \qquad \{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) \neq 0\}.$$

Diese Erscheinung hat ihren Grund in der Verschiedenheit der Continuitätsbegriffe, die einen entsprechenden Unterschied des Reducibilitätsbegriffs zwischen Plücker'scher Liniengeometrie und radial-projectiver Geometrie verursacht.

Allgemein wird einem irreducibelen algebraischen Strahlencomplex, der die absolute Congruenz *nicht* enthält, ein ebenfalls irreducibeler Plücker'scher Liniencomplex (von besonderer Beschaffenheit) zugeordnet. Einem irreducibelen, vom accessorischen Complex verschiedenen Strahlencomplex dagegen, der die absolute Congruenz enthält, wird *stets* ein reducibeler Plücker'scher Liniencomplex entsprechen, der aus einem gewissen Multiplum des Minimalcomplexes $(\mathfrak{X}\;\mathfrak{X}) = 0$ $\{\frac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 0\}$, und einem zweiten irreducibelen Complex besteht. Andererseits entspricht einem irreducibelen Plücker'schen Liniencomplex, der nicht der Minimalcomplex ist, *stets* ein ebenfalls irreducibeler Strahlencomplex, der eine gewisse (nicht nothwendig von Null verschiedene) Anzahl von Malen die absolute Congruenz enthalten wird.

Aus diesen leicht zu begründenden Bemerkungen, deren weitere Ausführung hier nicht nöthig ist, lässt sich ein zweiter und zwar sehr ein-

facher Beweis des auf S. 274 angegebenen wichtigen Satzes ableiten, wonach im ersten natürlichen Continuum jeder algebraische Strahlencomplex durch eine einzige Gleichung zwischen den Grössen $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ dargestellt werden kann. Es kann nämlich jeder algebraische Plücker'sche Complex, insbesondere also auch jeder, der den Minimalcomplex nicht als irreducibelen Bestandtheil enthält, bekanntlich durch eine einzige Gleichung zwischen Plücker'schen Liniencoordinaten ausgedrückt werden*). Fasst man also einen vorgelegten algebraischen Strahlencomplex, der den accessorischen Complex nicht als Bestandtheil enthält, zunächst, soweit seine nicht-accessorischen Strahlen in Frage kommen, als Liniencomplex auf, so kann man seine vom Minimalcomplex verschiedenen Bestandtheile zusammen durch eine Gleichung zwischen Plücker'schen Coordinaten darstellen. Führt man sodann, vermöge (14), Strahlencoordinaten zweiter Art ein, so erhält man eine Gleichung zwischen diesen, die den gegebenen Complex *rein* darstellt. Da der behauptete Satz für den bei der Beweisführung ausgeschlossenen accessorischen Complex trivialer Weise ebenfalls gilt, so ist er allgemein richtig.

Beziehungen zwischen Strahlen, Punkten und Ebenen.

Wo es sich darum handelt, die Geometrie der Strahlen mit der Elementargeometrie in Zusammenhang zu bringen, da wird es erwünscht sein, nicht erst in jedem einzelnen Falle den Uebergang von Strahlencoordinaten zu Plücker'schen Coordinaten ausführen zu müssen, um die Bedingungen der vereinigten Lage eines *(zunächst) nicht-accessorischen* Strahls mit einem Punkt oder einer Ebene des projectiven Continuums R_3 festzustellen.

Die Bedingungsgleichungen für die vereinigte Lage eines Strahls $\mathfrak{X}$ *des ersten natürlichen Continuums und einer Ebene* u, die sich aus der Verbindung der Gleichungen (14) mit den Gleichungen Nr. 16 auf S. 129 ergeben, enthalten noch ein dem Problem fremdes Element, da sie identisch erfüllt werden, wenn man $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_3 = 0$ setzt. Man kann sie aber leicht rein darstellen:

$$(16) \qquad \begin{aligned} u_1\mathfrak{X}_1 + u_2\mathfrak{X}_2 + u_3\mathfrak{X}_3 &= 0, \\ u_0(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) + u_1\mathfrak{X}_{11} + u_2\mathfrak{X}_{22} + u_3\mathfrak{X}_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Die so abgeänderten Gleichungen benutzen wir nunmehr zur *Definition* der „vereinigten Lage" in Grenzfällen.

*) F. Klein, Ueber einen liniengeometrischen Satz. Math. Ann. Bd. 22 (1883), S. 234.

Lässt man den Strahl $\mathfrak{X}$ in einen accessorischen Strahl übergehen, der weder Punktstrahl, noch Minimalstrahl ist, so werden die Gleichungen (16) durch ein Büschel von ∞^1 Ebenen befriedigt, deren Schnittlinie eine Tangente des absoluten Kegelschnittes ist. Die genannten Strahlen können also *nicht* durch die mit ihnen „vereinigten" Ebenen bestimmt werden. Wird $\mathfrak{X}$ ein eigentlicher Minimalstrahl, so reduciren sich die beiden Gleichungen (16) auf eine einzige: Mit jedem Minimalstrahl sind alle ∞^2 Ebenen eines Bündels „vereinigt", und diese befinden sich in vereinigter Lage überhaupt mit allen ∞^1 parallelen Minimalstrahlen. Ebenso sind mit jedem Punktstrahl ∞^2 Ebenen eines Bündels vereinigt, dieses Bündel aber *bestimmt* den Punktstrahl.

Die Bedingungsgleichungen für die vereinigte Lage eines Strahls $\mathfrak{X}$ des ersten natürlichen Continuums und eines Punktes x, die man mit Hülfe von (14) aus den Gleichungen Nr. 15 auf S. 129 erhält,

$$\begin{Vmatrix} 0 & \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) & \mathfrak{X}_{11} & \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} = 0$$

sind ebenfalls mit einem der Aufgabe fremden Element behaftet, da auch sie identisch erfüllt werden, wenn man den Strahl $\mathfrak{X}$ in einen Minimalstrahl übergehen lässt. Unterwirft man aber das specielle Bündel $\mathfrak{X}_{11} = \mathfrak{X}_{22} = \mathfrak{X}_{33} = 0$ der Strahlen durch den Anfangspunkt der Coordinaten der Schiebung, die diesen Punkt in den Punkt x überführt, so kommt man zu einem einfacheren System von Gleichungen,

$$(17) \qquad x_0\mathfrak{X}_{kk} - x_k(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{X}) + \mathfrak{X}_k(x_1\mathfrak{X}_1 + x_2\mathfrak{X}_2 + x_3\mathfrak{X}_3) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

das im Allgemeinen, vermöge $(\mathfrak{X}\ \underline{\mathfrak{X}}) = 0$, mit dem vorigen äquivalent, doch nicht wie dieses in dem genannten Grenzfall illusorisch wird. Wir bedienen uns, wie oben, der Gleichungen (17) zur *Definition* der „vereinigten Lage" eines Strahles $\mathfrak{X}$ und eines Punktes x in Grenzfällen.

Wird $\mathfrak{X}$ accessorisch, aber weder Punktstrahl noch Minimalstrahl, so genügen den Gleichungen (17) die ∞^1 Punkte der zugehörigen Tangente des absoluten Kegelschnitts: Der acessorische Strahl allgemeiner Lage ist, wie selbstverständlich, durch die mit ihm vereinigten Punkte *nicht* bestimmt. Wird $\mathfrak{X}$ dagegen ein eigentlicher Minimalstrahl, so werden die Gleichungen (17) mit einer einzigen Gleichung äquivalent: Als vereinigt mit dem Minimalstrahl sind die ∞^2 Punkte der Ebene anzusehen, die die zugehörigen ∞^1 Minimalgeraden trägt (S. 287), und diese Ebene, eine ausgezeichnete unter denen, die mit dem Minimal-

strahl vereinigt sind, *bestimmt* den Minimalstrahl. Als vereinigt mit einem Punktstrahl muss man schliesslich jeden beliebigen Punkt ansehen. Diese Singularität lässt sich offenbar nicht beseitigen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass in der Elementargeometrie die Einführung des Begriffes „Strahl" (statt der geraden Linie) in der Regel nicht zweckmässig sein wird. Es giebt aber, wie wir bereits bei dem Begriff der Hauptaxe eines Gewindes gesehen haben, auch innerhalb der Elementargeometrie viele Constructionen, denen gegenüber die Strahlen ein einfacheres Verhalten zeigen, als die geraden Linien. Zu ihnen gehören die, von denen wir nunmehr reden wollen.

Die gemeinsame Normale zweier Strahlen.

Von den Normalennetzen eigentlicher Strahlen gilt, wie bereits nachgewiesen, der Satz:

Das Normalennetz eines eigentlichen reellen oder imaginären Strahls ist stets eine irreducibele algebraische Mannigfaltigkeit.

Ebenso bedeutet eine Vereinfachung der Plücker'schen Liniengeometrie gegenüber die Ausnahmslosigkeit des folgenden Satzes, den wir, in der Beschränkung auf reelle Figuren, bereits auf S. 203 angegeben haben:

Zwei nicht parallele reelle oder imaginäre eigentliche Strahlen X, Y haben stets einen bestimmten und zwar eigentlichen Strahl $U = \widehat{XY}$ als gemeinsame Normale.

Eine völlig bestimmte gemeinsame Normale existirt ferner auch dann, wenn der eine der nicht parallelen Strahlen ein Punktstrahl ist; die gemeinsame Normale ist dann der zum anderen (eigentlichen) Strahl orthogonale Punktstrahl. Ferner gehört zu zwei verschiedenen Punktstrahlen stets ein bestimmter Punktstrahl, der zu jedem von beiden *doppelt orthogonal* ist.

Ein dritter wichtiger Satz der Art, der ebenfalls nicht in gleich einfacher Form auf das Plücker'sche Liniencontinuum übertragen werden kann, ist der folgende:

Zu jedem reellen oder imaginären Büschel paralleler eigentlicher Strahlen ist ein einziges zweites Parallelenbüschel „reciprok", d. h. die Büschel ersten und zweiten Blattes sind in der Weise (invariant) gepaart, dass jeder Strahl des einen jeden Strahl des anderen rechtwinklig schneidet.

Zum Beweise genügt die Bemerkung, dass jedes Parallelenbüschel zu jedem anderen dual-projectiv ist.

Der Begriff des „Parallelenbüschels", der dieser Aussage zu Grunde liegt, ergiebt sich natürlich aus der Forderung, die analytische Definition des reellen Parallelenbüschels in das erweiterte Strahlencontinuum hinein fortzusetzen. Man findet ohne Mühe u. A. die folgende Parameterdarstellung für die Coordinaten zweiter Art der eigentlichen Strahlen eines solchen Büschels:

$$(18) \qquad \mathfrak{X}_k, \quad \frac{\sigma' \mathfrak{X}'_{kk} + \sigma'' \mathfrak{X}''_{kk}}{\sigma' + \sigma''} \quad \{(\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}') = 0, \quad (\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}'') = 0\}.$$

Danach bilden z. B. ∞^1 parallele Minimalstrahlen ein *Büschel* in dem nunmehr allgemein erklärten Sinne des Wortes. Die Parameter $\sigma' : \sigma''$ $(\sigma' + \sigma'' \neq 0)$ haben, wie man leicht erkennt, für das Büschel dieselbe Bedeutung, wie die sogenanntsn *barycentrischen Coordinaten* auf einer Geraden: $\sigma' = \sigma''$ z. B. liefert den Mittelstrahl zwischen $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}''$ (vgl. S. 244). Entsprechend lässt sich das Parallelen*bündel* durch Parameter darstellen, und ebenso findet man leicht die Punktstrahlen dieser Gebilde.

Eine für die meisten Zwecke geeignetere analytische Darstellung der Parallelenbüschel, und verschiedene Ergänzungen von deren Mannigfaltigkeit zu abgeschlossenen Continuis werden wir später angeben (§ 34). Hier betrachten wir näher nur noch die *Operation des Normalenziehens zwischen gegebenen nicht-parallelen Strahlen.* Diese gestaltet sich, wie bereits im reellen Gebiete (S. 203), besonders einfach bei Gebrauch von Strahlencoordinaten *erster* Art:

$$(19) \qquad (UZ) = (XYZ) = 0$$

ist die synektische Gleichung der gemeinsamen Normale zwischen nicht parallelen eigentlichen Strahlen X, Y. Bei Gebrauch von Coordinaten zweiter Art leisten dasselbe die Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{gathered} (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{Z}) = (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = 0, \\ (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{V}) = (\underline{\mathfrak{X}} \mid \mathfrak{Y})(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{V}) + (\underline{\mathfrak{Y}} \mid \mathfrak{X})(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{V}) = 0, \end{gathered}$$

wofür man auch bequemer schreiben kann

$$(20) \qquad \mathfrak{U} = \hat{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}, \quad \underline{\mathfrak{U}} = (\underline{\mathfrak{X}} \mid \mathfrak{Y})\mathfrak{Y} + (\underline{\mathfrak{Y}} \mid \mathfrak{X})\mathfrak{X}.$$

Diese Gleichungen bleiben brauchbar, wenn der eine der vorgelegten Strahlen in einen Punktstrahl übergeht. Schliesslich heben wir hervor (vgl. S. 203):

Wenn X, Y, Z eigentliche reelle oder imaginäre Strahlen sind, so sagt die synektische Gleichung

$$(21) \qquad (XYZ) = 0$$

unter allen Umständen aus, dass diese Strahlen wenigstens einen eigentlichen oder Punktstrahl als gemeinsame Normale zulassen.

In Coordinaten zweiter Art wird dieselbe Lagenbeziehung ausgedrückt durch die Verbindung der Gleichung $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = 0$ mit der Forderung, dass irgend eine der Gleichungen

$$(22)$$
$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})(\underline{\mathfrak{Y}}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{X}) + (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Y})(\underline{\mathfrak{Z}}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{P}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \\
&= (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})(\underline{\mathfrak{Z}}\,|\,\mathfrak{Y})(\mathfrak{P}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})(\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\mathfrak{Y})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) = \\
&= (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Y})(\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{P}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) + (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})(\underline{\mathfrak{Y}}\,|\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{X})
\end{aligned}$$

identisch bestehen soll für alle $\mathfrak{A}_i\,\mathfrak{P}_k$. (Vgl. S. 259, 260.)

Parallelenbündel und Cylinder.

Wohl zu beachten ist der Unterschied zwischen dem Begriff des Parallelenbündels in der radial-projectiven Geometrie, und dem durch dasselbe Wort bezeichneten Begriff der mit dem Plücker'schen Liniencontinuum arbeitenden Geometrie der affinen Transformationen. Ist insbesondere der Scheitel ein Punkt oder Punktstrahl des absoluten Kegelschnitts, so hat man in der Geometrie der radial-projectiven Transformationen ∞^2 parallele accessorische Strahlen vor sich, darunter ein Büschel von ∞^1 Minimalstrahlen, und *diesen* entsprechen die ∞^2 Minimalgeraden, die nach der Vorstellungsweise der projectiven Geometrie das Bündel erfüllen. Beide Bündel sind abgeschlossene Continua, aber die sie erfüllenden Elemente sind schon, soweit sie eigentlich sind, einander *nicht* eindeutig zugeordnet. —

Es ergiebt sich aus dem Gesagten, dass eine analytische Mannigfaltigkeit von ∞^1 Strahlen nicht nothwendig eine Fläche bildet, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, der einen Ort von Punkten bedeutet. Da ein bequemes Wort zur Verfügung steht, so brauchen wir dieses, und nennen allgemein den fraglichen Ort ein *Band* von Strahlen. Sind die Strahlen eines Bandes nicht lauter Punktstrahlen, aber alle zu einander parallel, so nennen wir das Band *cylindrisch*, oder kürzer einen *Cylinder*. *Ordnung* eines algebraischen Cylinders wird man die Zahl der Strahlen nennen, die der Cylinder mit einem frei veränderlichen Parallelenbüschel seines Bündels gemein hat, d. h., da jeder Strahl mit der gehörigen Multiplicität gerechnet werden muss, den Grad ν der den Cylinder darstellenden Gleichung zwischen den durch

die Relation $(\mathfrak{X}|\mathfrak{X}) = 0$ verbundenen Coordinaten $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$. (Vgl. S. 275.)

Man achte darauf, dass z. B. der Begriff eines parabolischen Cylinders (der im Folgenden mehrfach zu verwenden sein wird) sich bereits dann mit dem gewöhnlich ebenso genannten Begriff nicht vollkommen deckt, wenn der Cylinder nicht ganz aus accessorischen Strahlen besteht: Der „parabolische Cylinder", wie er hier gefasst wird, enthält einen Punktstrahl.

Die einfachste Art von Cylindern sind die Parallelenbüschel.

Wir erläutern das Vorgetragene noch durch einige weitere einfache Anwendungen.

Strahlenbündel und Strahlenfeld.

Diese Figuren sind Congruenzen von Strahlen, die ihre charakteristischen Eigenschaften bei radial-projectiven Transformationen in der Regel nicht behalten. Die durch radiale Collineationen aus ihnen hervorgehenden allgemeineren Congruenzen werden wir später eingehend betrachten. Hier schon aber wollen wir einige specielle Bemerkungen einschalten, die uns deshalb besonders instructiv zu sein scheinen, weil sie, bei ganz *elementarer* Beschaffenheit der betrachteten Objecte, Licht werfen auf den tiefgehenden Unterschied, der zwischen den Begriffen (erstes natürliches) Strahlencontinuum und Plücker'sches Liniencontinuum besteht.

Wir erinnern zunächst daran, dass das Normalennetz eines reellen eigentlichen Strahls stets *zwei* (also nicht unendlich viele) conjugirt imaginäre Minimalstrahlen enthält (S. 289). Danach ist ziemlich selbstverständlich der Satz:

Zwei verschiedene Strahlenbündel mit reellen eigentlichen Scheiteln haben stets drei Strahlen mit einander gemein, nämlich den reellen Strahl, der ihre Scheitel verbindet, und ausserdem zwei conjugirt-imaginäre Minimalstrahlen.

Ebenso ergiebt sich ohne Weiteres:

Ein Strahlenbündel mit reellem eigentlichem Scheitel und das Strahlenfeld einer reellen Ebene, die nicht durch diesen Scheitel geht, haben gleichwohl Strahlen, und zwar deren zwei mit einander gemein, nämlich zwei conjugirt-imaginäre Minimalstrahlen.

Ferner:

Zwei Strahlenfelder in reellen nicht parallelen eigentlichen Ebenen haben einen eigentlichen und ausserdem noch einen Punktstrahl mit einander gemein.

Endlich heben wir hervor:

Zwei Strahlenfelder in parallelen aber verschiedenen reellen Ebenen enthalten nicht nur dieselben ∞^1 Punktstrahlen, sondern sie haben überdies zwei conjugirt-imaginäre Bänder („Büschel") von je ∞^1 Minimalstrahlen mit einander gemein.

Alle diese Aussagen lauten sehr verschieden von den entsprechenden, die sich auf das Plücker'sche Liniencontinuum beziehen. Der Leser möge sich solche Unterschiede an einfachen Beispielen deutlich machen, damit nicht später, wo verwickeltere Figuren betrachtet werden, unnöthige Schwierigkeiten entstehen.

Das Strahlenfeld ist schon im reellen Gebiete *nicht* identisch mit dem Geradenfeld der projectiven Geometrie: Denn statt der ∞^1 Punktstrahlen, die sich auf die ∞^1 Parallelenbüschel des Feldes vertheilen, enthält das Geradenfeld *eine* unendlich ferne Gerade. Beide Congruenzen können überhaupt nicht eindeutig und überall-stetig auf einander bezogen werden. Ein noch tiefer greifender Unterschied aber ergiebt sich, wenn man auch Strahlenfelder in imaginären Ebenen betrachtet. Während die Geradenfelder alle zu einander collinear, und wenn sie in eigentlichen Ebenen liegen, auch zu einander affin sind, besteht in unserer Strahlengeometrie folgender Satz:

Je zwei Strahlenfelder, die in solchen Ebenen liegen, die den absoluten Kegelschnitt nicht berühren, sind zu einander dual-projectiv (nämlich insbesondere congruent). Die genannten besonderen Strahlenfelder) aber sind nicht dual- oder radial-projectiv zu den übrigen, sondern zu Normalennetzen eigentlicher Strahlen.* Oder vielmehr: *Sie sind selbst Normalennetze eigentlicher Strahlen,* nämlich Normalennetze von Minimalstrahlen.

Die dual-projective Abbildung der Normalennetze allgemeiner Art auf die genannten speciellen hat den Charakter einer *Berührungstransformation.* Der Grenzübergang vom Strahlenfeld allgemeiner Art zum speciellen Normalennetz ist nicht ohne Interesse. Wie eine nähere Untersuchung zeigt, wird nämlich dabei ein Parallelenbündel abgespalten. Wir werden später einen Grenzübergang näher untersuchen, der dem besprochenen nahe verwandt ist, sich aber im reellen Gebiete abspielt (§ 39).

Planare und quadratische Strahlencomplexe. Strahlenbänder.

Unter den algebraischen Strahlencomplexen sind für unsere Untersuchung zwei Classen besonders wichtig. Es sind das erstens die

*) Man achte auch darauf, dass jedes dieser Strahlenfelder nicht nur *einen* Minimalstrahl, sondern deren ein ganzes Büschel enthält. Die Figur ist wesentlich verschieden von dem in derselben imaginären Ebene liegenden *Linienfeld.*

einfachsten aller Strahlencomplexe, die nämlich, die den Werthen $m = \mu = 1$, $\nu = 0$ entsprechen, also Complexe, deren Gleichungen die Form haben

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{X}_3 = 0. \tag{23}$$

Wir werden sie als *planare Complexe* bezeichnen.

Die *nicht accessorischen* Strahlen eines solchen Complexes sind offenbar identisch mit *den* Geraden eines speciellen Plücker'schen linearen Complexes, die nicht Minimalgerade sind; die Axe eines solchen Liniencomplexes ist irgend eine in der unendlich fernen Ebene gelegene Gerade, d. h. alle seine Geraden sind zu einer Ebene parallel.

Mit Hülfe der eingeführten Begriffe „Cylinder" und „planarer Complex" lässt sich ein wichtiger Satz einfach ausdrücken, dessen nahe liegenden Beweis wir dem Leser überlassen:

Mit jedem analytischen Band eigentlicher Strahlen, das kein Cylinder ist, und auch nicht im Normalennetz eines eigentlichen Strahls liegt, ist ein analytisches Band von Strahlen des zweiten Blattes invariant verbunden, das aus den „Strictionsstrahlen" des ersten besteht, d. h. von den gemeinsamen Normalen von consecutiven Strahlen allgemeiner Lage des ersten Bandes (und von den Grenzlagen dieser Normalen) gebildet wird.

Liegt das gegebene Band in keinem planaren Strahlencomplex, so ist auch das zweite Band kein Cylinder, und die Beziehung zwischen beiden ist umkehrbar. Jedes ist „Strictionsband" des anderen) **).*

Ein bekanntes Beispiel zweier solcher Strictionsbänder ist eine unebene abwickelbare Fläche und die zugehörige Binormalenfläche. Wir werden später eine specielle Figur der Art ausführlich zu betrachten haben. —

Die zweite der genannten Classen von algebraischen Strahlencomplexen umfasst alle Complexe, die dem Werthe $m = \mu + \nu = 2$ entsprechen, alle Strahlencomplexe also, deren Gleichungen (symbolisch) so geschrieben werden können:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})^2 + (\mathfrak{P}\,|\,\underline{\mathfrak{X}}) = \\ = \{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{X}_3\}^2 + \{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{P}_3 \mathfrak{X}_{33}\} = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

*) Für die Beziehung zweier solcher Bänder brauchen wir *nicht* das Wort „reciprok". Als „reciproke" Figur eines (nicht cylindrischen) Bandes eigentlicher Strahlen betrachten wir vielmehr den Complex aller Strahlen, die auf denen des Bandes senkrecht stehen (vgl. § 34).

**) Der Verfasser hat in der Litteratur einen incorrect formulirten Satz desselben Grundgedankens als von Bour herrührend angeführt gefunden.

Wir nennen sie *quadratische Strahlencomplexe.* Zu ihnen gehört zunächst der accessorische Complex. Abgesehen von diesem einen kann jeder quadratische Strahlencomplex, soweit seine nicht accessorischen Strahlen in Frage kommen, mit einem Plücker'schen quadratischen Liniencomplex identificirt werden. Er ist aber, nachdem man ihn durch Minimalgerade zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt hat, ein *specieller* quadratischer Liniencomplex, da der allgemeine von neunzehn, unser Complex aber nur von acht Constanten abhängt. Es fragt sich, worin seine Besonderheit besteht. Eine Antwort ist nicht schwer zu finden. Sie ist enthalten in dem folgenden Satz:

Wenn jeder Complexkegel eines quadratischen Liniencomplexes, der seinen Scheitel auf dem absoluten Kegelschnitt hat, die unendlich ferne Ebene als Theil enthält, während sein zweiter ebener Bestandtheil den absoluten Kegelschnitt berührt, so sind die Geraden des Complexes, soweit sie nicht Minimalgerade sind, identisch mit den nicht accessorischen Strahlen eines quadratischen Strahlencomplexes.

Die hiermit gegebene Zuordnung zwischen speciellen Liniencomplexen und den quadratischen Strahlencomplexen wird vollständig, d. h., es werden beide Complexcontinua abgeschlossen und gegenseitig-eindeutig einander zugeordnet, wenn man auf der einen Seite den Minimalcomplex, auf der anderen den accessorischen Complex hinzufügt, und auch diese beiden einander zuordnet.

Hierin liegt schon, dass die unendlich ferne Ebene zur Singularitätenfläche des Liniencomplexes gehören muss, dass jede uneigentliche Gerade Complexlinie ist. Ferner betrachten wir als in unserer Aussage *eingeschlossen* den möglichen Fall, dass der zweite ebene Bestandtheil des Complexkegels ebenfalls die unendlich ferne Ebene ist, oder dass dieser Kegel, für einzelne Punkte des absoluten Kegelschnittes, überhaupt unbestimmt wird. —

Während hiernach ein specieller quadratischer Liniencomplex hier als ein in seiner Art „allgemeines" Gebilde betrachtet werden kann, erscheint umgekehrt natürlich der sogenannte *allgemeine* quadratische Liniencomplex in der radial-projectiven Geometrie als *specieller Fall* einer viel umfassenderen Classe von Strahlencomplexen. Diese haben wir indessen hier nicht zu betrachten. *Wir gehen weniger darauf aus, den Stoff der Geometrie selbst zu erweitern, als vielmehr die Kenntniss vorhandenen Stoffes durch Anwendung neuer Methoden zu vertiefen.*

Analytische Strahlencongruenzen.

In unseren ferneren Untersuchungen werden wir es vielfach mit Strahlencongruenzen zu thun haben. Wir schicken daher einige summarische Bemerkungen auch über diesen Gegenstand voraus.

Die *analytischen* Strahlencongruenzen, deren Strahlencoordinaten $\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ zweiter Stufe als analytische Functionen zweier wesentlicher Parameter s, t darstellbar sind, lassen sich augenscheinlich auf vier Familien vertheilen.

Die eigentlichen Strahlen einer Congruenz der ersten Familie haben ∞^2 verschiedene Richtungen; sie können nicht auf ∞^1 Cylinder vertheilt werden. Diese Familie ist dadurch charakterisirt, dass der Ausdruck $\left(\mathfrak{X}\,\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s}\,\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right)$ nicht identisch verschwindet. Als unabhängige Parameter kann man die Verhältnissgrössen $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ wählen. Die Strahlen einer Congruenz der zweiten Familie können im Gegensatz dazu auf eine einzige Weise zu ∞^1 Cylindern angeordnet werden. Darunter sind ausgezeichnet Congruenzen, deren Strahlen zu Parallelenbüscheln angeordnet werden können. Diese gehören der Mehrzahl nach paarweise als *reciprok* zusammen: Die Parallelenbüschel, die zu den ∞^1 Büscheln der Congruenz reciprok sind, erfüllen eine zweite Congruenz gleicher Art. Ausgenommen sind jedoch die in planaren Complexen enthaltenen *cylindrischen Congruenzen*, die, deren Strahlen je zwei consecutive Erzeugende eines Cylinders (s. S. 300) orthogonal schneiden, und ausserdem die Normalennetze eigentlicher Strahlen, die man als Grenzfälle cylindrischer Congruenzen betrachten kann. Die dritte Familie besteht lediglich aus den ∞^2 Parallelenbündeln, die vierte allein aus dem Feld aller Punktstrahlen.

Unter den besonderen Congruenzen der zweiten Familie, deren Strahlen auf Parallelenbüschel vertheilbar sind, haben sehr merkwürdige Eigenschaften *die „synektischen" Congruenzen. Diese sind dadurch charakterisirt, dass die dualen Coordinaten X_i eines eigentlichen Congruenzstrahls als synektische Functionen* (S. 199) *eines dualen Parameters $s + t\varepsilon$ dargestellt werden können.* Da dieser Gegenstand mit unserem sonstigen Stoff nur lose zusammenhängt, behalten wir uns eine eingehendere Untersuchung für eine andere Gelegenheit vor, und beschränken uns hier darauf, ohne Beweis und in aller Kürze einige der ersten Sätze mitzutheilen, denen man in der Theorie dieser Congruenzen begegnet*).

Damit eine analytische Congruenz synektisch sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die einem Congruenzstrahl allgemeiner Lage benachbarten Strahlen dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls angehören.

Die Gesammtheit dieser letzten Strahlen (und ihrer Grenzlagen) bildet dann eine neue synektische Congruenz (des zweiten Blattes),

*) Die folgenden Sätze werden weiterhin nicht benutzt. Sie dienen aber dazu, zu zeigen, wie einige der behandelten besonderen Gegenstände sich in eine umfassendere Theorie einordnen lassen.

oder einen Cylinder, oder endlich, sie fallen alle zusammen. Im ersten Falle sagen wir, die beiden Congruenzen seien *reciprok*. Sie werden von reciproken Parallelenbüscheln gebildet. Hierher gehören die auf S. 293 näher bezeichneten conischen Congruenzen, darunter die absolute. Im zweiten Falle ist die vorgelegte Congruenz eine beliebige *cylindrische* Congruenz, im dritten ist sie das Normalennetz eines eigentlichen Strahls. Das Parallelenbündel ist *keine* synektische Congruenz.

Jedes analytische Band eigentlicher Strahlen, das kein Cylinder ist, liegt in einer einzigen synektischen Congruenz. Liegt das Band nicht in einem planaren Complex, so liegt das zugehörige Strictionsband in einer zweiten synektischen Congruenz, die zur ersten reciprok ist.

Die Strahlen zweier reciproker synektischer Congruenzen sind in der Weise gepaart, dass ein jeder Strahl allgemeiner Lage der einen Congruenz Strictionsstrahl der analytischen Bänder ist, die in der anderen Congruenz liegen, und den zugeordneten Strahl enthalten, und umgekehrt.

Zur Euklidischen Geometrie werden die synektischen Congruenzen in engere Beziehung gebracht durch folgenden Satz:

*Wenn eine synektische Congruenz nicht im accessorischen Complex liegt, so sind ihre Strahlen allgemeiner Lage Normalen zu einer Schaar von parallelen abwickelbaren analytischen Flächen. Umgekehrt gehört zu jeder solchen Fläche, mit alleiniger Ausnahme der Ebene, eine synektische Congruenz, die ausserhalb des accessorischen Complexes mit der Normalencongruenz der Fläche zusammenfällt**).

Die reellen Strahlen eines Paares von reciproken reellen synektischen Congruenzen können immer dadurch erzeugt werden, dass man eine Ebene mit zwei darin gelegenen reciproken Parallelenbüscheln auf einer abwickelbaren Fläche (ohne Gleitung) rollen oder um einen in ihr gelegenen Strahl sich drehen lässt**). Auf die zuletzt genannte Art

---

*) Abwickelbar nennen wir *nur* solche Flächen, deren quadrirtes Bogenelement auf die Form dx^2+dy^2 gebracht werden kann, also *nicht* auch die, deren Bogenelement ein vollständiges Differential ist.

Sätze über synektische Congruenzen hat bereits Herr R. de Saussure aufgestellt. Diese beruhen indessen auf unzulässigen Definitionen, und sind zum Theil unverständlich oder unrichtig. Auch die Herren A. P. Kotjelnikoff und Seiliger haben den Gegenstand behandelt, aber, wie es scheint, aus anderen Gesichtspunkten. Vgl. die Citate auf S. 208, ferner des Verfassers Arbeit, Leipz. Ber. 1899, S. 67, und die auf S. 229 citirte Festschrift (abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1902), endlich einen Vortrag über die radialprojective Geometrie (ebenda, S. 97 u. ff.).

**) Ausserdem entstehen so noch die reellen cylindrischen Congruenzen und Normalennetze, zusammen mit den zugehörigen Parallelenbündeln.

entstehen natürlich nur ∞^5 specielle, und zwar conische Congruenzen, darunter die ∞^4 auf S. 294 bezeichneten.

Zwei synektische Congruenzen heissen *synektisch* auf einander bezogen oder abgebildet, wenn in einem gewissen Bereich der duale Parameter $s' + t'\varepsilon$ der einen eine synektische Function (S. 199) des Parameters $s + t\varepsilon$ der anderen ist. Reciproke synektische Congruenzen sind durch die erörterte Paarung synektisch bezogen.

Um zwei synektische Congruenzen (oder Stücke von solchen) synektisch auf einander abzubilden, kann man irgend ein von einem Parallelenbüschel verschiedenes analytisches Band in der einen einem ebensolchen Band in der anderen zuordnen, nach einem beliebigen analytischen Gesetz. Dadurch ist dann die ganze Abbildung vollkommen bestimmt. Sie ist im Gebiete ihres regulären Verhaltens so beschaffen, dass die Parallelenbüschel beider Congruenzen einander entsprechen, und projectiv so aufeinander bezogen sind, dass ihre Punktstrahlen einander entsprechen.

Ist, in einer gewissen Umgebung eines bestimmten Strahls, eine synektische Congruenz synektisch auf zwei andere bezogen, so sind damit auch diese synektisch auf einander bezogen. Diese an sich triviale Bemerkung erhält Interesse dadurch, dass die synektische Beziehung unter Umständen und sogar in der Regel auch auf eine sehr einfache Art geometrisch erklärt werden kann:

Wenn zwei (nicht nothwendig verschiedene, aber) nicht demselben planaren Complex angehörige synektische Congruenzen derart synektisch auf einander bezogen sind, dass entsprechende Strahlen nicht immer parallel sind, so bestimmen die gemeinsamen Normalen zugeordneter nicht paralleler Strahlen (und deren Grenzlagen) eine dritte synektische Congruenz, die ebenfalls auf die beiden ersten synektisch bezogen ist.

Ist die dritte zu den beiden ersten „perspective" synektische Congruenz nicht gerade identisch mit der reciproken von einer der gegebenen, so definirt sie (natürlich in der Regel mehrdeutig) deren synektische Beziehung.

Dieser Satz ist nun umkehrbar:

Wenn zwei synektische Congruenzen (innerhalb eines gewissen Gebietes) auf eine dritte durch die Forderung analytisch abgebildet sind, dass zugeordnete Strahlen einander senkrecht schneiden sollen, so sind damit alle drei Congruenzen synektisch auf einander abgebildet.

Die dritte Congruenz kann also *in weitestem Umfang willkürlich* angenommen werden. *Ganz* willkürlich ist sie aber nicht. Denn erstens darf sie, wie bemerkt, nicht mit der reciproken von einer der beiden ersten Congruenzen zusammenfallen (falls diese existirt), zweitens ist zu beachten, dass wegen der Möglichkeit natürlicher Grenzen

die Voraussetzung des letzten Satzes unter Umständen überhaupt nicht erfüllt werden kann.

Die Lücke, die hiernach in der geometrischen Erklärung der synektischen Abbildung noch bleibt, wird ausgefüllt durch folgende nahe liegende Bemerkung:

Dual- (aber nicht sonstwie radial-) projectiv-bezogene synektische Congruenzen sind stets auch synektisch auf einander bezogen.

Offenbar genügt eine geeignete duale Collineation (z. B. schon eine Bewegung) der einen Congruenz, um die zuvor bemerkten Ausnahmefälle wegzuschaffen.

Wir ersehen aus dem Vorhergehenden, dass der später noch näher zu betrachtende Begriff „dual-projective Normalennetze" sich dem Begriff „synektisch-bezogene synektische Congruenzen" unterordnet. Ebenso aber kann der Begriff „Duale Collineation" einem umfassenderen „Synektische Transformation im Strahlencontinuum" untergeordnet werden. Hierauf gehen wir indessen nicht weiter ein*).

Mit Rücksicht auf den Inhalt unserer beiden ersten Abschnitte fügen wir noch hinzu:

Wenn zwei consecutive Strahlen allgemeiner Lage einer dem accessorischen Complex nicht angehörigen analytischen Congruenz einen Motor definiren, der die Eigenschaften eines vollständigen Differentials hat, so ist die Congruenz entweder synektisch, oder ein Parallelenbündel, in beiden Fällen also Normalencongruenz einer — übrigens beliebigen — Schaar paralleler abwickelbarer Flächen. —

Ganz abweichend von der Plücker'schen Liniengeometrie verhält sich unsere Strahlengeometrie insofern, als es unendlich viele Familien irreducibeler *algebraischer* Congruenzen giebt, die *ganz* aus eigentlichen Strahlen bestehen. Congruenzen dieser Eigenschaft lassen sich auf folgende Weise erzeugen:

Man erkläre einen Parameter $\mathfrak{X}_0$ als irreducibele ganze algebraische und homogene Function ersten Grades von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$. Man setze sodann die Grössen $\mathfrak{X}_{kk}$ gleich ganzen rationalen Functionen zweiten Grades von $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$, und wähle die Coefficienten so, dass die Gleichung $(\mathfrak{X}\,|\,\underline{\mathfrak{X}}) = 0$ identisch erfüllt ist.

Die einfachsten unter diesen Congruenzen, nämlich alle nur aus eigentlichen Strahlen bestehenden algebraischen Congruenzen, die in jedem Parallelenbündel *einen* Strahl enthalten, spielen eine wichtige

*) Vgl. die zuletzt genannte Arbeit, S. 119.

Rolle in unserer Theorie; sie werden von uns eingehend behandelt werden. (§ 30, 33, 37, 38.)

Es darf als wahrscheinlich betrachtet werden, dass der zuletzt beschriebene Process alle irreducibelen, und damit also *alle* algebraischen Strahlencongruenzen liefert, die ganz aus eigentlichen Strahlen bestehen. Der Beweis würde, in einem besonderen Falle, die Ausdehnung des Noether'schen Fundamentalsatzes über ebene Curven auf den Raum verlangen. —

Der nunmehr vollständig erklärte und durch einige Anwendungen erläuterte Begriff des *Strahls* fehlt wohl vollständig in der bisherigen Litteratur und ebenso daher auch der Begriff der *Hauptaxe eines Gewindes*, wie wir ihn gefasst haben. Dieser letzte Begriff ist aber unentbehrlich, wenn man Sätze, die sich auf den Zusammenhang zwischen Oertern von Gewinden und den Oertern von deren „Hauptaxen" beziehen, correct, ohne unnöthige Beschränkungen, und doch nicht auf eine allzuverwickelte Weise aussprechen will. Der Leser möge sich z. B. deutlich machen, wie der auf S. 288 formulirte Satz gefasst werden muss, wenn man als Hauptaxen auch imaginärer Gewinde nicht Strahlen, sondern *gerade Linien* erklären will, und welche Verwickelungen sich dann ergeben müssen, wenn man *Systeme* von Gewinden betrachtet. Dass solche Verwickelungen in der bisherigen Litteratur nicht hervorgetreten sind, liegt lediglich daran, dass man auf die Gewinde eines Systems, deren „Hauptaxen" ein singuläres Verhalten zeigen, nicht genügend geachtet hat, und dass man in Folge dessen es unterlassen hat, den formulirten Sätzen die nöthigen Einschränkungen hinzuzufügen. —

Wir fügen noch eine Bemerkung über die absolute Congruenz hinzu. Die eigentlichen Minimalstrahlen sind nach dem Vorgetragenen eindeutig zugeordnet den eigentlichen Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren, und diese Beziehung wird nicht zerstört durch die siebengliedrige Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen. Die genannte Mannigfaltigkeit von ∞^2 Ebenen und die zugehörige Gruppe sind correlativ zu den Punkten eines Kegels zweiten Grades und zu dessen Gruppe, die wir am Schluss des vorigen Paragraphen gelegentlich betrachtet haben. Die eigentlichen Strahlen der absoluten Congruenz können also auf *zwei* Arten zu einem (in Bezug auf die Aehnlichkeitstransformationen) natürlichen Continuum ergänzt werden. Man erkennt ohne Weiteres, dass die absolute Congruenz als Ganzes dem *zweiten* der genannten Continua entspricht.

§ 29.

Classification der linearen Systeme von Gewinden.

Wir thun nunmehr einen ersten Schritt in der in der Einleitung (S. 226) bezeichneten Richtung.

Die Gruppe Γ_{18}, deren Raumelement das Gewinde ist, und jede ihrer Untergruppen, insbesondere Γ_{17}, Γ_{16}, giebt Veranlassung zur Entstehung unendlich vieler Aequivalenzprobleme, indem jedesmal in eine *Classe* solche Objecte (Aggregate von Gewinden) zu stellen sind, die durch eine Transformation von Γ_{18} (Γ_{17}, Γ_{16}) in einander über-

geführt werden können, und daher dieselben durch Transformationen der jedesmal betrachteten Gruppe nicht zerstörbaren Eigenschaften haben.

Wir wählen als Objecte unserer Transformationen die *linearen*, d. h. durch lineare Gleichungen zwischen Gewindecoordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ oder $\mathfrak{U}_{ik}$ darstellbaren Systeme von Gewinden.

Wir nennen, wie üblich, *reciprok* zwei lineare Systeme von Gewinden der Stufen m und $6-m$, wenn jedes Gewinde des einen Systems conjugirt ist zu jedem Gewinde des anderen. Durch diese Beziehung ist eine (längst bekannte und übrigens selbstverständliche) Anordnung aller dieser Systeme zu Paaren gegeben. Unter Verwendung einer von Herrn Th. Reye herrührenden Terminologie*) vertheilen wir nunmehr die beiden Bestandtheile irgend eines solchen Paares auf die beiden Schichten der doppelt überdeckten Gewindemannigfaltigkeit nach folgendem Schema, das zugleich die Erklärung der erwähnten Terminologie enthält:

(m)	*Erste Schicht.*	$(6-m)$	*Zweite Schicht.*
0.	—	6.	Alle Gewinde.
1.	Ein Gewinde.	5.	Gewebe.
2.	Büschel von Gewinden.	4.	Gebüsch.
3.	Bündel von Gewinden.	3.	Bündel.
4.	Gebüsch von Gewinden.	2.	Büschel.
5.	Gewebe von Gewinden.	1.	Ein Gewinde.
6.	Alle Gewinde.	0.	—

In dieser Aufzählung sind natürlich die ausgearteten Gewinde oder Liniengebüsche mit enthalten. Diese brauchen hier im Ganzen von den Gewinden allgemeiner Art deshalb nicht unterschieden zu werden, weil sie eine nicht-invariante Mannigfaltigkeit bilden. Wohl aber ist wesentlich für unsere Betrachtungen die sonst nicht übliche Eintheilung der Gewinde in eigentliche und uneigentliche (S. 288).

Da durch contragrediente Transformationen von Γ_{18} reciproke lineare Systeme von Gewinden in ebensolche übergeführt werden, so

*) Wir weichen ab im Gebrauche des Wortes Stufe, das von den Herren Reye und R. Sturm im Sinne von Dimension verwendet wird. — Dieser letzte Gebrauch scheint uns weder historisch gerechtfertigt, noch sachlich empfehlenswerth zu sein. Für die um die Einheit vermehrte Dimensionenzahl ist ein besonderes Wort häufig erwünscht, und es ist in der algebraischen Geometrie und in der Invariantentheorie (seit Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844) das Wort Stufe dafür *allgemein* üblich; ein *zweites* Wort für Dimension aber ist ganz überflüssig.

Ueber den Gebrauch des Ausdrucks „conjugirt“ s. S. 155.

enthält die angeführte Zusammenstellung bereits eine wesentliche Erleichterung der genannten Classificationsaufgaben: Man braucht offenbar nur die Werthe $m = 1, 2, 3$ zu betrachten*). Eine weitere Erleichterung beruht darauf, dass die Gruppe Γ_{18} eine eingliedrige invariante Untergruppe Γ_1 hat. Nennen wir, wie auch bisher schon geschehen, *coaxial* allgemein solche eigentliche Gewinde, deren duale Coordinaten X_i durch Multiplication mit einem dualen Factor $\sigma + \tau\varepsilon$ $(\sigma \neq 0)$ in einander übergeführt werden können, so können wir einen bereits in § 26 (S. 238) formulirten Satz nunmehr so erweitern:

Contragrediente, oder — was in diesem Falle dasselbe ist — entgegengesetzte, Transformationen der Gruppe Γ_1 führen reelle oder imaginäre coaxiale eigentliche Gewinde der einen wie der anderen Schicht in ebensolche über, und sie lassen jedes uneigentliche Gewinde in Ruhe.

Danach ist es z B. unmöglich, dass zwei reciproke Systeme beide eigentliche Gewinde enthalten, und dass zugleich die Gewinde nur des einen Systems auf coaxiale Büschel vertheilt werden können; es bleiben vielmehr nur folgende Möglichkeiten, die alle, wie sich zeigen wird, Wirklichkeiten entsprechen:

A) Die beiden reciproken Systeme bestehen ausschliesslich aus uneigentlichen Gewinden.

B) Das eine System enthält nur uneigentliche Gewinde, und die eigentlichen Gewinde des anderen lassen sich auf coaxiale Büschel vertheilen.

C) Beide Systeme enthalten eigentliche Gewinde, und diese lassen sich auf coaxiale Büschel vertheilen.

D) Beide Systeme enthalten eigentliche Gewinde und gehören zu einer Schaar von ∞^1 Paaren reciproker Systeme, deren einzelne Paare durch contragrediente Transformationen von Γ_1 unter einander vertauscht werden.

Keine dieser Eigenschaften wird durch contragrediente Transformationen von Γ_{18} zerstört.

Wie auch die zu suchende Classification mit Bezug auf die Gruppen Γ_{16}, Γ_{17}, Γ_{18} sonst beschaffen sein möge, offenbar sind *zwei Zahlen* mit jeder Classe äquivalenter Systeme invariant verbunden. Die eine, die

*) Dasselbe gilt in Bezug auf Γ_{35} (S. 237). Das zu dieser umfassenderen Gruppe gehörige Classificationsproblem ist aber trivial, jedem Werthe von m entspricht nur eine Classe linearer Gewindemannigfaltigkeiten. — Die *cogredienten* Transformationen von Γ_{35}, die reciproke Systeme von Gewinden in ebensolche überführen, sind die Collineationen und Correlationen des Raumes. Auch in diesem Falle kann man die zugehörige Classification der linearen Gewindemannigfaltigkeiten fast ohne Weiteres angeben. Sie ist längst bekannt.

wir mit μ bezeichnen wollen, giebt an, wieviele linear-unabhängige uneigentliche Gewinde ein jedes System der betrachteten Classe enthält. Die zweite Zahl ν bestimmt die Dimensionenzahl der Mannigfaltigkeit von Büscheln coaxialer eigentlicher Gewinde, die in dem System enthalten sind. Wir werden $\nu = 0$ setzen, wenn kein solches Büschel vorhanden ist, und $\nu = 1$, wenn es eine von Null verschiedene endliche (und zwar, wie sich finden wird, stets der *Einheit* gleiche) Zahl derartiger Büchel giebt. Sind ihrer ∞^1, ∞^2, ... vorhanden, so setzen wir $\nu = 2, 3, \ldots$.

Wir werden weiterhin jedem zu betrachtenden System eine Charakteristik $[\mu, \nu]$ *ertheilen.* Damit haben wir bereits ein erstes, und, wie wir sehen werden, annähernd ausreichendes (ja mit Bezug auf die Gruppen Γ_{17} und Γ_{18} sogar völlig ausreichendes) Eintheilungsmerkmal für Systeme gegebener Stufe.

Bei der fraglichen Classification selbst verfahre man wie folgt.

Man stelle erstens jedes Gewinde dar durch rechtwinklige (Plückersche) Coordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$, die aber, der leichteren Uebersicht und Rechnung wegen, am Besten zu dualen Verbindungen

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}\varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31}\varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12}\varepsilon$$

zusammengefasst werden.

Man hebe ferner aus einem System m^{ter} Stufe m linear-unabhängige Gewinde heraus. Diese bilden, wie wir sagen wollen, eine *Basis* des Systems. Aus den Gewinden einer solchen Basis, die wir — nunmehr Gewinde, und nicht Coordinaten durch Indices unterscheidend — kurz mit $X_1 \ldots X_m$ (oder, bei Systemen zweiter Schicht, mit $U_1 \ldots U_{6-m}$) bezeichnen wollen, kann jedes Gewinde des Systems, mit Hülfe *scalarer* Verhältnissgrössen $\sigma_1 : \sigma_2 : \cdots : \sigma_m$ in der Form

$$X = \sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + \cdots + \sigma_m X_m \tag{1}$$

abgeleitet werden. Die in der Wahl der Basis vorhandene Willkür wird man natürlich dazu benutzen, der Basis selbst eine möglichst einfache Gestalt zu ertheilen.

Hierauf wende man auf alle Elemente der Basis, und damit auch auf das sie verbindende lineare System von Gewinden, eine geeignete Transformation der Gruppe Γ_{16} an, um damit die Basis auf eine durch solche Transformationen nicht weiter zu vereinfachende *„canonische Form“* zu bringen. Der ganze anzuwendende Process, dessen Durchführung wir übrigens dem Leser überlassen müssen*), wird so beschaffen sein, dass

*) Bei dem verwandten aber verwickelteren Problem der in Bezug auf Bewegungen äquivalenten linearen Systeme von Gewinden werden wir die Lösungsmethode im Einzelnen vorführen (§ 36).

alle möglichen Classen in Bezug auf die Gruppe Γ_{16} äquivalenter Systeme umfasst werden, und auch Sicherheit besteht, dass keine Classe mehrmals vorgeführt wird. — Bei der Aufstellung der analytischen Merkmale für die verschiedenen Classen werden wir uns einer Schreibart bedienen, die der Quaternionentheorie entlehnt ist. Wir werden nämlich den scalaren Bestandtheil irgend einer dualen Grösse durch ein vorgesetztes **S**, und den vectoriellen Bestandtheil durch ein vorgesetztes **V** bezeichnen, so dass

$$(2) \qquad \mathbf{S}\mathfrak{a} = \mathbf{S}(a + \alpha\varepsilon) = a, \quad \mathbf{V}\mathfrak{a} = \mathbf{V}(a + \alpha\varepsilon) = \alpha\varepsilon$$

wird.

Die römischen Ziffern I...V bedeuten die Stufenzahlen. Dahinter steht in Klammern die jeweilige Charakteristik $[\mu, \nu]$. Die Dimensionszeichen ∞^r geben jedesmal die Mannigfaltigkeit der einzelnen Systeme an, die Zahl der wesentlichen Parameter, von denen diese Systeme abhängen. Die Zeichen A, B, C, D weisen auf die Eigenschaften hin, von denen auf Seite 311 die Rede war.

Enthält ein lineares System m^{ter} Stufe von Gewinden neben eigentlichen auch uneigentliche Gewinde ($m > \mu > 0$), so ist ein „Ort von Hauptaxen" der Gewinde des Systems nicht ohne Weiteres definirt, und bedarf daher einer besonderen Erklärung. Wir verstehen darunter den Ort der Hauptaxen der *eigentlichen* Gewinde des Systems, und rechnen dazu die Grenzlagen solcher Hauptaxen im ersten regulären Strahlencontinuum. Ein Büschel coaxialer Gewinde z. B. hat danach nur *eine* Hauptaxe: Die ∞^2 Hauptaxen, die dem uneigentlichen Gewinde des Büschels zugehören, werden von uns besonders aufgeführt.

I, V. Systeme erster und fünfter Stufe.

a) $\qquad \mathrm{I}, [0, 0]. \mid \mathrm{V}, [2, 3]. \qquad D.\infty^5.$

Ia) *Das eigentliche Gewinde* I, [0, 0]. Sie alle sind bereits gegenüber Transformationen von Γ_{16} äquivalent, und bilden daher eine einzige Classe, in Bezug auf jede der drei Gruppen Γ_{16}, Γ_{17}, Γ_{18}. Die eingliedrige Basis X_1 genügt der Bedingung

$$\mathbf{S}(UX_1) \neq 0,$$

d. h. die scalaren Bestandtheile der drei dualen Coordinaten von X_1 verschwinden nicht alle zugleich. Canonische Form der Basis:

$$\{1, 0, 0\}.$$

Va) *Das eigentliche Gewebe von Gewinden* V, [2, 3].

Die fünfgliedrige Basis $U_1 \ldots U_5$ enthält mindestens drei linear unabhängige eigentliche Gewinde: Es verschwinden nicht alle $\mathbf{S}(U_i U_k U_l)$. Canonische Form der Basis:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{array}\right\}.$$

b) I, [1, 0]. | V, [3, 4]. $B \,.\, \infty^2$.

Ib) *Das uneigentliche Gewinde* I, [1, 0]. $\mathbf{S}(UX_1) = 0$. *Eine* Classe, gegenüber Γ_{16}. Canonische Basis:

$$\{\varepsilon, 0, 0\}.$$

Vb) *Das uneigentliche Gewebe von Gewinden* V, [3, 4]. Alle $\mathbf{S}(U_i U_k U_l) = 0$. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right\}.$$

II, IV. Systeme zweiter und vierter Stufe.

a) II, [0, 0]. | IV, [1, 1]. $D \,.\, \infty^8$.

IIa) *Büschel von Gewinden mit nicht parallelen Hauptaxen,* II, [0, 0]. $\mathbf{S}(X_1 X_2 Y) \neq 0$. Eine einzige Classe (gegenüber Γ_{16}), zu der die ebenen Linienbüschel mit eigentlichem Scheitel, oder vielmehr die durch sie bestimmten Büschel ausgearteter Gewinde gehören. Canonische Form der Basis:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right\}.$$

IVa) *Das reciproke Gebüsch* IV, [1, 1]. Jede Basis $U_1 \ldots U_4$ enthält mindestens drei linear-unabhängige eigentliche Gewinde: Es verschwinden nicht alle $\mathbf{S}(U_i U_k U_l)$. Canonische Form der Basis:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right\}.$$

b) II, [1, 0]. | IV, [2, 2]. $D \,.\, \infty^6$.

IIb) *Büschel von Gewinden mit parallelen, aber nicht identischen Hauptaxen* II, [1, 0]. $\mathbf{S}(X_1 X_2 Y) = 0$, aber $\mathbf{V}(X_1 X_2 Y) \neq 0$. *Eine*

Classe, in der das Büschel von parallelen *Geraden* allgemeiner Art, d. h. das zugehörige Büschel ausgearteter Gewinde gehört. *Nicht* hierher zu stellen sind jedoch die besonderen Büschel von Minimalgeraden, deren Ebene den absoluten Kegelschnitt berührt. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

IVb) *Das reciproke Gebüsch* IV [2, 2]. Es verschwinden alle $\mathbf{S}(U_iU_kU_l)$, aber nicht alle $\mathbf{V}(U_iU_kU_l)$. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

c) II, [1, 1]. | IV, [2, 3]. $C.\infty^4$.

IIc) *Büschel coaxialer Gewinde* II, [1, 1]. $(X_1X_2Y) = 0$, aber nicht zugleich $\mathbf{S}(UX_1)=0$, $\mathbf{S}(UX_2)=0$. *Eine* Classe, zu der die besonderen Büschel von parallelen Minimalgeraden gehören, deren Ebene den absoluten Kegelschnitt berührt. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ \varepsilon, & 0, & 0 \end{matrix}\right\}.$$

IVc) *Das reciproke Gebüsch* IV, [2, 3]. Es verschwinden alle $(U_iU_kU_l)$, aber nicht alle $\mathbf{S}(U_iU_kV)$. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

d) II, [2, 0]. | IV, [3, 3]. $B.\infty^2$.

IId) *Büschel uneigentlicher Gewinde* II, [2, 0]. $\mathbf{S}(UX_1) = 0$, $\mathbf{S}(UX_2) = 0$. *Eine* Classe. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

IVd) *Das reciproke Gebüsch* IV, [3, 3]. Alle $\mathbf{S}(U_iU_kV) = 0$, aber nicht alle $\mathbf{V}(U_iU_kV) = 0$. Canonische Basis:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

III, III. Systeme dritter Stufe.

a) III, [0, 0]. | III, [0, 0], $D \cdot \infty^9$.

IIIa) *Das aplanare Bündel von Gewinden**). $\mathbf{S}(X_1 X_2 X_3) \neq 0$. ∞^1 *Classen gegenüber Transformationen von* Γ_{16}. Canonische Basis:

$$\left\{ \begin{matrix} 1+p\varepsilon, & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1+p\varepsilon, & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1+p\varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

In der canonischen Form schicken die Gewinde des Bündels ihre Hauptaxen durch denselben eigentlichen Punkt o (vgl. S. 297 Nr. 17), sie alle haben dann denselben Parameter p, und der Werth von p ist eine absolute Invariante der Classe. Die zu verschiedenen Werthen von p gehörigen Bündel sind gegenüber Transformationen von Γ_{16} *sämmtlich* verschieden. Das reciproke Bündel hat dieselben Eigenschaften, mit der Abänderung, dass bei der canonischen Form der Parameter p durch $-p$ zu ersetzen ist. Es gehört zur Basis:

$$\left\{ \begin{matrix} 1-p\varepsilon, & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1-p\varepsilon, & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1-p\varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

Gegenüber Transformationen von Γ_{17} sind die genannten ∞^1 Classen aplanarer Bündel von Gewinden mit einander äquivalent. Durch eine geeignete Transformation von Γ_1 kann man nämlich den Parameter p zum Verschwinden bringen, und damit beide Bündel zugleich auf die canonische Basis („Doppel-Basis“)

$$\left\{ \begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix} \right\}$$

zurückführen. Das Bündel von Gewinden wird dann ein gewöhnliches Linienbündel mit eigentlichem Scheitel o, oder vielmehr, es besteht aus allen Liniengebüschen, deren Axen die Geraden des genannten Bündels o sind. Wir haben also nur *eine* Classe in Bezug auf Γ_{17} oder Γ_{18} äquivalenter Gewindebündel vor uns.

b) III, [1, 0]. | III, [1, 0]. $D \cdot \infty^8$.

IIIb) *Das planare Bündel von Gewinden.* $\mathbf{S}(X_1 X_2 X_3) = 0$, aber $\mathbf{V}(X_1 X_2 X_3) \neq 0$. Eine einzige Classe, bereits in Bezug auf Γ_{16}. Canonische Basis:

---

*) Der Name wird weiterhin erklärt werden.

$$\left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\}.$$

Die Gewinde des Bündels sind in der canonischen Form sämmtlich in Liniengebüsche ausgeartet, deren Axen ein ebenes Geradenfeld erfüllen. Das Gleiche gilt von dem reciproken Bündel, das zu derselben Basis („Doppel-Basis“) gehört.

Die Gesammtheit aller Gewinde, die einen bestimmten endlichen Parameter haben, und deren Hauptaxen in einer Ebene liegen, *die den absoluten Kegelschnitt nicht berührt*, bildet, nachdem man sie durch analytische Fortsetzung zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt hat, ein planares Bündel. Das reciproke Bündel gehört zur selben Ebene und zum entgegengesetzten Parameterwerth. (Vgl. IIIa und IIIc.)

c) $\quad \text{III}, [1, 1]. \mid \text{III}, [1, 1]. \qquad D \,.\, \infty^7.$

IIIc) *Bündel von Gewinden, die ihre Hauptaxen in dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls haben**). $(X_1 X_2 X_3) = 0$, aber nicht alle $\mathbf{S}(X_i X_k Y) = 0$. *Eine* Classe, deren Basis auf die Form

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \end{matrix}\right\}$$

gebracht werden kann. Das reciproke Bündel ist von derselben Art und gehört zu der Basis

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

Zu dieser Classe gehören die ∞^2 Gewinde constanten Parameters, die ihre Hauptaxen in einer (eigentlichen) Tangentialebene des absoluten Kegelschnitts haben. Insbesondere gehört hierher auch das Geradenfeld einer solchen Ebene. (Vgl. IIIb und S. 302.)

d) $\quad \text{III}, [2, 0]. \mid \text{III}, [2, 0]. \qquad D \,.\, \infty^5.$

IIId) *Bündel von Gewinden, die ihre Hauptaxen in einem Bündel, aber nicht in einem Büschel paralleler Strahlen haben**). Es sind alle $\mathbf{S}(X_i X_k Y) = 0$, aber unter den Ausdrücken $\mathbf{V}(X_i X_k Y)$ befinden sich zwei linear-unabhängige. *Eine* Classe, deren Basis auf die Form

---

*) Vgl. S. 313. Auf die Hauptaxen der uneigentlichen Gewinde solcher Bündel kommen wir weiterhin noch zurück.

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{array}\right\}$$

gebracht werden kann. In dieser canonischen Form sind alle Gewinde des Bündels in Liniengebüsche ausgeartet, deren Axen ein Bündel paralleler Geraden erfüllen. Das reciproke Bündel gehört zur selben Classe, und, in der canonischen Form, zur nämlichen Basis („Doppelbasis").

e) III, [2, 2] | III, [2, 2]. $C \,.\, \infty^4$.

IIIe) *Bündel von Gewinden, die ihre Hauptaxen in einem Büschel paralleler Strahlen haben.* Es sind alle $\mathbf{S}(X_i X_k Y) = 0$, und unter den Ausdrücken $\mathbf{V}(X_i X_k Y)$ befindet sich ein linear-unabhängiger (nicht identisch verschwindender). *Eine* Classe, deren Basis auf die Form

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \end{array}\right\}$$

gebracht werden kann. Das reciproke Bündel gehört zur selben Classe, und, in der canonischen Form, zur Basis

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{array}\right\}.$$

In diese Classe (also *nicht* in die vorhergehende) gehören u. A. die Bündel von (ausgearteten Gewinden oder) Strahlengebüschen, deren Axen ein Bündel von parallelen Minimalgeraden bilden.

f) III, [3, 0]. $A \,.\, \infty^0$.

IIIf) *Das Bündel aller uneigentlichen Gewinde.* $(X_i X_k Y) = 0$. Canonische Form der Basis („Doppelbasis") für dieses singuläre zu sich selbst reciproke Bündel:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{array}\right\}.$$

Wir haben nunmehr das zuvor bezeichnete Ziel erreicht. Wir haben die linearen Systeme von Gewinden classificirt nach ihrer Aequivalenz in Bezug auf die Gruppe Γ_{16}. Die gefundenen Classen sind, mit der einen hervorgehobenen Ausnahme, sämmtlich auch verschieden in Bezug auf die Gruppe Γ_{17}, und die in Bezug auf Γ_{17} verschiedenen Classen sind sämmtlich verschieden in Bezug auf Γ_{18}.

Die durchgeführte Classification erstreckt sich auf reelle und imaginäre Systeme von Gewinden; ist aber ein solches System reell, so lässt sich die angegebene canonische Form stets durch *reelle* Transformationen von Γ_{16} oder Γ_{17} herstellen.

Durch die angestellten Betrachtungen ist nun zugleich bereits ein weiteres Problem gelöst. Zu den Gruppen Γ_{16} und Γ_{18} sind, wie wir in § 26 näher ausgeführt haben, isomorph die Gruppen G_{16} und G_{17}, deren Raumelement nicht mehr das Gewinde, sondern der *Strahl*, insbesondere der Strahl des ersten natürlichen Continuums (§ 27 und § 28) ist. Die analytischen Formeln, die die Gruppen G_{16} und G_{17} in Coordinaten *erster* Art darstellen, sind identisch mit den zu Γ_{16} und Γ_{18} gehörigen, wenn man auf der einen Seite eigentliche Gewinde, auf der anderen deren Hauptaxen (S. 288), also eigentliche Strahlen betrachtet. *Wir haben also bereits auch die geometrischen Oerter dieser Hauptaxen in Bezug auf duale und radiale Collineationen classificirt.* Diese geometrischen Oerter aber haben ein hervorragendes Interesse (vgl. die Einleitung, S. 227—228). Wir gehen daher den ganzen betrachteten Stoff nunmehr nochmals durch, und fügen dem Gesagten kurze Beschreibungen jener Strahlenörter hinzu. Die Strahlenörter selbst sind, wie gesagt, im ersten regulären Continuum (durch analytische Fortsetzung) zu abgeschlossenen Mannigfaltigkeiten zu ergänzen. In entsprechender Weise ist zu verfahren bei den weniger interessanten Strahlenörtern, die aus linearen Mannigfaltigkeiten uneigentlicher Gewinde entspringen, und die der Vollständigkeit halber wohl ebenfalls kurz betrachtet werden müssen.

Ia), Va).

Ein eigentliches Gewinde hat eine bestimmte Hauptaxe O. Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde des reciproken Gewebes erfüllen die ganze Mannigfaltigkeit der eigentlichen Strahlen, mit Ausschluss derer, die O rechtwinklig kreuzen. Diese sind, zu Parallelenbündeln zusammengefasst, Hauptaxen der ∞^1 uneigentlichen Gewinde des Gewebes. Jede eigentliche Normale von O aber ist Hauptaxe eines in dem Gewebe enthaltenen coaxialen Büschels, also Hauptaxe auch von ∞^1 eigentlichen Gewinden des Gewebes.

Jeder eigentliche Strahl O gehört zu ∞^1 eigentlichen Gewinden und Geweben.

Ib), Vb).

Ein uneigentliches Gewinde hat ∞^2 Hauptaxen O, die die eigentlichen Strahlen eines Parallelbündels sind. Die Hauptaxen der eigent-

lichen Gewinde des reciproken Gewebes bilden mit den Strahlen dieses Bündels rechte Winkel. Jede von ihnen ist Hauptaxe eines coaxialen Büschels im Gewebe.

Die zuletzt genannten Hauptaxen bilden also die Figur, die wir früher — unter Beschränkung auf reelle (Gerade oder) Strahlen — Complex der Querlinien eines uneigentlichen Linienkreuzes genannt hatten. Wir ergänzen nunmehr die besprochene nicht abgeschlossene Mannigfaltigkeit im ersten regulären Continuum, und erhalten dann die bereits auf S. 303 erklärte, aus eigentlichen und Punktstrahlen bestehende Mannigfaltigkeit, den *planaren Strahlencomplex.*

Jeder planare Strahlencomplex wird in Strahlencoordinaten zweiter Art, wie gesagt, dargestellt durch eine lineare Gleichung zwischen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$. Es giebt also ∞^2 solche Complexe, deren jeder *alle* ∞^2 Punktstrahlen enthält. Jeder von ihnen ist mit *einem* uneigentlichen Gewinde und dem reciproken Gewebe invariant verbunden. Zwei verschiedene planare Complexe durchdringen einander erstens in der Congruenz der ∞^2 Punktstrahlen, zweitens in einem Parallelenbündel.

IIa), IVa).

*Ort der Hauptaxen im „allgemeinen" Büschel von Gewinden ist ein ausschliesslich von eigentlichen Strahlen gebildetes Band, das wir Strahlenkette nennen.**)

Es giebt ∞^7 Strahlenketten, deren jede zu ∞^1 Büscheln von Gewinden gehört. Sämmtliche ∞^1 Strahlen einer Kette stehen senkrecht auf einem eigentlichen Strahl O, der Hauptaxe der Kette. Der uneigentliche Strahl gleicher Schicht, der die Punktstrahlen des O ent-

*) Der hiermit eingeführte Begriff deckt sich offenbar, soweit reelle Figuren in Frage kommen, vollständig theils mit dem der ∞^1 geradlinigen Erzeugenden eines *Cylindroids* (S. 57), theils mit dem Begriff eines *Geradenbüschels* mit eigentlichem Scheitel: Beide Figuren sind hier nicht zu unterscheiden, sie können durch reelle duale Collineationen in einander übergeführt werden. Es ist aber wohl darauf zu achten, dass diese Identität des Begriffs der Strahlenkette mit der Vereinigung zweier bekannter Begriffe sich *nicht* auf das imaginäre Gebiet erstreckt. In der That sind die Eigenschaften der Strahlenkette trotz dem erwähnten Zusammenhang grundverschieden von denen des Cylindroids. Unrichtiges würde man z. B. aussagen, wenn man den Satz, dass die Strahlenkette nur aus eigentlichen *Strahlen* besteht, auf das Cylindroid übertragen und behaupten wollte, dass dieses auch im imaginären Gebiete nur von eigentlichen *Geraden* gebildet wird. Wollte man ferner daraus, dass in gewissen Grenzlagen das Cylindroid, als Ort von reellen und imaginären Geraden (z. B. beim Uebergang von einem reellen Cylindroid zu einem reellen ebenen Geradenbüschel) in mehrere analytisch-getrennte Flächen zerfällt, den Schluſs ziehen, daſs auch die entsprechende Kette zerfallen müsste, so würde das nicht minder unrichtig sein, u. s. w.

haltenden Parallelenbündels trägt, wird als *Nebenaxe* der Kette bezeichnet werden können. Jede Kette liegt also in einem bestimmten Normalennetz, und daher auch in einem völlig bestimmten planaren Complex.

Die Gesammtheit aller Strahlen des ersten regulären Continuums, die auf Strahlen einer Kette senkrecht stehen, bildet einen Complex, den wir als Kettencomplex bezeichnen.

Kette und Kettencomplex gehören zu verschiedenen Blättern (§ 27). Wir sagen, sie seien zu einander *reciprok*.

Es giebt hiernach ∞^7 Kettencomplexe. Jeder enthält ∞^1 Punktstrahlen, und Ort dieser Punktstrahlen ist ein uneigentlicher Strahl, die Nebenaxe der reciproken Kette. Die Normalennetze aller dieser Punktstrahlen erfüllen den planaren Complex, der die reciproke Kette enthält. Jeder Kettencomplex enthält ferner einen *singulären Strahl O*, die Hauptaxe der reciproken Kette. Der Kettencomplex enthält überdies das ganze Parallelenbündel, dem sein singulärer Strahl angehört.

Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde eines Gebüsches des Typus IVa) — also eines „allgemeinen" Gebüsches — sind die eigentlichen Strahlen eines Kettencomplexes, mit Ausschluss der vom singulären Strahl verschiedenen, aber zu diesem parallelen eigentlichen Strahlen. Diese Strahlen sind vielmehr Hauptaxen des uneigentlichen Gewindes im Gebüsch. Der singuläre Strahl selbst aber ist Hauptaxe eines Büschels coaxialer Gewinde im Gebüsch.

Jeder Kettencomplex gehört in gleicher Weise zu ∞^1 Gebüschen; die ∞^1 zu diesen reciproken Büschel gehören dann zur reciproken Kette. Alle die genannten Gebüsche durchdringen einander in dem Büschel coaxialer Gewinde, deren Hauptaxe der singuläre Strahl O des Kettencomplexes ist. Sie alle enthalten dasselbe uneigentliche Gewinde.

IIb), IVb).

Hauptaxen der eigentlichen Gewinde des vorliegenden speciellen Büschels sind die eigentlichen Strahlen eines Parallelenbüschels.

Die ∞^2 Hauptaxen des uneigentlichen Gewindes im Büschel liegen in einem Parallelenbündel, das das genannte Parallelenbüschel *nicht* enthält: Es findet also beim Uebergang zur Grenze eine vollständige *Discontinuität* statt (vgl. S. 288).

Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde des reciproken Gebüsches sind (abgesehen von denen eines sogleich zu nennenden Bündels) nicht senkrecht zu den Strahlen des Parallelenbüschels. Sie sind identisch mit den Strahlen allgemeiner Lage eines planaren Complexes. Ausgenommen sind nämlich die Strahlen eines Parallelenbündels, wiederum abgesehen von denen eines Parallelenbüschels. Dieses letzte Büschel ist zu

dem zuerst genannten (dem Büschel ersten Blattes) reciprok; jeder seiner eigentlichen Strahlen ist Hauptaxe eines Büschels coaxialer Gewinde im Gebüsch, also Hauptaxe von ∞^1 eigentlichen Gewinden des Gebüsches.

Die ∞^3 Hauptaxen der ∞^1 uneigentlichen Gewinde im Gebüsch sind die eigentlichen Strahlen eines *zweiten* planaren Complexes, und dieser durchdringt den ersten (ausser in der Congruenz aller Punktstrahlen) in dem erwähnten Parallelenbündel. Also auch hier tritt eine *Discontinuität* im Verhalten der Hauptaxen ein, wenn man von eigentlichen Gewinden des Gebüsches zu uneigentlichen übergeht. Das besprochene Parallelenbündel allein enthält solche Hauptaxen uneigentlicher Gewinde, die zugleich Grenzlagen sind von Hauptaxen eigentlicher Gewinde.

Sind die beiden Oerter von Hauptaxen eigentlicher Gewinde — also, im ersten Blatt das Parallelenbüschel und im zweiten Blatt der eine planare Complex — gegeben, so sind, wie zuvor unter IIa) IVa) noch ∞^1 zugehörige Gewindebüschel und zu diesen reciproke Gebüsche vorhanden. Ist aber nur eine von beiden Figuren gegeben, so ist die andere in gewissem Grade unbestimmt: Zu jedem der ∞^4 Parallelenbüschel gehören in der That nicht ∞^1, sondern ∞^2 Büschel von Gewinden, z. B.

$$\left\{ \begin{matrix} 0, & 1+\lambda\varepsilon, & 0 \\ 0, & \mu\varepsilon, & \varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

Die ∞^2 reciproken Gebüsche sind mit ∞^1 planaren Complexen verbunden, die einander, ausser im Feld aller Punktstrahlen, in dem erwähnten Parallelenbündel des zweiten Blattes durchdringen. Alle ∞^2 Gebüsche enthalten dieselben ∞^1 Büschel coaxialer Gewinde.

IIc), IVc).

Zu einem Büschel coaxialer Gewinde gehört ein einziger Strahl O als Hauptaxe der eigentlichen Gewinde des Büschels.

Die ∞^2 Hauptaxen des uneigentlichen Gewindes im Büschel sind zu dem Strahl O parallel.

Die ∞^3 eigentlichen Gewinde des reciproken Gebüsches haben ihre Hauptaxen nicht in einem Complex, sondern nur in einer Congruenz; jede eigentliche Normale von O ist nämlich Hauptaxe eines Büschels coaxialer Gewinde im Gebüsch.

Die ∞^3 Hauptaxen der ∞^1 uneigentlichen Gewinde im Gebüsch sind die eigentlichen Strahlen des planaren Complexes, der das Normalennetz von O enthält.

Es giebt ∞^4 solche Figuren.

IId), IVd).

Die Hauptaxen dieses Büschels uneigentlicher Gewinde bilden eine Mannigfaltigkeit von dreifach unendlich vielen Strahlen, nämlich die eigentlichen Strahlen eines planaren Complexes.

Mit diesem ist ein Parallelenbündel (des anderen Blattes) verbunden, dessen Strahlen zu allen Complexstrahlen senkrecht sind.

Die coaxialen Büschel, deren Hauptaxen Strahlen dieses Bündels sind, erfüllen das reciproke Gebüsch. Dieses enthält alle uneigentlichen Gewinde: Jeder eigentliche Strahl ist daher Hauptaxe eines uneigentlichen Gewindes im Gebüsch.

Es giebt ∞^2 solcher Figuren.

IIIa), IIIa).

Die Hauptaxen reciproker aplanarer Bündel von Gewinden erfüllen zwei Strahlencongruenzen, die ausschliesslich von eigentlichen Strahlen gebildet werden. Jede von ihnen besteht aus allen gemeinsamen Normalen von sämmtlichen Strahlenpaaren der anderen.

Dieser Satz beruht, in seiner Ausdehnung auf das imaginäre Gebiet, wesentlich auf den Begriffsbildungen des Strahls und der Orthogonalität von Strahlen; man darf das Wort Strahl *nicht* durch das Wort Gerade ersetzen.

Es giebt ∞^8 Paare solcher Congruenzen, und zu jedem Paar gehören ∞^1 Paare reciproker Bündel von Gewinden.

Wir nennen diese Congruenzen aplanare Kettencongruenzen. Je zwei zusammengehörige bezeichnen wir als *reciprok.*

Ein doppelt überdecktes Strahlenbündel mit eigentlichem Mittelpunkt ist das einfachste Beispiel zweier solcher Figuren.

IIIb), IIIb).

Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde zweier reciproker planarer Bündel sind ebenfalls die eigentlichen Strahlen zweier Congruenzen.

Diese ergänzen wir, durch analytische Fortsetzung, zu abgeschlossenen Continuis, und nennen sie, so vervollständigt, *planare Kettencongruenzen.* Es kommen durch die Erweiterung ∞^1 Punktstrahlen zu jeder Congruenz hinzu.

Es giebt ∞^7 planare Kettencongruenzen, die paarweise als *reciprok* zusammengehören.

Die Strahlen einer planaren Kettencongruenz lassen sich auf ∞^1 Parallelenbüschel vertheilen, deren jedes einen der ∞^1 Punktstrahlen der Congruenz enthält. Die zu diesen Büscheln reciproken ∞^1 Parallelenbüschel erfüllen die reciproke Congruenz.

Ein doppelt überdecktes *Strahlen*feld (d. h. die eigentlichen Strahlen einer den absoluten Kegelschnitt nicht berührenden Ebene, durch ∞^1 Punktstrahlen ergänzt, zweimal gesetzt und auf die zwei Blätter vertheilt) ist das einfachste Beispiel für ein Paar reciproker planarer Kettencongruenzen (vgl. S. 302).

Zu jedem Paar gehören ∞^1 Paare reciproker planarer Gewindebündel. Alle ∞^1 Bündel derselben Schicht enthalten dasselbe uneigentliche Gewinde. Unter den ∞^2 Hauptaxen dieses Gewindes ist *keine* Grenzlage von Hauptaxen eigentlicher Gewinde des betrachteten Bündels. Also findet beim Uebergang von eigentlichen Gewinden des planaren Bündels zum uneigentlichen Gewinde wiederum eine vollkommene *Discontinuität* statt. Die Nebenaxen der uneigentlichen Gewinde der beiden reciproken Bündel schneiden sich *niemals rechtwinklig;* oder, was dasselbe ist, die Punktstrahlen, deren absolute Polaren diese Nebenaxen sind, sind *niemals doppelt-orthogonal* (S. 263).

III c), III c).

Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde der beiden reciproken Bündel sind in diesem Falle identisch mit den eigentlichen Strahlen allgemeiner Lage zweier Normalennetze eigentlicher Strahlen O_3, O_2, die einander rechtwinklig schneiden. Ausgenommen sind die zu O_2 (O) parallelen Normalen von O_3 (O_2), während O_2 und O_3 selbst Hauptaxen coaxialer Büschel sind, die dem einen und dem anderen Gewindebündel angehören.

Es giebt ∞^6 solcher Figuren, und jede gehört zu ∞^1 Paaren reciproker Bündel. Alle ∞^1 Bündel, die zu dem einen Normalennetz (O_3) gehören, durchdringen einander in dem Büschel coaxialer Gewinde, dessen Hauptaxe die Hauptaxe O_2 des anderen Normalennetzes ist. Alle diese Bündel enthalten dasselbe uneigentliche Gewinde, und dessen Hauptaxen sind parallel zu O_2; die dem Normalennetz (O_3) angehörigen Strahlen dieses Parallelenbündels sind die einzigen, die als Grenzlagen von Hauptaxen eigentlicher Gewinde des ersten Gewindebündels aufgefasst werden können. Jedes der beiden Normalennetze enthält *einen* Punktstrahl.

Zu einem Normalennetz, in dem kein einzelner Strahl ausgezeichnet ist, gehören natürlich nicht ∞^1, sondern ∞^3 verschiedene Gewindebündel.

III d), III d).

In diesem Falle sind die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde der beiden reciproken Bündel die eigentlichen Strahlen zweier Parallelenbündel, die einander nicht rechtwinklig durchsetzen.

Die Hauptaxen der ∞^1 uneigentlichen Gewinde eines jeden Bündels

sind die eigentlichen Strahlen eines planaren Complexes; sie bilden rechte Winkel mit den Hauptaxen der eigentlichen Gewinde des anderen Bündels.

Solcher Figuren giebt es ∞^4, und zu jeder gehören ∞^1 Paare reciproker Bündel.

Zu einem einzelnen Parallelenbündel gehören ∞^3 Bündel von Gewinden, die zu je ∞^1 verbunden sind, z. B.

$$\left\{\begin{matrix} 1+\lambda\varepsilon, & 0, & 0 \\ \mu\varepsilon, & \varepsilon, & 0 \\ \nu\varepsilon, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{matrix} 1-\lambda\varepsilon, & -\mu, & -\nu \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}$$

In dem Schema rechts haben wir die ∞^3 Bündel von Gewinden aufgeführt, die zu denen links reciprok sind.

Dass die eigentlichen Gewinde zweier reciproker Bündel zu Congruenzen von je ∞^2 Hauptaxen führen, die in zu einander orthogonalen Parallelenbündeln lägen, ist *nicht* möglich.

IIIe), IIIe).

Die Hauptaxen der eigentlichen Gewinde der beiden reciproken Bündel sind nunmehr die eigentlichen Strahlen zweier zu einander reciproker Parallelenbüschel. Die genannten Gewinde sind damit auf je ∞^1 coaxial-Büschel vertheilt.

Hauptaxen der uneigentlichen Gewinde beider Bündel sind die eigentlichen Strahlen zweier planarer Complexe. Die Strahlen des dem ersten Blatte angehörigen Complexes kreuzen oder schneiden rechtwinklig die Strahlen des zum zweiten Blatte gehörigen Parallelenbüschels.

Es giebt ∞^4 derartige Figuren, und jede ist mit einem *einzigen* Paar reciproker Gewindebündel verbunden.

IIIf).

Die ∞^2 Gewinde dieses singulären Bündels haben ihre Hauptaxen in den ∞^4 eigentlichen Strahlen, deren jeder zu einem uneigentlichen Gewinde als Hauptaxe gehört.

Sämmtliche angeführten geometrischen Beziehungen zwischen linearen Systemen von Gewinden und den Oertern von deren Hauptaxen werden nicht zerstört durch zusammengehörige Transformationen der Gruppen Γ_{18} und G_{17}.

Wir werden nunmehr bis auf Weiteres die Gewinde wieder bei Seite lassen, und werden die Oerter der Hauptaxen selbst einer näheren Betrachtung unterwerfen.

Durch die letzten Ueberlegungen werden Untersuchungen anderer Mathematiker ergänzt und berichtigt. Man hat es anscheinend als selbstverständlich betrachtet, dass die auf einen nicht näher bezeichneten sogenannten allgemeinen Fall sich erstreckenden Sätze auch in allen Grenzfällen bestehen müssten. Dies gilt aber nicht einmal von den Dimensionenzahlen der (in der Litteratur übrigens anders als hier erklärten) Oerter von Hauptaxen, wie schon aus dem längst bekannten Beispiel der coaxialen Büschel entnommen werden kann.

§ 30.

Ein- und zweidimensionale Ketten.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, dass sich im Ganzen die Reciprocitätsbeziehungen zwischen linearen Systemen von Gewinden in den geometrischen Oertern ihrer Hauptaxen nicht auf einfache Weise widerspiegeln. Zwar sind diese Oerter mit den linearen Systemen invariant verknüpft, aber die Beziehung zwischen den Systemen selbst und den Oertern ihrer Hauptaxen ist verwickelt. Steht doch, wenn ein Ort von Hauptaxen eigentlicher Gewinde eines linearen Systems gegeben ist, nicht einmal in allen Fällen auch nur die Stufenzahl dieses Systems fest. Indessen lassen unsere Oerter viel einfachere Eigenschaften erkennen, wenn man sie unabhängig von der Theorie der Gewinde betrachtet. Die Gesammtheit dieser Gebilde wird dann zweckmässiger Weise noch durch gewisse weitere irreducibele Mannigfaltigkeiten ergänzt werden, die zwar nicht selbst als Oerter der Hauptaxen linearer Systeme von Gewinden gelten können, wohl aber Grenzlagen solcher Oerter sind, oder Bestandtheile von solchen (im Folgenden mit Sternen * bezeichnet). Alle diese dem ersten regulären Strahlencontinuum angehörigen Figuren, die theils von eigentlichen, theils von Punktstrahlen gebildet werden, wollen wir in einem weiteren Sinne des Wortes *Ketten* nennen. Wir ordnen sie nach der Dimensionenzahl, wie folgt:

Nulldimensionale Ketten.

Der eigentliche Strahl. ∞^4.

* Der Punktstrahl. ∞^2

Eindimensionale Ketten.

Die Strahlenkette oder „Kette“ schlechthin. ∞^7.

Das Parallelenbüschel. ∞^4.

* Die Punktkette, d. h. der uneigentliche Strahl, betrachtet als Ort aller mit ihm vereinigten Punktstrahlen. ∞^2.

Zweidimensionale Ketten.

Die aplanare Kettencongruenz. ∞^8.

Die planare Kettencongruenz. ∞^7.

* Die cylindrische Kettencongruenz*). ∞^6.

Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls, das „Normalennetz“ schlechthin. ∞^4.

Das Parallelenbündel. ∞^2.

* Die Congruenz (das Feld) aller Punktstrahlen. ∞^0.

Dreidimensionale Ketten.

Der aplanare Kettencomplex oder „Kettencomplex“ schlechthin. ∞^7.

* Der irreducibele conische (Ketten-) Complex, der Inbegriff aller Parallelenbündel, deren Scheitel einen in der unendlich fernen Ebene gelegenen irreducibelen Kegelschnitt erfüllen. ∞^5.

Der planare (Ketten-) Complex. ∞^2.

Vierdimensionale Ketten.

Das (erste natürliche) Strahlencontinuum. ∞^0.

Diese Liste ist, wie wir gleich bemerken wollen, in gewissem Sinne *vollständig*. Es lässt sich aus unseren ferneren Untersuchungen schliessen, dass sie alle irreducibelen Strahlenmannigfaltigkeiten umfasst, die durch *lineare* Gleichungen zwischen den Grössen $\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ dargestellt werden können, und *ausserdem* entweder Oerter von Hauptaxen linearer Gewindemannigfaltigkeiten oder Grenzlagen derartiger Oerter (Bestandtheile von solchen) sind.

Einige der aufgezählten „Ketten“ haben Reciprocitätsbeziehungen, die so beschaffen sind, dass die Dimensionenzahlen der zusammengehörigen *„reciproken“* Figuren einander zu *vier* ergänzen, und dass jede die andere *eindeutig* bestimmt, nämlich:

Erstes Blatt:	*Zweites Blatt:*
Strahlenkette.	Kettencomplex.
Aplanare Kettencongruenz.	Aplanare Kettencongruenz.
Planare Kettencongruenz.	Planare Kettencongruenz.
Kettencomplex.	Strahlenkette.

Einige andere der genannten Gebilde gehören in Gruppen zu vieren zusammen, derart, dass jedes Element einer Gruppe alle übrigen eindeutig bestimmt:

*) Dieser Begriff wird erst später erklärt werden. Der Leser möge diese Zeile einstweilen als nicht vorhanden betrachten.

Erstes (zweites) Blatt:	*Zweites (erstes) Blatt:*
Punktstrahl, planarer Complex.	Punktkette, Parallelenbündel.

Jede Strahlenkette oder jeder Kettencomplex ist mit einer solchen Figur invariant verbunden, und jedes Paar reciproker planarer Kettencongruenzen mit zweien; ebenso jedes Paar reciproker Parallelenbüschel mit zwei speciellen Figuren dieser Art.

Die ein-, zwei- und dreidimensionalen Ketten haben für die radialprojective Geometrie eine Bedeutung, die bis zu einem gewissen Grade verglichen werden kann mit der der Punkte, Geraden und Ebenen in der projektiven Geometrie des Raumes, oder der Punkte, Kreise, (Minimalgeraden) und Kugeln in der *Geometrie der conformen Gruppe (der Inversionsgeometrie) im Raume.* So speciell sie sind, verdienen sie eine nähere Betrachtung. *Die Ketten sind von grösserer Bedeutung, als manche Figuren von viel allgemeinerer Art,* deren Theorie in zahlreichen Fällen Kenntniss von Eigenschaften der Ketten voraussetzen wird (vgl. § 32). Die Theorie der Ketten bildet aber selbst bereits einen ziemlich umfangreichen und zum Theil auch schwierigen Gegenstand. Wir werden, ohne Vollständigkeit erreichen zu wollen, eine Anzahl von Sätzen herleiten, die geeignet sind, die Fruchtbarkeit der Gedanken erkennen zu lassen, die wir in den §§ 26...28 auseinandergesetzt haben. Wie ein Fortschritt über den Gesichtskreis der Elementargeometrie hinaus dadurch bewirkt worden ist, dass man eine Classe geometrischer Sätze, solche Sätze nämlich, die durch die Transformationen einer wichtigen *die Bewegungen umfassenden* Gruppe — die Collineationen und Correlationen — unter einander vertauscht werden, für sich betrachtet und ihren Inbegriff als ein besonderes Ganzes behandelt hat, so wird sich ein ähnlicher und zwar ebenfalls nicht nur stofflicher, sondern *principieller* Fortschritt vollziehen müssen durch Zusammenfassung und systematische Bearbeitung solcher Eigenschaften geometrischer Figuren, die nicht zerstört werden können durch dual- oder radial-projective Transformationen. Die einfachsten unter den zu betrachtenden Figuren werden dann die Ketten sein.

Die Strahlenkette.

Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls enthält ∞^3 Strahlenketten. Diese triviale Bemerkung wird bestimmter gefasst in folgendem Satz:

Im Normalennetz eines eigentlichen Strahls geht durch irgend drei

eigentliche Strahlen, deren keine zwei parallel sind, eine einzige Strahlenkette).*

Werden die drei gegebenen Strahlen mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet, so ist nach Voraussetzung $(X_1 X_2 X_3) = 0$, aber $\mathbf{S}(X_i X_k Y) \neq 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Bedeutet dann Y einen übrigens beliebigen eigentlichen Strahl, der nicht demselben planaren Complex angehört, wie das betrachtete Normalennetz, so wird

$$(1) \qquad X = \sigma_1 (Y X_2 X_3) X_1 + \sigma_2 (Y X_3 X_1) X_2 + \sigma_3 (Y X_1 X_2) X_3$$

ein beliebiger Strahl der fraglichen Kette, wenn man unter $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ *scalare* Verhältnissgrössen versteht, deren Summe, ohne dass man eine Beschränkung einführen würde, gleich Null gesetzt werden darf. Drei Grössen, die in der Beziehung

$$(2) \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

stehen, können aber angesehen werden als überzählige homogene Coordinaten in einem binären Gebiet — insbesondere auch in *dem* binären Gebiet, das von allen Punktstrahlen gebildet wird, die die einzelnen Strahlen der Kette rechtwinklig schneiden, mithin als homogene Punktcoordinaten in der zugehörigen Punktkette, oder der Nebenaxe der Strahlenkette selbst.

Wir können also sagen, dass jede Strahlenkette auf die zugehörige Punktkette perspectiv und damit zugleich projectiv bezogen sei; wir können die Strahlenkette (und übrigens auch jede andere eindimensionale Kette) *als Trägerin eines binären Gliedes betrachten.* Damit haben wir schon erklärt, was unter „projectiver" Beziehung einer Strahlenkette auf eine

---

*) Wir werden weiterhin eine elementargeometrische Construction der Kette durch drei reelle Strahlen eines Normalennetzes angeben.

Es darf vielleicht bei dieser Gelegenheit noch darauf hingewiesen werden, dass die gewählte Umgrenzung der Begriffe in gewissem Grade willkürlich ist — man kann z. B. unter den Begriff der „Strahlenkette" auch noch gewisse reducibele Figuren einbeziehen — und dass daher manche unserer Sätze, in ebenfalls zweckmässiger Weise, auch anders abgefasst werden können. *Nothwendig* ist aber, dass die Begriffe überhaupt deutlich erklärt sind, und dass auch ganz evidente Ausnahmen nicht „stillschweigend" oder durch den völlig inhaltsleeren Zusatz „im Allgemeinen" ausgeschlossen werden. Diese verbreitete Nachlässigkeit im Ausdruck ist Folge übler Denkgewohnheiten und Ursache wahrscheinlich nicht weniger Fehler in der Geometrie. Wo sie gewohnheitsmässig geübt wird, erhalten ganze Disciplinen eine gallertartige Structur. Indem wir in einem Gebiete, das gerade in dieser Hinsicht auf unglaubliche Weise vernachlässigt worden ist, um correcte Formulirungen uns wenigstens ernsthaft bemühen, hoffen wir uns nicht den Vorwurf der Kleinkrämerei oder Pedanterie zuzuziehen, sondern den Dank einsichtiger Leser zu verdienen.

zweite oder auf irgend welche andere Träger binärer Gebiete verstanden werden soll. Alle Strahlenketten mit parallelen Hauptaxen werden z. B. dadurch projectiv auf einander bezogen, dass man parallele Strahlen einander zuordnet. Ferner sind natürlich Strahlenketten, die einander in einer radialen Projectivität und in deren Umkehrung entsprechen, projectiv auf einander bezogen.

Ein bereits auf S. 243 formulirter Satz kann nunmehr so gefasst werden:

„Um die Normalennetze zweier eigentlicher Strahlen in allgemeinster Weise *dual*-projectiv auf einander zu beziehen, kann man drei verschiedenen Strahlen irgend einer Kette des ersten ebensolche Strahlen einer Kette des zweiten nach Belieben zuordnen. Dadurch ist die Beziehung beider Netze eindeutig bestimmt."

Liegt *eine* Kette vor, so kann man beliebig viele Strahlen der Kette, die drei Strahlen irgend eines Normalennetzes verbindet, durch blosses Ziehen von gemeinsamen Normalen zwischen nicht parallelen eigentlichen Strahlen finden.

Wenn eine Strahlenkette und ein eigentlicher Strahl O nicht demselben planaren Complex angehören — wenn also *O* die Hauptaxe der Kette nicht senkrecht kreuzt oder schneidet — *so ist der Ort aller gemeinsamen Normalen zwischen O und den Strahlen der Kette eine neue Kette, die auf die erste projectiv bezogen ist.*

Zwei Ketten in solcher Lage, dass jeder Strahl der einen Kette einen bestimmten Strahl der anderen Kette senkrecht schneidet, und umgekehrt, werden wir als *zu einander perspectiv* bezeichnen dürfen.

Strahlenketten in perspectiver Lage sind also durch diese ihre Beziehung projectiv auf einander abgebildet.

Wenn zwei projectiv bezogene Strahlenketten (gleichen Blattes) mit nicht parallelen Hauptaxen einen Strahl entsprechend gemein haben, so ist der Ort der gemeinsamen Normalen entsprechender Strahlen — kürzer *das Erzeugniss* — beider projectiver Ketten, eine neue Kette (des anderen Blattes), die zu den beiden ersten perspectiv liegt.

Zwei verschiedene Ketten desselben Normalennetzes haben stets zwei (reelle oder imaginäre, getrennte oder zusammenfallende) Strahlen mit einander gemein, deren Bestimmung die Lösung einer Gleichung zweiten Grades erfordert.

Auf jeder der ∞^1 reellen Ketten eines Normalennetzes, die sich in denselben beiden conjugirt-imaginären Strahlen durchdringen, bestimmen diese eine Involution, und die Punktepaare aller dieser Involutionen sind auf dieselben ∞^1 Paare von Parallelenbüscheln vertheilt. Durch den gemeinsamen „Sinn" aller dieser Involutionen kann man die beiden

(nicht parallelen) conjugirt-imaginären Strahlen trennen. Conjugirt-imaginäre parallele oder Punktstrahlen können in entsprechender Weise dargestellt werden: Daher giebt es in der Geometrie der radial-projectiven Transformationen eine der v. Staudt'schen Theorie des Imaginären analoge Theorie.

Keine zwei verschiedenen Strahlen einer Kette sind parallel:

Die dualen Doppelverhältnisse von irgend vier verschiedenen Strahlen einer Kette haben sämmtlich bestimmte und zwar scalare Werthe. Sie reduciren sich auf gewöhnliche Doppelverhältnisse. Umgekehrt liegen vier Strahlen eines Normalennetzes mit solchen Doppelverhältnissen stets in einer Kette. (Vgl. S. 244.)

Die aplanare Kettencongruenz.

Wieder präcisiren wir zunächst einen schon aufgestellten Satz:

Durch irgend vier eigentliche Strahlen, von denen keine drei demselben planaren Complex angehören, geht eine einzige aplanare Kettencongruenz.

Sind X_1, X_2, X_3, X_4 die gegebenen Strahlen, so wird jeder Strahl X der fraglichen Congruenz mit Hülfe von vier der Gleichung

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0 \tag{3}$$

genügenden scalaren Verhältnissgrössen dargestellt durch den Ausdruck

$$\sigma_1 (X_2 X_3 X_4) X_1 - \sigma_2 (X_3 X_4 X_1) X_2 + \sigma_3 (X_4 X_1 X_2) X_3 - \\ - \sigma_4 (X_1 X_2 X_3) X_4 . \tag{4}$$

Die Grössen $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4$ bilden ein System von „projectiven" Coordinaten für die Congruenzstrahlen: *Die aplanare Kettencongruenz ist Trägerin eines ternären Gebietes**).

Mit jedem Parallelenbündel — *ohne irgend eine Ausnahme* — hat die Congruenz einen einzigen Strahl gemein. Wir können sagen:

Jede aplanare Kettencongruenz liegt zur Congruenz (zum Feld) aller Punktstrahlen perspectiv, und beide Congruenzen sind dadurch projectiv auf einander bezogen.

Jede aplanare Kettencongruenz kann auf jede andere dadurch projectiv bezogen werden, dass man vier Strahlen der einen vier Strahlen

---

*) Fasst man die nicht accessorischen Congruenzstrahlen als Gerade auf, und ergänzt man dann deren Mannigfaltigkeit durch Gerade des Minimalcomplexes, so besteht ein entsprechender Satz im Allgemeinen nicht. Alle folgenden Sätze nehmen dann, *wenn sie correct formulirt werden,* eine sehr viel verwickeltere Gestalt an.

der anderen zuordnet; vorausgesetzt, dass von den vier Strahlen keine drei demselben Normalennetz (derselben Kette) angehören. Die projective Beziehung kann durch eine einzige duale Collineation (Correlation) hervorgerufen werden. Liegt eine aplanare Kettencongruenz vor, so kann man durch blosses Normalenziehen durch irgend vier Strahlen, die die zuvor genannte Bedingung erfüllen, eine solche Congruenz legen; d. h. man kann, nachdem über die projective Zuordnung verfügt ist, zu jedem Strahl der ersten Congruenz den entsprechenden Strahl der zweiten construiren. (Ja man kann sogar schon einen frei veränderlichen Congruenzstrahl construiren, sobald man nur irgend eine Strahlenkette kennt.)

Durch Zuordnung paralleler Strahlen werden je zwei aplanare Kettencongruenzen (gleichen Blattes) projectiv auf einander abgebildet, und diese Abbildung erfolgt durch eine völlig bestimmte duale Schiebung oder deren entgegengesetzte Transformation.

Bezieht man eine aplanare Kettengruenz projectiv auf die Punkte einer Ebene (z. B. perspectiv auf die Punkte der unendlich fernen Ebene), so werden damit die in der Congruenz liegenden Ketten auf die Geraden derselben Ebene abgebildet. Je zwei verschiedene Congruenzstrahlen können durch eine einzige in der Congruenz gelegene Kette verbunden werden. Je zwei solche Ketten durchdringen einander in einem einzigen Strahl. Die Hauptaxen aller dieser Ketten erfüllen die reciproke Congruenz, deren Strahlen demnach projectiv den Geraden jener Ebene zugeordnet sind. Punkt und Gerader in vereinigter Lage entsprechen einander rechtwinklig schneidende Strahlen beider Congruenzen.

In dem Normalennetz irgend eines Strahls, der nicht zur reciproken Congruenz gehört, hat die aplanare Congruenz *einen* Strahl.

Haben zwei Strahlenketten mit nicht parallelen Hauptaxen einen Strahl gemein, so können sie durch eine einzige aplanare Kettencongruenz verbunden werden. Die reciproke Congruenz ist Ort der gemeinsamen Normalen von je zwei verschiedenen Strahlen beider Ketten.

Jede aplanare Kettencongruenz gestattet eine achtgliedrige einfache Gruppe von dualen Collineationen. Die reciproke Congruenz wird in gleicher Weise durch die zugehörigen discordanten Transformationen transformirt.

Die Strahlen irgend einer aplanaren Kettencongruenz können dadurch definirt werden, dass man zwischen den sechs Coordinaten erster Art drei lineare Gleichungen mit constanten Coefficienten annimmt. Die Coefficienten sind beliebig, müssen jedoch so beschaffen sein, dass die in Bezug auf $\mathfrak{X}_{23}$, $\mathfrak{X}_{31}$, $\mathfrak{X}_{12}$ gebildete Determinante nicht ver-

schwindet. Die Strahlen der Kettengruenz können daher durch Gleichungen der folgenden Form dargestellt werden:

$$(5)\qquad \begin{aligned} q_{11}\mathfrak{X}_{01} + q_{12}\mathfrak{X}_{02} + q_{13}\mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{23} &= 0,\\ q_{21}\mathfrak{X}_{01} + q_{22}\mathfrak{X}_{02} + q_{23}\mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{31} &= 0,\\ q_{31}\mathfrak{X}_{01} + q_{32}\mathfrak{X}_{02} + q_{33}\mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Dabei darf noch, unbeschadet der Allgemeinheit,

$$(6)\qquad q_{11} + q_{22} + q_{33} = 0$$

angeommen werden. Die Darstellung der Kettencongruenz in Coordinaten zweiter Art wird daher

(7)

$$\begin{aligned} &q_{32}\mathfrak{X}_2^{\,2} - q_{23}\mathfrak{X}_3^{\,2} - (q_{22} - q_{33})\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 - q_{21}\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 + q_{31}\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_{11} = 0,\\ &q_{13}\mathfrak{X}_3^{\,2} - q_{31}\mathfrak{X}_1^{\,2} - (q_{33} - q_{11})\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 - q_{32}\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 + q_{12}\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_{22} = 0,\\ &q_{21}\mathfrak{X}_1^{\,2} - q_{12}\mathfrak{X}_2^{\,2} - (q_{11} - q_{22})\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 - q_{13}\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 + q_{23}\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_{33} = 0. \end{aligned}$$

Die reciproke Congruenz entsteht, wenn man ($\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{U}$, und zugleich) q_{ik} durch $-q_{ki}$ ersetzt.

Die Formeln geben unmittelbar den einem vorgeschriebenen Parallelenbündel angehörigen Strahl. Ausserdem lassen sie erkennen, dass bei Deutung der Grössen $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ als homogener Coordinaten in einem Gebiete 9. Stufe (S. 272) jede aplanare Kettencongruenz auf eine rationale sogenannte *Normalfläche**) 4. Ordnung abgebildet wird, und dass dabei den ∞^2 Ketten in der Congruenz die ∞^2 Kegelschnitte auf dieser Fläche zugeordnet werden.

---

*) Diese Fläche entsteht, wenn man die Coefficienten in der Gleichung einer ebenen Curve 2. Classe als Punktcoordinaten in einem Gebiete 6. Stufe deutet, als Ort der Bilder der doppelt zählenden Punkte. Sie ist Trägerin eines ternären Gebietes, und auf die Ebene so bezogen, dass einer jeden ebenen Curve n. O. eine Curve $2n$. O. zugeordnet wird. Die Fläche ist zuerst von Cayley betrachtet worden, dann von Veronese, nach dem italienische Mathematiker sie benennen, und Anderen. Am weitesten gehen wohl Untersuchungen des Verfassers, Math. Ann. Bd. 37, S. 76 u. ff., Bd. 40, S. 577.

Die Bezeichnung „Normalfläche" bezieht sich darauf, dass diese Fläche nicht als Projection einer Fläche 4. O. aufgefasst werden kann, die erst in einem projectiven Punktcontinuum von höherer Dimensionenzahl läge. Dieselbe Eigenschaft kommt freilich auch anderen Flächen 4. O. zu, und auch im Raum von fünf Dimensionen noch lassen sich vier Familien von (rationalen) Flächen der Art angeben (die projective Gruppen mit den Parameterzahlen 9, 8, 7, 6 gestatten). Die Flächen der zweiten Familie, mit denen allein wir es zu thun haben, sind nicht geradlinig.

Die planare Kettencongruenz.

Die planare Kettencongruenz enthält, wie die aplanare, ∞^2 Strahlenketten. Irgend zwei nicht parallele eigentliche Congruenzstrahlen können auch in diesem Falle durch eine einzige Kette verbunden werden. Je zwei dieser Ketten haben einen Congruenzstrahl gemein. Die Hauptaxen aller dieser Ketten sind die eigentlichen Strahlen eines Parallelenbündels. *Von diesem Bündel sagen wir, dass es die reciproke Congruenz begleitet.*

Die planare Kettencongruenz enthält ferner ∞^1 Parallelenbüschel. *Jeder* Congruenzstrahl gehört einem dieser Büschel an. Die ∞^1 Parallelenbüschel, die je zu einem der genannten reciprok sind, erfüllen die reciproke Congruenz. Aus dieser kann man, wie soeben, das begleitende Parallelenbündel der ersten Congruenz ableiten. Beide Bündel sind — wie bereits bemerkt — niemals zu einander orthogonal.

Die gemeinsamen Normalen zwischen eigentlichen Strahlen einer planaren Kettencongruenz und des sie begleitenden Parallelenbündels sind die eigentlichen Strahlen der reciproken Congruenz.

Jede der beiden Congruenzen enthält endlich ∞^1 Punktstrahlen, die eine Punktkette bilden, einen anderen Punktstrahl in jedem Parallelenbüschel.

Alle Strahlenketten in der Congruenz sind dadurch auf deren Punktkette projectiv bezogen.

Die planare Kettencongruenz und das sie begleitende Parallelenbündel enthalten beide dieselbe Punktkette.

Die planare Kettengruenz kann auf ein ebenes Geradenfeld so abgebildet werden, dass jedem eigentlichen Congruenzstrahl eine eigentliche Gerade des Feldes entspricht, und umgekehrt. Diese Beziehung erstreckt sich aber nicht auf die ∞^1 Punktstrahlen und die unendlich ferne Gerade des Feldes: Diese sind singuläre Elemente der Abbildung. (S. 302.) *Die planare Kettencongruenz ist also nicht Trägerin eines ternären Gebietes.*

Haben zwei Strahlenketten mit parallelen aber nicht identischen Hauptaxen einen Strahl gemein, so können sie durch eine einzige planare Kettencongruenz verbunden werden. Diese umfasst alle Parallelenbüschel, die verschiedene Strahlen beider Ketten enthalten. Der Ort der gemeinsamen Normalen von je zwei verschiedenen Strahlen beider Ketten besteht, gehörig ergänzt, aus einer zweiten planaren Kettencongruenz, der Reciproken der ersten, und aus dem diese reciproke Congruenz begleitenden Parallelenbündel.

Wenn die Hauptaxe einer gegebenen Kette (des ersten Blattes) nicht in einem gegebenen planaren Complex (des zweiten Blattes) enthalten ist, so bilden alle Strahlen des Complexes, die Strahlen der Kette senkrecht schneiden, eine planare Kettencongruenz.

Wenn eine Strahlenkette mit keinem Punktstrahl einer Punktkette durch ein Normalennetz verbunden werden kann, so liegen beide in einer völlig bestimmten planaren Kettencongruenz.

Jede planare Kettencongruenz liegt in einem bestimmten planaren Complex. Die Parallelenbündel dieses Complexes bilden, zusammen mit dem Feld aller Punktstrahlen, die Normalennetze der Punktstrahlen der reciproken Congruenz. Mit jedem anderen planaren Complex hat die Congruenz ein Parallelenbüschel gemein.

Alle dual-(radial-)collinearen Transformationen, die eine planare Kettencongruenz in Ruhe lassen, bilden eine continuirliche Gruppe mit 9 (10) Parametern. Die eigentlichen Congruenzstrahlen werden von diesen Transformationen gerade so unter einander vertauscht, wie die eigentlichen Geraden einer Ebene durch die sechsgliedrige Gruppe aller affinen Transformationen.

Im Falle des (etwa zum ersten Blatt zu rechnenden) Strahlenfeldes

$$\left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

werden die Coefficienten $\mathfrak{a}_{ik} = a_{ik} + \alpha_{ik}\varepsilon$ (S. 224, 237) in den Gleichungen der genannten Gruppen, oder vielmehr deren duale Verhältnisse, gegeben durch das Schema:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} + \alpha_{11}\varepsilon, & \alpha_{12}\varepsilon, & \alpha_{13}\varepsilon \\ \alpha_{21}\varepsilon, & a_{22}, & a_{23} \\ \alpha_{31}\varepsilon, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix} \right\} \{k \cdot a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \doteqdot 0\}. \tag{9}$$

Die *(eigentlichen)* Strahlen des Feldes (8) werden hierbei nur sechsgliedrig, nämlich so vertauscht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}'_{23} &= k \cdot a_{11}\mathfrak{x}_{23} + \alpha_{12}\mathfrak{x}_{02} + \alpha_{13}\mathfrak{x}_{03}, \\ \mathfrak{x}'_{02} &= \quad * \quad + a_{22}\mathfrak{x}_{02} + a_{23}\mathfrak{x}_{03}, \\ \mathfrak{x}'_{03} &= \quad * \quad + a_{32}\mathfrak{x}_{02} + a_{33}\mathfrak{x}_{03}, \end{aligned} \tag{10}$$

Die gefundene Gruppe hat eine bemerkenswerthe Structur:

Die erklärte neungliedrige Gruppe enthält u. A. eine achtgliedrige invariante Untergruppe, deren Zusammensetzung eine Ausartung der Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene ist.

In der That, schreibt man die allgemeine projective Gruppe in der Ebene so:

$$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

setzt man sodann

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}\ , & c_{12} &= \lambda a_{12}, & c_{13} &= \lambda a_{13}, \\ c_{21} &= \lambda a_{21}, & c_{22} &= a_{22}\ , & c_{23} &= a_{23}\ , \\ c_{31} &= \lambda a_{31}, & c_{32} &= a_{32}\ , & c_{32} &= a_{33}\ , \end{aligned}$$

und geht man zur Grenze $\lambda = 0$ über, so entsteht aus der homogen geschriebenen Parametergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe die Parametergruppe *der* Untergruppe von (9), die sich durch die Annahme $k = 1$, $a_{11} = 0$ ergiebt. —

Um dem auf S. 334 angeführten Satze negativen Inhalts eine positive Wendung zu geben, bilden wir die planare Kettencongruenz, der Kürze halber sogleich in der canonischen Darstellung, auf eine Fläche des Gebietes neunter Stufe ab, indem wir die Grössen $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ als projective Punktcoordinaten deuten (S. 272). Da nach Nr. (8)

$$\mathfrak{X}_1 = 0, \quad \mathfrak{X}_{11} = 0$$

wird, so entsteht eine Fläche, die in einem durch die Coordinaten

$$\mathfrak{X}_2^{\,2},\ \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3,\ \mathfrak{X}_3^{\,2},\ \mathfrak{X}_{22},\ \mathfrak{X}_{33}$$

bestimmten Gebiet fünfter Stufe, also in einem Raume von vier Dimensionen verläuft, und die partieller Durchschnitt dreier quadratischer Mannigfaltigkeiten ist; denn es bestehen identisch die Gleichungen

$$(11) \qquad \mathfrak{X}_2^{\,2} \cdot \mathfrak{X}_3^{\,2} - (\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3)^2 = 0,$$

$$(12) \qquad \mathfrak{X}_2^{\,2} \cdot \mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 \cdot \mathfrak{X}_{33} = 0, \quad \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 \cdot \mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3^{\,2} \cdot \mathfrak{X}_{33} = 0,$$

Diese Fläche ist von der dritten Ordnung. Ihre Punkte werden auf die Geraden $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$,

$$\sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2 + \sigma_3\xi_3 = 0$$

einer Ebene im Allgemeinen-eindeutig abgebildet durch die Substitutionen

$$\mathfrak{X}_2^{\,2} = \sigma_2^{\,2}, \quad \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 = \sigma_2\sigma_3, \quad \mathfrak{X}_3^{\,2} = \sigma_3^{\,2}, \quad \mathfrak{X}_{22} = \sigma_1\sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{33} = -\sigma_1\sigma_2,$$

wobei indessen einer, der „unendlich fernen“ Geraden $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ alle Punkte einer auf der Fläche gelegenen isolirten Geraden — der *„Leitlinie“* —

$$\mathfrak{X}_2^{\,2} = 0, \quad \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 = 0, \quad \mathfrak{X}_3^{\,2} = 0$$

zugeordnet werden. Jedem Parallelenbüschel $\sigma_2 : \sigma_3 = \text{const.}$, oder jedem uneigentlichen Punkt, entspricht eine Gerade auf der Fläche

und jedem von nicht parallelen Geraden gebildeten Büschel oder also jedem eigentlichen Punkt $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ $(\xi_1 \neq 0)$ ein auf der Fläche enthaltener Kegelschnitt, gelegen in der Ebene

$$\xi_2 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 + \xi_3 \mathfrak{X}_3^2 + \xi_1 \mathfrak{X}_{22} = 0,$$
$$\xi_2 \mathfrak{X}_2^2 + \xi_3 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 - \xi_1 \mathfrak{X}_{33} = 0.$$

Keine dieser ∞^2 Ebenen enthält einen Punkt der Leitlinie; alle zugehörigen Kegelschnitte sind durch die geradlinigen Erzeugenden der Fläche auf die Leitlinie und auf einander projectiv bezogen. — Wir heben das Wesentliche hiervon in folgender Form hervor:

Nennen wir *Normalregelfläche 3. Ordnung* das Erzeugniss einer projectiven Zuordnung zwischen den Punkten eines irreducibelen Kegelschnittes und den Punkten einer Geraden, die die Ebene des Kegelschnittes nicht trifft — der *Leitlinie* der Fläche — so können wir sagen:

Die planare Kettencongruenz lässt sich ausnahmslos-eindeutig und stetig abbilden auf die Punkte irgend einer Normalregelfläche 3. Ordnung (die in einem Raume von vier Dimensionen liegt). Dabei werden den Strahlen der Punktkette in der Congruenz projectiv zugeordnet die Punkte der Leitlinie; jedem der ∞^1 Parallelenbüschel die Punkte einer Erzeugenden der Fläche; und den Strahlen irgend einer der ∞^2 Ketten die Punkte irgend eines auf der Fläche gelegenen Kegelschnittes. Dieser ist durch die Erzeugenden projectiv auf die Leitlinie bezogen.

Man ergänzt leicht:

Die Normalregelfläche 3. Ordnung gestattet eine sechsgliedrige projective Gruppe, und auf diese ist die Gruppe aller radial- (oder dual-) collinearen Transformationen, die die planare Congruenz in Ruhe lassen, (S. 335), *durch die Abbildung (natürlich meroëdrisch-) isomorph bezogen.* —

Projicirt man die Normalregelfläche 3. O. in den dreifach ausgedehnten Raum, d. h., führt man an Stelle der Grössen $\mathfrak{X}_2^2$, $\mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_3^2$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$ irgend fünf ganze lineare und linear-unabhängige Functionen von ihnen ein, und deutet man dann vier von diesen als projective Coordinaten, so entsteht — wenn das Projectionscentrum, die letzte Ecke des Coordinatenpentaeders, nicht gerade auf der Fläche selbst liegt — als Projection wieder eine Regelfläche 3. O., und zwar kann — wie sich unschwer zeigen lässt — *jede beliebige* nicht kegelförmige Regelfläche 3. O. des Raumes als eine solche Projection aufgefasst werden. Jede dieser Projectionen ist, als Ort ihrer Punkte betrachtet, *durchaus-eindeutig* auf die Normalfläche selbst, und damit auch auf die planare Congruenz abgebildet, vorausgesetzt, dass man jeden Punkt der Fläche mit der gehörigen Multiplicität in Anschlag bringt.

Es sind zwei (im reellen Gebiete drei) Fälle zu unterscheiden.

Liegt das Projectionscentrum nicht auf der durch die Gleichung (11) bestimmten, mit der Normalregelfläche invariant-verbundenen quadratischen Mannigfaltigkeit, so entsteht die sogenannte *allgemeine* Regelfläche 3. O. des dreifach ausgedehnten Raumes. Sie wird auf ∞^2 Arten erzeugt durch eine bestimmte gerade Punktreihe und einen projectiv darauf bezogenen Kegelschnitt, der die Gerade, die *Leitlinie* der Fläche nicht trifft. Sie wird insbesondere auch dadurch erzeugt, dass man eine *auf der Leitlinie* gelegene quadratische Involution projectiv bezieht auf die Punkte einer zweiten Geraden, die eine *Doppellinie* der Fläche ist. Diese Fläche hängt von 13 Constanten ab, und gestattet eine zweigliedrige projective Gruppe.

Tritt der ausgeschlossene Fall ein, so entsteht der als *Cayley'sche Fläche* bekannte Grenzfall, mit 12 Constanten und einer dreigliedrigen projectiven Gruppe. Doppellinie und Leitlinie haben sich vereinigt; die Leitlinie trifft jetzt jeden der ∞^2 Kegelschnitte, mit dem zusammen sie die Fläche erzeugt.

Der erste Fall, der uns hier allein näher interessirt, wird z. B. dargestellt durch folgende Projection der Normalfläche:

$$x_0 - x_1 = \mathfrak{X}_2^2, \quad x_0 + x_1 = \mathfrak{X}_3^2, \quad x_2 - x_3 = \mathfrak{X}_{22}, \quad x_2 + x_3 = \mathfrak{X}_{33}.$$

Die Gleichung dieser Fläche 3. O. ist

$$x_1(x_2^2 + x_3^2) + 2x_0x_2x_3 = 0. \tag{13}$$

Dies ist, wie wir später sehen werden, bei Deutung von $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ als rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten, ein *Cylindroid*. Die Doppelgerade $x_2 = x_3 = 0$ verläuft im Endlichen, die Leitlinie $x_0 = x_1 = 0$ liegt unendlich fern. Jedem Punkt $x_0 : x_1$ der Doppellinie wird durch die Gleichung selbst ein bestimmtes Punktepaar der Leitlinie zugeordnet; wenn man entsprechende Punkte durch Gerade verbindet, so entsteht die Fläche.

Die planare Kettencongruenz ist durchaus-eindeutig auf diese Fläche so abgebildet, dass den ∞^1 Punktstrahlen die Punkte der Leitlinie entsprechen, den Parallelenbüscheln die Erzeugenden, und den Ketten die ∞^2 Kegelschnitte in den Tangentialebenen. *Ausgenommen* hiervon ist nur eine Kette, deren Strahlen ihre Bilder auf der Doppelgeraden haben. Im reellen Gebiete verläuft die Doppelgerade theilweise isolirt. Der isolirte Theil ist wegzulassen, wenn es sich um die Abbildung *reeller* Strahlen einer reellen Congruenz handelt.

Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls.

Benutzen wir sogleich die canonische Form, und Coordinaten zweiter Art, so wird das Normalennetz des eigentlichen Strahls dargestellt durch die Gleichungen

$$(14) \qquad \mathfrak{X}_1 = 0; \quad \mathfrak{X}_{22} = 0, \quad \mathfrak{X}_{33} = 0.$$

Deuten wir die hiernach noch übrig bleibenden Grössen

$$\mathfrak{X}_2^2, \quad \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3, \quad \mathfrak{X}_3^2, \quad \mathfrak{X}_{11}$$

als homogene Punktcoordinaten in einem quaternären Gebiet, so ergiebt sich ohne Weiteres:

*Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls lässt sich durchaus eindeutig-umkehrbar abbilden auf die Punkte eines irreducibelen Kegels zweiten Grades, und zwar ein reelles Normalennetz reell auf die Punkte eines reellen Kegels**).

Dabei entspricht der Punktstrahl des Netzes dem Doppelpunkt des Kegels; den Parallelenbüscheln des Netzes entsprechen die geradlinigen Erzeugenden des Kegels; und den Ketten des Netzes entsprechen die ebenen Schnitte des Kegels, die den Doppelpunkt nicht enthalten.

Also auch das Normalennetz ist *nicht* Träger eines ternären Gebietes.

Die dreizehngliedrige (zwölfgliedrige) Gruppe aller radialen (dualen) Collineationen, die das Normalennetz in Ruhe lassen, wird durch die angeführte Abbildung isomorph bezogen auf die siebengliedrige Gruppe aller Collineationen, die den Kegel in Ruhe lassen (auf deren sechsgliedrige invariante continuirliche Untergruppe).

Die zuletzt genannte sechsgliedrige Gruppe ist ein Grenzfall der sechsgliedrigen *continuirlichen* Gruppe von Collineationen, die eine nicht-ausgeartete Fläche 2. Grades in Ruhe lassen, und diese ist, wie bekannt, und wie ohne Weiteres mit Hülfe stereographischer Projection abgeleitet werden kann, soweit die Punkte der Fläche selbst in Frage kommen, ähnlich zur Gruppe der eigentlichen Möbius'schen Kreisverwandtschaften (derer, die die Winkel nicht umlegen). Also ergiebt sich:

Die sechsgliedrige dual-projective Gruppe, deren Raumelement der Strahl des Normalennetzes ist, kann als eine Ausartung der Gruppe der

*) Im Liniencontinuum lässt sich (wie bekannt und übrigens selbstverständlich) das Normalennetz einer *Geraden*, die nicht dem Minimalcomplex angehört, eindeutig abbilden auf die Punkte einer Fläche 2. Grades von *nicht* verschwindender Discriminante.

eigentlichen Möbius'schen Kreisverwandtschaften in der Ebene aufgefasst werden.

Ebenso gehen die ∞^6 Vertauschungen von Strahlen des Normelennetzes durch duale Anticollineationen aus den ∞^6 uneigentlichen Möbius'schen Kreisverwandtschaften hervor. — Man kann diese Grenzübergänge natürlich auch sehr leicht analytisch durchführen.

Die ∞^3 Ketten im Normalennetz vertreten in der aus dem betrachteten Grenzübergang sich ergebenden Analogie die Stelle der ∞^3 nicht zerfallenden Kreise in der Ebene. Den ∞^3 zerfallenden, nämlich im reellen Gebiete auf Punkte (Punktkreise) sich reducirenden Kreisen sind Paare von Parallelenbüscheln analog, Figuren, die ihrerseits als Grenzlagen von Ketten aufgefasst werden können.

Wie man in der Ebene eine eigentliche (uneigentliche) Kreisverwandtschaft dadurch bestimmen kann, dass man drei verschiedenen Punkten eines *irreducibelen* Kreises drei andere nach Belieben zuordnet, so wird im Normalennetz die duale Collineation (Anticollineation) dadurch eindeutig bestimmt, dass man drei verschiedenen Strahlen *einer Kette* drei andere nach Belieben zuordnet. (S. 330.)

Die Geometrie der Inversionen, und nicht minder die umfassendere Geometrie der conformen Gruppe in der Ebene lässt sich (mit übrigens sehr wesentlichen Aenderungen) auf die Geometrie im Normalennetz übertragen. *Hier, oder in der Geometrie auf dem Kegel 2. Grades, findet die Theorie der synektischen Functionen einer dualen Veränderlichen* (S. 199) *eine einfache geometrische Deutung.*

Durch (imaginäre) Correlationen können die Punkte eines (reellen) irreducibelen Kegels zweiten Grades übergeführt werden in Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren. Daraus ergiebt sich:

Die siebengliedrige (sechsgliedrige) Gruppe aller reellen und imaginären radial-(dual-) collinearen Vertauschungen der Strahlen eines Normalennetzes ist holoedrisch (durchaus eindeutig) isomorph zur Gruppe der reellen und imaginären Aehnlichkeitstransformationen (Bewegungen) im Raume.

Beide Gruppen werden so isomorph auf einander bezogen, dass den eigentlichen Strahlen des Netzes die Ebenen zugeordnet werden, die den absoluten Kegelschnitt berühren, und den ∞^3 reellen und imaginären Ketten im Netz die ∞^3 eigentlichen reellen und imaginären *Punkte* des Euklidischen Raumes. Je zwei Ketten, die einander berühren, entsprechen zwei Punkte einer eigentlichen Minimalgeraden.

Endlich lässt sich die genannte siebengliedrige Gruppe, und zwar auf reellem Wege, auch dadurch in eine projective Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes überführen, dass man die Strahlen des

Netzes auf die Geraden einer speciellen Congruenz 1. O. 1. Cl. abbildet. (S. 282, 283, 309.)

Das Parallelenbündel.

Das Parallelenbündel (wie selbstverständlich auch die speciellste zweidimensionale Kette, das Feld aller Punktstrahlen) ist wieder *Träger eines ternären Gebietes.* Es ist also bei dem folgenden Satze nicht nothwendig, die Punktstrahlen und die uneigentlichen Punkte auszuschliessen.

Von der fünfzehn-(vierzehn-)gliedrigen Gruppe aller radialen (dualen) Collineationen, die ein Parallelenbündel in Ruhe lassen, werden die Strahlen des Bündels selbst ebenso unter einander vertauscht, wie die Punkte einer Ebene von der sechsgliedrigen Gruppe aller affinen Transformationen.

(Vgl. den Satz auf S. 244.)

Rechnen wir das Bündel

$$\mathfrak{U}_2 = 0, \quad \mathfrak{U}_3 = 0, \quad \mathfrak{U}_{11} = 0 \tag{15}$$

zum zweiten Blatt des doppelt überdeckten ersten natürlichen Continuums, so sind die Coefficienten in den Gleichungen der genannten Gruppen (s. S. 237) der Matrix zu entnehmen

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} + \beta_{11}\varepsilon, & b_{12} + \beta_{12}\varepsilon, & b_{13} + \beta_{13}\varepsilon \\ \beta_{21}\varepsilon, & b_{22} + \beta_{22}\varepsilon, & b_{23} + \beta_{23}\varepsilon \\ \beta_{31}\varepsilon, & b_{32} + \beta_{32}\varepsilon, & b_{33} + \beta_{33}\varepsilon \end{matrix} \right\| \{k \cdot b_{11} \cdot (b_{22}b_{33} - b_{22}b_{32}) \neq 0\}. \tag{16}$$

Die Strahlen des Bündels werden hierbei, wenn man Coordinaten erster Art benutzt, folgendermaassen vertauscht (Vgl. Nr. 10):

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}'_{01} &= kb_{11}\mathfrak{U}_{01} \qquad * \qquad * \quad , \\ \mathfrak{U}'_{31} &= \beta_{21}\mathfrak{U}_{01} + b_{22}\mathfrak{U}_{31} + b_{23}\mathfrak{U}_{12}, \\ \mathfrak{U}'_{12} &= \beta_{31}\mathfrak{U}_{01} + b_{32}\mathfrak{U}_{31} + b_{33}\mathfrak{U}_{32}. \end{aligned} \tag{17}$$

Einschaltung, Steiner'sche Flächen betreffend.

Die radial-projectiven Eigenschaften der untersuchten Figuren hängen nahe mit manchen metrischen zusammen. Das Studium dieser letzten Eigenschaften soll von uns ebenfalls nicht vernachlässigt werden; es veranlasst uns hier zunächst zu einem Einschub. —

Projicirt man die auf S. 333 erwähnte rationale Normalfläche 4. Ordnung aus dem Raum von fünf Dimensionen in eine krumme Fläche des dreifach ausgedehnten Raumes, so kommt man zu einer Familie von

algebraischen Flächen, die das Gemeinsame haben, dass die homogenen Coordinaten eines veränderlichen Punktes als ganze rationale homogene Functionen zweiten Grades (quadratische Formen) von drei Verhältnissgrössen dargestellt werden können. Diese Flächen sind dadurch, im Allgemeinen-eindeutig, auf ein ebenes Punktfeld abgebildet, derart, dass jedem ebenen Schnitt eine Curve 2. O. entspricht; und zwar ist die Abbildung völlig eindeutig, wenn diese ∞^3 Curven 2. O., die ein lineares System *vierter* Stufe bilden, vier bewegliche Schnittpunkte, also keinen gemeinsamen Punkt haben. Die genannten Flächen heissen unter dieser Voraussetzung, die damit gleichbedeutend ist, dass sie die Ordnung vier haben, *Steiner'sche Flächen*. Wir werden weiterhin mehrfach von Flächen dieser Art reden müssen. Wir stellen daher, unter Verzicht auf Formeln, von ihrer bekannten Theorie zur Bequemlichkeit des Lesers soviel zusammen, als zum Verständniss des Weiteren nothwendig ist*).

Der nicht selten allein betrachtete sogenannte allgemeine Fall einer Steiner'schen Fläche ist der, in dem die Curven 2. Classe, die zu den ∞^3 Bildern der ebenen Schnitte conjugirt (Poldreiecken dieser Curven eingeschrieben) sind, eine — zu dem Kegelschnittsystem „reciproke" — Schaar mit vier *getrennten* Basislinien bilden, die dann, doppelt zählend, als ausgeartete Curven 2. O., zu dem System 4. Stufe gehören, und dieses bestimmen. Auch wir betrachten der Kürze halber näher nur diesen einfachsten Fall.

Die genannte Schaar von Curven 2. Cl. enthält dann drei getrennte Punktepaare, die conjugirt sind zu allen Curven 2. O. des Systems 4. Stufe, die Paare von Gegenecken des von den vier Basislinien gebildeten vollständigen Vierseits. Paare von Geraden in der Ebene also, die von zweien dieser Punktepaare, und daher auch vom dritten, harmonisch getrennt werden, haben zu Bildern im Raume Paare von Kegelschnitten auf der Steiner'schen Fläche, die deren Durchschnitt mit je einer ihrer Tangentialebenen bilden**). Nunmehr ergiebt sich,

*) Vgl. insbes. Clebsch, Journal f. Mathematik Bd. 67 (1866).

**) Nach einem Satze von Picard sind die Steiner'schen die einzigen nichtgeradlinigen Flächen, deren ebene Schnitte rationale Curven sind. (Journal f. Math. 1886, Bd. 101, S. 71; vgl. Guccia, Rend. Palermo 1 — diese Arbeit d. V. unzugänglich.) Nach einem Satze von Kronecker, den Herr Castelnuovo bewiesen hat (Rend. dell' Acc. dei Lincei, ser. V, v. III, 1 — 1894 — p. 22) sind sie die einzigen algebraischen nicht-geradlinigen Flächen mit ∞^2 zerfallenden ebenen Schnitten. Endlich soll, nach einer uncontrollirbaren Angabe (ebenda) Herr Darboux gezeigt haben, dass die Steiner'schen Flächen und ihre Grenzfälle die einzigen Flächen (des R_3) mit mehr als ∞^1 Kegelschnitten sind.

erstens, dass die Fläche, als Ort ihrer Tangentialebenen, *vier Doppelebenen* hat, deren jede längs eines Kegelschnittes (eines Bestandtheils der parabolischen Curve der Fläche) berührt, dessen Bild eine der vier Basislinien ist. Zweitens, dass die Fläche, als Ort ihrer Punkte, *drei Doppelgerade* hat: Irgend zwei Punkten, die auf einer Diagonale des vollständigen Vierseits liegen, und durch die zugehörigen Ecken harmonisch getrennt werden, entspricht nur *ein* Punkt im Raume. Drittens, dass diese drei Doppelgeraden sich in einem *dreifachen Punkt* der Fläche schneiden, dem Bilde der drei Diagonalschnittpunkte des Vierseits, der Ecken des gemeinsamen Poldreiseits der Schaar von Curven 2. Classe. Viertens folgt, dass diese Curven selbst, als Orte von Punkten betrachtet, die Bilder der *Haupttangentencurven* der Steiner'schen Fläche sind. Wenn nämlich eine Curve 2. O. des Systems 4. Stufe in getrennte gerade Linien zerfällt, so wird jeder ihrer beiden Bestandtheile von einer Curve 2. Cl. der reciproken Schaar berührt; und da diese Curve zu dem Linienpaar conjugirt ist, so muss der Berührungspunkt im Schnittpunkt der beiden Geraden liegen. Eine Tangentialebene der Fläche also, die weder Doppelebene ist, noch zu einem Punkt auf einer der drei Doppelgeraden gehört, durchsetzt diese Fläche in zwei Kegelschnitten, von deren Schnittpunkten drei auf den Doppelgeraden liegen, während die Tangenten im Berührungspunkt der Ebene übereinstimmen mit den Tangenten der Bilder jener beiden Curven 2. Classe, die durch den in der ebenen Abbildung zugeordneten Punkt gehen.

Die Haupttangentencurven der Steiner'schen Fläche sind also Bilder von gewissen ∞^1 *Kegelschnitten, und daher rationale Raumcurven 4. Ordnung*, die die in den Doppelebenen gelegenen Kegelschnitte je einmal berühren*); als Grenzfälle sind dazu zu rechnen die drei Doppelgeraden der Fläche, jede doppelt überdeckt.

Der dreifache Punkt der Fläche ist ein sogenannter *triplanarer* Knotenpunkt, mit drei verschiedenen Tangentialebenen. In jedem anderen Punkt einer der drei Doppelgeraden hat die Fläche zwei Tangentialebenen, und diese, die im Allgemeinen getrennt sind, vereinigen sich in zwei *uniplanaren Knotenpunkten* der Fläche, die auf Gegenkanten des von den Doppelebenen gebildeten Tetraeders liegen, und durch deren jeden also zwei von den Berührungscurven der Doppelebenen

*) Nach einem Satze des Verfassers (Leipz. Ber. 1886, S. 3) ist umgekehrt jede solche Curve Haupttangentencurve auf *einer* Steiner'schen Fläche. Ein Modell der Steiner'schen Fläche, auf dem Haupttangentencurven verzeichnet sind, ist erschienen im Verlag von L. Brill (jetzt M. Schilling in Halle).

hindurchlaufen. Diese uniplanaren Knotenpunkte sind Verzweigungspunkte für die drei doppelt überdeckten Geraden der Fläche.

Die betrachtete „allgemeine" Steiner'sche Fläche hängt von fünfzehn Constanten ab. Sie ist durch das Tetraeder ihrer Doppelebenen und durch ihren dreifachen Punkt eindeutig bestimmt, und hat daher, gegenüber Collineationen, keine absolute Invariante. Sie gestattet demnach nur eine Gruppe von (4.3.2.1) discreten Collineationen. Correlativ zu ihr ist die Fläche 3. O. mit vier getrennten Knotenpunkten.

Weniger genau untersucht als die allgemeine Steiner'sche Fläche sind deren *Ausartungen.* Diese können aber in ähnlicher Art behandelt werden, wie die allgemeine Fläche selbst. Es giebt ihrer zwei, die noch von der vierten Ordnung sind, und von vierzehn und dreizehn Constanten abhängen. Ausserdem giebt es Ausartungen der Steinerschen Fläche, deren Ordnung sich dadurch erniedrigt, dass bei der Abbildung auf die Ebene Punkte der Unbestimmtheit auftreten, Flächen also, die *nicht* in allen Fällen Trägerinnen ternärer Gebiete sein werden.

Bleiben die bei der Parameterdarstellung benutzten vier quadratischen Formen linear-unabhängig, so sind, wie leicht zu erkennen, folgende Reductionen möglich:

1a) Die Bilder der ebenen Schnitte haben *einen* Punkt gemein, und die reciproke Kegelschnittschaar besteht aus einander doppelt berührenden Curven 2. Classe (unter denen sich jener Punkt findet, verdoppelt und dann als Curve 2. Classe betrachtet). *Es ergiebt sich, als Ausartung der Steiner'schen Fläche, die allgemeine Regelfläche 3. Ordnung des dreifach ausgedehnten Raumes* (S. 338).

1b) Ebenso, aber die Kegelschnittschaar besteht aus einander vierpunktig berührenden Curven 2. Classe.

Es entsteht, als zweite Ausartung der Steinerschen Fläche, *die Cayley'sche Fläche 3. Ordnung* (S. 338), deren Leitlinie zugleich Doppellinie ist.

Diese Fläche ist, wie wir bereits erkannt haben, eindeutig und durchaus stetig-abbildbar auf die allgemeine Regelfläche 3. O.; auch sie ist also *nicht* Trägerin eines ternären Gebietes.

2a) Die Bilder der ebenen Schnitte haben zwei getrennte Punkte gemein. Die reciproke Schaar von Curven 2. Classe besteht aus lauter Punktepaaren, die eine Involution bilden. Man erhält eine *Fläche 2. Ordnung* von nicht verschwindender Discriminante, auf der ein Punkt ausgezeichnet ist.

Die Beziehung ist, im projectiven Sinne, eine *stereographische Projection.*

2 b) Die Bilder der ebenen Schnitte berühren alle dasselbe Linienelement. Man erhält eine irreducibele *Kegelfläche 2. Ordnung.*

Uebrigens kann auf verschiedene Weisen auch noch eine Ebene als Ausartung der Steiner'schen Flächen auftreten, wenn nämlich die genannten vier quadratischen Formen linear-abhängig werden.

Stellt man die Steiner'sche Fläche durch eine Gleichung zwischen quaternären Coordinaten dar, so behält sie in Grenzfällen ihre Ordnung bei. Es scheiden sich dann von der linken Seite dieser Gleichung lineare Factoren ab, wie wir weiterhin an Beispielen sehen werden.

Fusspunktcurven und Fusspunktflächen der ein- und zweidimensionalen Ketten.

In § 28, S. 294 haben wir den Begriff des *Fusspunktes* eines eigentlichen Punktes in Bezug auf einen nicht-accessorischen Strahl oder eine gerade Linie eingeführt. Beziehungen dieser Art sind natürlich nicht-invariant gegenüber radialen Collineationen; sie gehören zur Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen. Mit Hülfe der Fusspunkte aber lässt sich mehreren der zuvor nachgewiesenen Abbildungen eine besonders anschauliche Form geben; wir nehmen deshalb diesen Gegenstand nunmehr nochmals auf. *Um uns, unbeschadet einer correcten Ausdrucksweise, kurz fassen zu können, beschränken wir uns in dem, was folgt, auf reelle Figuren.* Also *nur* für solche wird uneingeschränkte Geltung der nachfolgenden Behauptungen in Anspruch genommen.

Die Formeln § 28, Nr. 13 lassen ohne Weiteres erkennen, dass der Ort der Fusspunkte eines eigentlichen Punktes o in Bezug auf die Strahlen eines Cylindroids eine Curve 2. Classe sein muss, die sich auf ein doppelt überdecktes Linienstück dann und nur dann reduciren wird, wenn o auf der Hauptaxe des Cylindroids liegt. Durch Projection parallel zur Hauptaxe auf eine zu dieser senkrechte Ebene geht aus dem Cylindroid ein Strahlenbüschel hervor, und für dieses ist der Ort der Fusspunkte ein Kreis. So kommt man zu dem Satz:

Alle eigentlichen Punkte auf demselben Strahl O' parallel zur Hauptaxe O eines Cylindroids haben in Bezug auf dessen Strahlen dieselbe Fusspunktcurve. Diese ist eine Ellipse, gelegen auf dem durch O und O' gehenden Rotationscylinder, der die Verbindungsebene beider Strahlen zur Symmetrieebene hat. Die Ebene der Ellipse ist Tangentialebene des Cylindroids in ihrem Schnittpunkt mit dem Strahl O'. Cylindroid und Ellipse liegen zu einander perspectiv und sind dadurch projectiv auf einander bezogen.

Hieraus ergiebt sich weiter der folgende Satz, der eine einfache *elementargeometrische Definition des Cylindroids* enthält, und sofort zur

Construction des Cylindroids aus dreien seiner Strahlen (S. 329) verwerthet werden kann:

*Fällt man von den Punkten irgend einer Ellipse, die auf einem gegebenen Rotationscylinder liegt, Normalen auf eine beliebige Erzeugende des Cylinders, so bilden diese Normalen eine Kette**). (Ein Cylindroid, oder, wenn die Ellipse ein Kreis ist, ein ebenes Strahlenbüschel.)

Eine wichtige Anwendung hiervon machen wir weiter unten.

Betrachten wir nun die Fusspunkte eines eigentlichen Punktes o in Bezug auf die Strahlen einer aplanaren Kettencongruenz. Ist diese ein Strahlenbündel, so ergiebt sich als Ort aller reellen Fusspunkte eine Kugel, also eine Fläche, die nicht durchaus-eindeutig auf die Congruenz abgebildet ist, oder ein isolirter Punkt. Diesen trivialen Fall schliessen wir aus. Jetzt können einem und demselben Fusspunkt nur dann unendlich viele Congruenzstrahlen zugeordnet sein, wenn diese Strahlen ein ebenes Büschel bilden. Schliessen wir die besonderen Lagen von o, die das Eintreten dieses Umstandes veranlassen können, ebenfalls aus, so können die zu o gehörigen Fusspunkte nicht alle in einer Ebene enthalten sein. Denn andernfalls würde die reciproke Congruenz unendlich viele Strahlen durch o schicken. Daraus aber würde, *wie wir später* (§ 37, 39) *nachweisen werden*, sich die Folgerung ergeben, dass auch die betrachtete Congruenz selbst ein ebenes Strahlenbüschel durch o schickte. Unter der angegebenen Voraussetzung bilden also die Fusspunkte von o eine krumme Fläche, deren Punkte nach Nr. 13, § 28 quadratische Formen der Veränderlichen $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ als Coordinaten haben; und da das ternäre Gebiet $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ der Congruenz so auf den Ort der Fusspunkte bezogen ist, dass keiner von diesen unendlich oft erscheint, so kann die Fusspunktfläche nur eine Steiner'sche Fläche sein, *niemals* eine Fläche von geringerer als der vierten Ordnung. Mithin ergiebt sich:

Wenn ein eigentlicher Punkt o zu einer aplanaren Kettengruenz so liegt, dass durch ihn keine Hauptaxe eines in der Congruenz enthaltenen ebenen Strahlenbüschels geht, so ist der Ort der zugehörigen Fuss-

*) Es ist dies Cayley's (üblicher Weise durch Coordinatenbeiwerk verdunkelte) Construction, dieselbe, nach der das Cylindroid seinen Namen hat. Eine bessere Rechtfertigung des Namens liegt aber wohl in dem neuerdings bekannt gewordenen Satz, dass jede unebene reelle analytische geradlinige Fläche, deren Fusspunktcurven sämmtlich eben sind, entweder ein Cylinder oder ein Cylindroid sein muss. — Vgl. darüber Arbeiten von Appell (d. Verf. unzugänglich), Bricard und Demoulin, Bull. de la Soc. Math. française, 1900, p. 261, 1901, p. 18, 39.

punkte aller Congruenzstrahlen eine Steiner'sche Fläche). Diese ist hiermit perspectiv und zugleich projectiv bezogen auf die Congruenz.*

Wir werden später sehen, dass jede reelle von einem Strahlenbündel verschiedene aplanare Kettencongruenz, als Ort von Geraden, von der dritten Ordnung ist. Wenn also der Punkt o ausserhalb der Brennfläche der reciproken Congruenz liegt, so entsteht immer eine (metrisch specialisirte) Steiner'sche Fläche des *allgemeinen* Typus, die in o ihren dreifachen Punkt hat. Die im Satze selbst ausgeschlossene Lage aber kann für die Punkte von höchstens zwei reellen Geraden oder Strahlen eintreten, die wir *Focalaxen* der Congruenz nennen werden. (S. § 37.) Es scheidet sich dann von der Steiner'schen Fläche ein Paar conjugirt-imaginärer Ebenen ab, die den absoluten Kegelschnitt berühren, und es bleibt als Ort reeller Fusspunkte ein *Ellipsoid* übrig, das sich überdies zu einem doppelt überdeckten Ebenenstück (einer Kreisscheibe) abplattet, wenn der Punkt o selbst Scheitel eines in der vorgelegten Congruenz enthaltenen Strahlenbüschels (und damit auch Scheitel eines Büschels von Strahlen der reciproken Congruenz) ist. Es ergeben sich dann also Fusspunktflächen, die (im üblichen Sinne des Wortes jedenfalls) *nicht* als Steiner'sche Flächen bezeichnet werden dürfen.

Geht man von einer aplanaren Congruenz zu einer planaren über, so schnürt sich, wie wir später (§ 39) durch eine besondere Rechnung bestätigen werden, von der Congruenz das begleitende Parallelenbündel ab, und dem entsprechend muss sich die Ordnung der Fusspunktfläche um eine Einheit verringern. Und in der That lässt sich zeigen:

Wenn ein eigentlicher Punkt o so, wie zuvor angegeben, gegen eine planare Kettencongruenz liegt, so ist seine Fusspunktfläche eine geradlinige Fläche 3. O., mit unendlich-ferner Leitlinie und einer durch o gehenden Doppelgeraden. (S. oben S. 338.)

Alle Punkte o, die auf demselben Strahl des die reciproke Congruenz begleitenden Parallelenbündels liegen, haben dieselbe Fusspunktfläche.

Die perspective Abbildung der Congruenz auf irgend eine dieser Fusspunktflächen ist durchaus-eindeutig und hat die auf S. 338 näher bezeichnete Beschaffenheit.

Hier haben wir also eine zwar specielle, aber besonders bemerkenswerthe Art der besprochenen Abbildung der planaren Congruenz

*) Dieser Satz ist, ohne die zugehörigen beiden Einschränkungen, von Herrn C. Joly aufgestellt worden. (Ball, a. a. O., S. 182.) Einen besonders interessanten Specialfall, auf den wir später noch näher eingehen werden, hatte zuvor schon Herr E. Waelsch untersucht.

auf eine Fläche 3. O. vor uns. — Tritt der ausgeschlossene Fall ein, so scheidet sich von der Fusspunktfläche wieder ein Paar conjugirt-imaginärer Ebenen ab, und es bleibt als reelle Fusspunktfläche eine *Ebene* übrig, die natürlich *nicht* durchaus-eindeutig auf die Congruenz bezogen ist. — Auf das ebene Strahlenfeld ist der letzte Satz selbstverständlich überhaupt nicht anwendbar.

Wir schliessen mit der einfachsten aber unzweifelhaft wichtigsten Anwendung der vorausgehenden Ueberlegungen:

Liegt ein eigentlicher Punkt o nicht auf dem irgend ein Normalennetz definirenden eigentlichen Strahl, so ist seine Fusspunktfläche in Bezug auf das Normalennetz offenbar ein Rotationscylinder. Jeder Ellipse auf diesem Cylinder wird dadurch eine in dem Normalennetz enthaltene Kette perspectiv und projectiv zugeordnet, und umgekehrt. Gleichzeitig wird jeder Collineation, die den Cylinder in Ruhe lässt, eine radiale Projectivität im Normalennetz zugeordnet, und umgekehrt.

Hierdurch wird also, wohl auf die denkbar einfachste Weise, der Isomorphismus zwischen den beiden genannten Gruppen anschaulich gemacht. — Die Beziehung zwischen Normalennetz und Cylinder bleibt eindeutig und stetig auch in Bezug auf die imaginären Strahlen und Punkte beider Figuren.

Natürlich kann man, ohne besondere Mühe, alle Sätze über die Zusammensetzung von Bewegungen und Umlegungen sowie überhaupt Aehnlichkeitstransformationen im Euklidischen Raume, insbesondere die von uns in § 1 und § 21 dargelegten Sätze über Spiegelungen, auf die dual- und radial-projective Geometrie im Normalennetz übertragen. Den Spiegelungen an Ebenen insbesondere, die zur Erzeugung aller Umlegungen und Bewegungen ausreichen, entsprechen involutorische Anticollineationen, die ihrerseits zur Erzeugung aller Anticollineationen und Collineationen ausreichend sind. Den Spiegelungen an Punkten aber entsprechen Spiegelungen an Ketten, die paarweise die ∞^3 dualen Schiebungen im Normalennetz hervorbringen. — Zugehörige Formeln zu entwickeln hat keinerlei Schwierigkeit.

Die im gegenwärtigen Paragraphen gemachten Litteraturangaben über die Normalfläche 4. O. und ihre Projectionen sind sicher sehr unvollständig. Die italienische Litteratur enthält viel allgemeiner gehaltene Untersuchungen, deren Resultate sich zum Theil für unsere Zwecke müssen verwerthen lassen. So wird sich jedenfalls einsehen lassen, dass die Normalfläche 4. O. und ihre Projectionen die einzigen analytischen Flächen sind, auf denen mehr als ∞^1 Kegelschnitte liegen, und es wird dann ein später von

uns zu führender Beweis noch ein wenig abgekürzt werden können. Wir können hier nur auf Litteraturangaben in Pascal's Repertorium (Leipzig, 1902) verweisen, die der Verfasser während des Druckes sich nicht mehr hat genügend zu Nutze machen können.

§ 31.

Die dreidimensionalen Ketten und die regulären quadratischen Strahlencomplexe.

Wir betrachten nunmehr, wie zuvor bei den zweidimensionalen Ketten, die Vertheilung der Ketten niederer Dimension in den dreidimensionalen Ketten, und die zu diesen besonders merkwürdigen Strahlencomplexen gehörigen Gruppen radial-projectiver Transformationen. Wir werden sodann diese Figuren einer Verallgemeinerung unterwerfen, um dadurch ihre Stellung innerhalb einer umfassenderen Theorie kennen zu lernen.

Der planare Strahlencomplex.

Die Gleichung des planaren Complexes ist, bei Gebrauch von Coordinaten zweiter Art, und in der canonischen Form:

$$\mathfrak{X}_1 = 0. \tag{1}$$

Setzen wir also

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathfrak{X}_{11}, \quad x_2 = \mathfrak{X}_{22}, \quad x_4 = \mathfrak{X}_{33}, \\ x_1 &= \mathfrak{X}_2{}^2, \quad x_3 = \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3, \quad x_5 = \mathfrak{X}_3{}^2, \end{aligned} \tag{2}$$

so bestehen zwischen diesen Grössen die quadratischen Gleichungen

$$x_1 x_5 - x_3{}^2 = 0, \tag{3}$$

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0, \quad x_2 x_3 + x_4 x_5 = 0. \tag{4}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit Nr. (11) und Nr. (12) in § 30, so ergiebt sich sogleich:

Die Strahlen eines planaren Complexes können durchaus eindeutig zugeordnet werden den Punkten eines dreidimensionalen Kegels (Normalkegels) 3. Ordnung, der in einem Raum (dem projectiven Punktcontinuum) von fünf Dimensionen verläuft, und die Punkte von irgend einer Normalregelfläche 3. Ordnung mit einem ausserhalb von deren ebenem Raum gelegenen Punkte verbindet.

Der planare Strahlencomplex offenbart sich dadurch als ein von dem speciellen linearen Liniencomplex der projectiven Geometrie sehr verschiedenes Gebilde: Dieser letzte Complex kann auf einen Kegel *zweiten* Grades eindeutig abgebildet werden, der in einem ebenen Raum von *vier* Dimensionen verläuft, beide Mannigfaltigkeiten können aber nur durch eine „im Allgemeinen" eindeutige Zuordnung auf einander bezogen werden (wie sich strenge beweisen lässt).

Durch die Abbildung wird die fünfzehn-(vierzehn)-gliedrige radial-(dual)-projective Gruppe des planaren Complexes isomorph bezogen auf die zwölfgliedrige projective Gruppe des Bildkegels (auf deren elfgliedrige invariante Untergruppe).

Dabei wird der Identität zugeordnet eine dreigliedrige Gruppe dualer Schiebungen, die sämmtliche Complexstrahlen einzeln in Ruhe lassen.

Man erhält die zuerst genannten Gruppen, wenn man in den Gleichungen Nr. 19 des § 27 $a_{12} = a_{13} = 0$ (und $k = 1$) setzt. Die Transformationsgleichungen der Complexstrahlen selbst hängen dann von den Parametern α_{11}, α_{21}, α_{31} gar nicht ab. Im zweiten Blatt lassen die genannten Gruppen natürlich ein Parallelenbündel in Ruhe.

Null- und eindimensionale Ketten im planaren Complex.

Wir theilen im Folgenden die von uns zu betrachtenden von Strahlen eines planaren Complexes gebildeten speciellen Figuren in Classen ein, indem wir immer solche Figuren in eine Classe stellen, die durch die Gruppe des Complexes in einander übergeführt werden können. Die verschiedenen Classen von null- und eindimensionalen Ketten, sammt ihren Dimensionenzahlen, sind in der folgenden Tafel zusammengestellt, die zugleich das entsprechende Gebilde auf dem betrachteten cubischen Kegel angiebt.

Der singuläre Strahl des Complexes, der gemeinsame Punktstrahl aller im Complex enthaltenen Normalennetze. ∞^0.	Der *Scheitel* des Bildkegels.
Sonstiger Punktstrahl des Complexes. ∞^2.	Vom Scheitel verschiedener Punkt einer bestimmten diesen Scheitel enthaltenden Ebene, der *Leitebene* des Kegels.
Eigentlicher Complexstrahl. ∞^3.	Sonstiger Punkt auf dem Kegel.
Punktkette, die den singulären Strahl enthält. ∞^1.	Erzeugende des Kegels in der Leitebene.

Sonstige Punktkette. ∞^2.	Gerade allgemeiner Lage in der Leitebene.
Parallelenbüschel, das den singulären Punktstrahl enthält. ∞^2.	Erzeugende allgemeiner Lage.
Sonstiges Parallelenbüschel. ∞^3.	Gerade allgemeiner Lage auf dem Bildkegel.
Strahlenkette. ∞^5.	Kegelschnitt, dessen Ebene den Scheitel des Kegels nicht enthält. (Kegelschnitt allgemeiner Lage.)

Natürlich sind die eindimensionalen Ketten alle *projectiv* auf ihre Bilder bezogen.

Zweidimensionale Ketten im planaren Complex.

Der planare Complex enthält ∞^5 planare Kettencongruenzen, und jede von diesen kann auf eine einzige Weise dargestellt werden durch eine symbolische Gleichung der Form

$$(5) \quad \{\mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{X}_3\}^2 + \{\mathfrak{P}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{P}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{P}_3\mathfrak{X}_{33}\} = 0 \quad \{\mathfrak{P}_1 \neq 0\}.$$

(Vgl. S. 303, Nr. 24.)

Um die analytischen Bedingungen, unter denen durch fünf vorgelegte Complexstrahlen eine und nur eine planare Congruenz geht, in einer Form aussprechen zu können, die unabhängig ist von der gewählten canonischen Gestalt der Complexgleichung, führen wir einen auch sonst wichtigen Begriff ein.

Wir sagen r Strahlen seien in Bezug auf quadratische Strahlencomplexe abhängig im Grade s, oder kürzer, sie haben die Abhängigkeit s, wenn die Zahl aller hindurchgehenden linear-unabhängigen quadratischen Complexe (S. 277) *sich um s Einheiten grösser erweist, als die mechanische Abzählung anzeigt, wenn also diese niemals negative Zahl den Werth*

$$9 - r + s$$

hat.

Bie Bestimmung aller möglichen Figuren von r Strahlen, die eine vorgeschriebene Abhängigkeit s (in Bezug auf quadratische Complexe) haben, ist ein wichtiges Problem der Geometrie der radial-projectiven Transformationen, die einfachste unter einer unendlichen Reihe ähnlicher Aufgaben. Dieses Problem liegt, in seiner allgemeinen Fassung, bereits jenseits des Zieles, das wir uns hier gesteckt haben. Doch haben wir im Vorhergehenden implicite schon mehrere Figuren dieser Art angegeben. Der Leser wird ohne Weiteres erkennen, dass

die *Maximalzahl unabhängiger Strahlen* in der Punktkette und im Parallelenbüschel *zwei*, in der Strahlenkette, im Parallelenbündel und im unendlich fernen Punktfeld *drei*, im Normalennetz *vier*, in der planaren Kettencongruenz *fünf*, und in der aplanaren Kettencongruenz, sowie im planaren Complex *sechs* beträgt. Wir verwenden nun den eingeführten Begriff weiter, wie folgt:

Wenn fünf Strahlen eines planaren Complexes zusammen mit dem singulären Punktstrahl des Complexes eine Figur von sechs unabhängigen Strahlen bilden, so liegen sie in einer einzigen planaren Kettencongruenz.

Wenn vier Strahlen eines planaren Complexes zusammen mit dem singulären Punktstrahl des Complexes eine Figur von fünf unabhängigen Strahlen bilden, so gehören sie einem bestimmten von ∞^1 Strahlen gebildeten Band an, und dieses ist das vollständige Durchdringungsgebilde je zweier von den ∞^1 planaren Congruenzen, die die vier Strahlen enthalten.

Da die ∞^1 planaren Congruenzen durch lineare Combinationen zweier Gleichungen der Form (5) dargestellt werden, so können wir sagen, dass sie ein *Büschel* bilden. Es ist aber zu beachten, dass zu diesem Büschel auch *eine* Congruenz gerechnet werden muss, die nicht selbst eine planare Congruenz ist, sondern nur ein Grenzfall einer solchen. Alle Congruenzen dieser Art entstehen, wenn die bei der Gleichung (5) gemachte Voraussetzung durch die andere $\mathfrak{P}_1 = 0$ ersetzt wird. Wir nennen eine solche Congruenz, wenn sie irreducibel ist, d. h. nicht in mehrere analytisch-getrennte Congruenzen zerfällt, eine *cylindrische Kettencongruenz*, und haben dann offenbar den Satz:

Durch das genannte Strahlenband, die „Basis" des Büschels planarer Congruenzen, geht eine einzige im Büschel enthaltene cylindrische Kettencongruenz, oder, wenn nämlich die Basis selbst reducibel ist, an ihrer Statt eine zerfallende Congruenz. (Vgl. S. 327.)

Die Bedingung, unter der eine Gleichung von der Form (5) wirklich eine cylindrische Congruenz darstellt, reducirt sich auf Grund der Darlegungen auf S. 337 auf die Bedingung, unter der eine Normalregelfläche 3. O. von einem ebenen Gebiet vierter Stufe in einer irreducibelen Raumcurve 3. O. getroffen wird. Man findet ohne Mühe:

$$\mathfrak{P}_1 = 0, \quad (\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_3)^2 \neq 0. \tag{6}$$

Bild der Congruenz wird ein zweidimensionaler Kegel dritter Ordnung, der in einem ebenen Gebiet fünfter Stufe liegt, und in diesem eine achtgliedrige projective Gruppe definirt. Die Congruenz selbst besteht aus ∞^1 Parallelenbüscheln, die den singulären Punktstrahl des planaren Complexes enthalten, und aus einer Punktkette gleicher Eigen-

schaft. Jeder den Scheitel nicht enthaltende ebene Schnitt des genannten Kegels ist Bild eines *irreducibelen* Basisbandes eines Büschels planarer Kettencongruenzen. Ist die ausschneidende planare Congruenz ein ebenes Strahlenfeld, so wird die Basis gebildet von der Gesammtheit der Tangenten einer Parabel, wobei nur an Stelle der unendlich fernen Tangente ein Punktstrahl tritt. Es ergiebt sich also, dass die cylindrische Kettencongruenz eine sehr einfache Figur ist:

Die Strahlen jeder cylindrischen Kettencongruenz umhüllen einen irreducibelen parabolischen Cylinder (S. 301) *und bilden mit dessen Erzeugenden rechte Winkel**).

Ferner erhalten wir den Satz:

Vier eigentliche Strahlen des planaren Complexes, von denen keine zwei parallel sind, und keine drei demselben Normalennetz angehören, bestimmen eine einzige cylindrische Kettencongruenz, und eine einzige auf dieser enthaltene Basis eines Büschels planarer Kettencongruenzen. Dieses Strahlenband ist irreducibel.

Es giebt ∞^6 cylindrische Kettencongruenzen (im ersten Blatt des Strahlencontinuums), deren jede zu einem der ∞^6 parabolischen Cylinder (im zweiten Blatt) gehört; ∞^4 davon liegen in einem vorgeschriebenen planaren Complex. Irgend zwei nicht parallele Strahlen einer dieser cylindrischen Congruenzen liegen in einem bestimmten Normalennetz des Complexes; die Congruenz wird von diesem Netz in zwei Parallelenbüscheln durchsetzt. Es giebt ferner ∞^{10} Basisbänder von Büscheln planarer Kettengruenzen, ∞^8 im vorgelegten planaren Complex. Jedes irreducibele unter ihnen besteht entweder aus den Tangenten einer Parabel, oder es ist zu dieser Figur dual-projectiv. Irgend zwei von ihnen, die derselben planaren oder cylindrischen Congruenz angehören, haben *drei* Strahlen mit einander gemein. Ebenso durchdringen sich zwei verschiedene cylindrische Kettencongruenzen in drei eindimensionalen Ketten, die natürlich nicht nothwendig von einander verschieden sind.

Auf die hier sich anschliessenden *„Büschel cylindrischer Kettencongruenzen“* und noch speciellere Figuren der Art gehen wir nicht näher ein, sondern betrachten nur noch kurz die *Büschel planarer Congruenzen mit zerfallender Basis*, die wir oben ausgeschlossen hatten.

---

*) Die cylindrische Kettencongruenz ist ein Grenzfall der allgemeinen conischen Congruenz (S. 293). Sie ist, wie diese, *synektisch*, und sie theilt diese Eigenschaft unter allen zweidimensionalen Ketten nur noch mit dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls, das wiederum ein Grenzfall der cylindrischen Kettencongrnenz ist.

Ist

$$\mathfrak{P}_1 = 0, \quad (\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_3)^2 = 0, \tag{7}$$

aber nicht zugleich $\mathfrak{P}_2 = 0$, $\mathfrak{P}_3 = 0$, so besteht der durch die Gleichung (5) definirte Strahlenort aus einem Normalennetz und einem Parallelenbündel, die beide ein Parallelenbüschel gemein haben.

Ist

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3 = 0, \tag{8}$$

aber $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3' - \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2')^2 \neq 0$, so entsteht eine Congruenz, die aus zwei getrennten Parallelenbündeln und dem Feld aller Punktstrahlen besteht. Der singuläre Strahl des Complexes gehört beiden Parallelenbündeln an. Beide Parallelenbündel vereinigen sich, wenn auch der zuletzt ausgeschlossene Fall noch eintritt.

Alle diese Figuren sind Ausartungen der cylindrischen Kettencongruenzen. Jede bestimmt zusammen mit irgend einer planaren Congruenz im Complex ein specielles Büschel planarer Congruenzen.

Wir bringen nunmehr die auf S. 350 begonnene Aufzählung zum Abschluss, indem wir jetzt die zweidimensionalen Ketten im Complex ihren Bildern im Gebiet sechster Stufe gegenüberstellen.

Das Feld aller Punktstrahlen. ∞^0.	Die Leitebene des Bildkegels.
Parallelenbündel. ∞^1.	Irgend eine andere Ebene auf dem Bildkegel.
Normalennetz. ∞^2.	Kegel 2. Ordn. (i. Geb. 4. Stufe).
Cylindrische Kettencongruenz. ∞^4.	Kegel 3. Ordn. (i. Geb. 5. Stufe).
Planare Kettencongruenz. ∞^5.	Normalregelfläche 3. Ordnung.

In derselben Weise, wie wir die Büschel planarer Kettencongruenzen untersucht haben, könnten wir natürlich überhaupt lineare Mannigfaltigkeiten *linearer*, d. h. durch lineare Gleichungen zwischen $x_0 \ldots x_5$ darstellbarer Congruenzen im planaren Complex untersuchen. Wir fügen aber nur noch folgende Sätze hinzu, deren Beweisgründe der Leser, begrifflich oder durch Rechnung, sich selbst deutlich machen möge.

Durch die den singulären Punktstrahl enthaltenden Parallelenbüschel sind je zwei im Complex enthaltene *planare* Congruenzen durchaus-eindeutig auf einander bezogen, derart, dass entsprechende eindimensionale Ketten zu einander projectiv sind. Durch ein Büschel planarer Congruenzen werden die Strahlen irgend eines Parallelenbüschels, das den singulären Punktstrahl, aber keinen der ∞^1 Basisstrahlen des Büschels enthält, projectiv auf das Büschel bezogen. Theilt man den Abstand zusammengehöriger Strahlen von zwei, sagen wir der Kürze halber *reellen*, planaren Congruenzen im Complex in einem con-

stanten von der positiven Einheit verschiedenen Verhältniss, so ist der Ort der construirten Strahlen eine neue planare Congruenz, die mit den beiden ersten im selben Büschel liegt. Durch jede planare Congruenz im Complex werden die Complexstrahlen involutorisch gepaart, und in dieser Paarung einander entsprechende Gebilde sind dual-antiprojectiv. Die so bestimmten ∞^5 involutorischen Vertauschungen der Complexstrahlen bilden zusammen mit einer continuirlichen Schaar von ∞^5 dual-projectiven Transformationen eine Gruppe, deren zuletzt genannte continuirliche Untergruppe aus vertauschbaren Transformationen besteht. Diese gemischte Untergruppe der zuvor besprochenen zwölfgliedrigen Gruppe aller radial-projectiven Vertauschungen der Complexstrahlen ist isomorph zur Gruppe der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen eines Raumes von fünf Dimensionen.

Der Kettencomplex.

So wenig als der planare Complex lässt sich der allgemeine Kettencomplex auf das dreifach ausgedehnte Punktcontinuum der projectiven Geometrie durch eine von singulären Elementen freie Abbildung beziehen. Während aber bei den verschiedenartigen Abbildungen des planaren Complexes die singulären Elemente nothwendiger Weise von wesentlichen willkürlichen Parametern abhängen, ist beim Kettencomplex eine einzige (abgesehen von collinearen Transformationen) völlig *bestimmte* Abbildung vorhanden. Man erhält diese, nachdem man die Parameterdarstellung des Complexes auf die canonische Form (S. 314) gebracht hat, einfach dadurch, dass man die Coordinaten *erster* Art eines veränderlichen Complexstrahls als homogene Punktcoordinaten deutet. Rechnen wir den Complex, als das reciproke Gebilde einer zum ersten Blatt gehörigen Strahlenkette, zum zweiten Blatt, so werden alle Complexstrahlen, die dem im Complex enthaltenen Parallelenbündel *nicht* angehören, dargestellt durch die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{U}_{23} &= \tau_0, \quad \mathfrak{U}_{31} = 0, \quad \mathfrak{U}_{12} = 0, \\ \mathfrak{U}_{01} &= \tau_1, \quad \mathfrak{U}_{02} = \tau_2, \quad \mathfrak{U}_{03} = \tau_3. \end{aligned}$$

Damit wird die projective Gruppe

$$(10)\qquad \begin{aligned} \tau_0' &= kb_{11}\tau_0 + \beta_{11}\tau_1 + \beta_{12}\tau_2 + \beta_{13}\tau_3, \\ \tau_1' &= \quad * \quad\; b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + b_{13}\tau_3, \\ \tau_2' &= \quad * \quad\quad * \quad + b_{22}\tau_2 + b_{23}\tau_3, \\ \tau_3' &= \quad * \quad\quad * \quad + b_{32}\tau_2 + b_{33}\tau_2, \\ &\{k \cdot b_{11} \cdot (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) \neq 0\} \end{aligned}$$

übergeführt in die Gruppe aller radial-projectiven Vertauschungen der Strahlen des Kettencomplexes, und sie wird damit holoëdrisch-isomorph bezogen auf die Gruppe aller radial-projectiven Transformationen, die diesen Complex in Ruhe lassen. Gehen wir zu Coordinaten zweiter Art über, und schreiben wir demgemäss die Complexgleichung so:

$$\mathfrak{U}_{11} = 0, \tag{11}$$

so sind die Gleichungen der fraglichen Gruppe diese:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_1' &= b_{11}\mathfrak{U}_1 + b_{12}\mathfrak{U}_2 + b_{13}\mathfrak{U}_3 \\
\mathfrak{U}_2' &= \quad * \quad\; b_{22}\mathfrak{U}_2 + b_{23}\mathfrak{U}_3, \\
\mathfrak{U}_3' &= \quad * \quad\; b_{32}\mathfrak{U}_2 + b_{33}\mathfrak{U}_3, \\
\mathfrak{U}_{11}' &= k(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})\,\mathfrak{U}_{11},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{22}' &= (\beta_{11}\mathfrak{U}_1 + \beta_{12}\mathfrak{U}_2 + \beta_{13}\mathfrak{U}_3)(b_{32}\mathfrak{U}_2 + b_{33}\mathfrak{U}_3) + \\
&\quad + k(b_{32}b_{13} - b_{33}b_{12})\mathfrak{U}_{11} + k\,b_{11}b_{33}\mathfrak{U}_{22} - k\,b_{11}b_{32}\mathfrak{U}_{33}, \\
\mathfrak{U}_{33}' &= -(\beta_{11}\mathfrak{U}_1 + \beta_{12}\mathfrak{U}_2 + \beta_{13}\mathfrak{U}_3)(b_{22}\mathfrak{U}_2 + b_{23}\mathfrak{U}_3) + \\
&\quad + k(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})\mathfrak{U}_{11} - k\,b_{11}b_{23}\mathfrak{U}_{22} + k\,b_{11}b_{22}\mathfrak{U}_{33}.
\end{aligned}$$

Es ergiebt sich aus dem Gesagten:

Der Kettencomplex lässt sich auf einen ebenen Punktraum derart abbilden, dass die zehngliedrige radial-projective Gruppe, deren Raumelemente die Complexstrahlen sind, übergeht in die projective Gruppe, die ein Linienelement in Ruhe lässt.

Diese Abbildung ist nur im Allgemeinen-eindeutig. Ihre Stellen der Unbestimmtheit sind auf der einen Seite die Strahlen des im Complex enthaltenen Parallelenbündels, auf der anderen der Punkt des Linienelementes.

Wir lassen eine Beschreibung der im Complex enthaltenen Ketten niederer Dimension folgen. Dabei heben wir durch den Druck die Figuren hervor, bei denen die Eindeutigkeit der Abbildung gestört wird. Der Punkt $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ des Linienelementes wird mit p, die Gerade $\tau_2 = \tau_3 = 0$ des Linienelementes mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

Der singuläre (eigentliche) Complexstrahl O, die Hauptaxe der reciproken Strahlenkette. ∞^0.	*Alle Punkte der Geraden* $\mathfrak{P}$. ∞^1.
Ein zu O paralleler eigentlicher Strahl. ∞^2.	*Der Punkt p.* ∞^0.
Irgend ein Punktstrahl im Complex. ∞^1.	*Der Punkt p.* ∞^0.

Complexstrahl allgemeiner Lage. ∞^3.	Punkt allgemeiner Lage. ∞^3.
Die Punktkette im Complex. ∞^0.	Der Punkt p. ∞^0.
Parallenbüschel, *nicht* parallel zu O. ∞^2.	Gerade durch p, verschieden von $\mathfrak{P}$. ∞^2.
Parallelenbüschel, parallel zu O, aber O *nicht* enthaltend. ∞^2.	Der Punkt p. ∞^0.
Parallelenbüschel, durch O. ∞^1.	Der Punkt p. ∞^0.
Strahlenkette durch O. ∞^3.	Gerade, die $\mathfrak{P}$ schneidet, aber nicht durch p geht. ∞^3.
Sonstige Strahlenkette in einem Normalennetz des Complexes. ∞^4	Irreducibeler Kegelschnitt, der $\mathfrak{P}$ in p berührt. ∞^4.
Strahlenkette in keinem Normalennetz des Complexes enthalten. ∞^4.	Gerade, die $\mathfrak{P}$ *nicht* trifft. ∞^4.

Es giebt also *zwei* getrennte Schaaren von ∞^2 Parallelenbüscheln, und *zwei* getrennte Schaaren von ∞^4 Ketten im Kettencomplex; jeder eigentliche Strahl, der den singulären Strahl O nicht senkrecht kreuzt oder schneidet, ist Hauptaxe einer dem Complex angehörigen Kette, die selbstverständlich in keinem Normalennetz des Complexes liegt.

Das Parallelenbündel durch O. ∞^0.	Der Punkt p. ∞^0.
Normalennetz im Complex. ∞^1.	Ebene durch $\mathfrak{P}$. ∞^1.

Jedes der ∞^1 Normalennetze verbindet den singulären eigentlichen Strahl O des Complexes mit einem der ∞^1 im Complex enthaltenen Punktstrahlen.

Planare Kettencongruenz. ∞^2.	Ebene allgemeiner Lage durch p. ∞^2.

Es können also irgend zwei Complexstrahlen, die weder zu O parallel sind, noch demselben Normalennetz angehören, durch *eine* im Complex verlaufende planare Kettencongruenz verbunden werden. Jede der ∞^2 planaren Congruenzen im Complex ist Durchschnitt des Kettencomplexes mit irgend einem *der* planaren Complexe, die den singulären Strahl O nicht enthalten. Das im Kettencomplex enthaltene Parallelenbündel begleitet sämmtliche planare Congruenzen, die dem Complex angehören (S. 334). Cylindrische Kettengruenzen (S. 352) enthält der Kettencomplex *nicht*.

Aplanare Kettencongruenz. ∞^3.	Ebene allgemeiner Lage (solche, die p nicht enthält). ∞^3.

Jede dieser Congruenzen enthält den singulären Strahl O. Irgend drei Complexstrahlen, die weder zu O parallel sind, noch durch einen planaren Complex verbunden werden können, bestimmen eine dem Kettencomplex angehörige aplanare Kettencongruenz. —

Natürlich lassen sich aus der betrachteten Abbildung eine Menge weiterer Schlüsse ziehen. Man kann u. A. die auf Ebenen abgebildeten Congruenzen im Complex zu Büscheln u. s. w. zusammenfassen. Man kann überhaupt Strahlenbänder und Congruenzen, die im Kettencomplex enthalten sind, mit Hülfe der Abbildung untersuchen. Wir werden einige dieser Gebilde noch zu betrachten haben. Hier heben wir hervor:

Die Individuen einer jeden der aufgestellten Mannigfaltigkeiten von Ketten werden durch die Gruppe des Kettencomplexes transitiv unter einander vertauscht.

Keine dieser Ketten hat also eine absolute Invariante.

Bemerkt zu werden verdient ferner, dass mit der Abbildung der ∞^3 Strahlen des zum zweiten Blatte gehörigen Kettencomplexes $\mathfrak{U}_{11} = 0$ auf die Punkte τ eines ebenen Raumes eine Abbildung der ∞^4 Strahlen des *ersten* Blattes auf die Geraden Ξ jenes Punktraums, also eine *Abbildung des ersten natürlichen Strahlencontinuums auf das Plücker'sche Liniencontinuum* invariant verbunden ist. Diese Abbildung, die sich aus der Beziehung der nicht in Normalennetzen des Complexes gelegenen ∞^4 Ketten zu Strahlen des ersten Blattes ergiebt, wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \Xi_{01} &= \mathfrak{X}_{11}, \quad \Xi_{02} = \mathfrak{X}_{22}, \quad \Xi_{03} = \mathfrak{X}_{33}, \\ \Xi_{23} &= -\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1, \quad \Xi_{31} = -\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2, \quad \Xi_{12} = -\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3. \end{aligned}$$

Ihre *singulären Elemente* sind auf der einen Seite die Strahlen des planaren Complexes $(\mathfrak{X}_1 = 0)$, dem die zum Kettencomplex reciproke Kette angehört, auf der anderen die Geraden des speciellen linearen Liniencomplexes oder Liniengebüsches $(\Xi_{23} = 0)$, das durch die Gerade $\mathfrak{P}$ bestimmt ist.

Wir können auf diese bemerkenswerthe Abbildung nicht näher eingehen. Wir fügen nur hinzu, dass mehrere der weiterhin abzuleitenden Sätze als Folgerungen aus der Theorie dieser Abbildung betrachtet werden können.

Classification der quadratischen Strahlencomplexe.

Der Kettencomplex enthält nur *eine* Constante weniger als der allgemeine quadratische Strahlencomplex. Es ist daher vortheilhaft,

in unserem Zusammenhang auch quadratische Strahlencomplexe überhaupt zu betrachten.

Vor Allem wird man sich die Frage vorlegen nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein gegebener quadratischer Strahlencomplex ein Kettencomplex ist. Wir stellen uns aber auf einen umfassenderen Aussichtspunkt und fragen sogleich nach der Classeneintheilung der quadratischen Complexe, die durch die dualen (oder radialen) Collineationen bewirkt wird.

Die Invariante, deren Verschwinden aussagt, dass ein quadratischer Complex ein Kettencomplex oder eine speciellere Figur ist, lässt sich sehr schnell ermitteln, wenn man die Gleichung des Kettencomplexes bestimmt, der zu einer vorgelegten Kette reciprok ist. Stellen wir die Kette dar durch eine Basis X, Y, so wird die Gleichung des zugehörigen Kettencomplexes (der im zweiten Blatte liegt):

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{X}) & (\mathfrak{U}\,\mathfrak{X}) \\ (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{Y}) & (\mathfrak{U}\,\mathfrak{Y}) \end{vmatrix} = 0.$$

Ordnen wir nach Coordinaten zweiter Art, und führen wir dann für die linke Seite eine abkürzende (symbolische S. 303) Bezeichnung ein:

$$(\mathfrak{Q}\,|\,\mathfrak{U})^2 + (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) = 0, \tag{14}$$

so ergiebt sich durch Elimination der Parameter $\mathfrak{X}_{ik}$, $\mathfrak{Y}_{ik}$ sofort eine Gleichung zwischen den Coefficienten der Complexgleichung, die für jeden Kettencomplex besteht:

$$(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})^2 = \Sigma \mathfrak{Q}_{ik}\mathfrak{B}_i\mathfrak{B}_k = 0. \tag{15}$$

Nehmen wir an, dass diese Gleichung *nicht* erfüllt ist, so finden wir sehr leicht, dass jeder Strahlencomplex dieser Art schon durch dual-collineare Transformationen auf die Gleichungsform $\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_{11} = 0$ gebracht werden kann, dass also jeder zu jedem dual-projectiv ist. So ergiebt sich fast unmittelbar die folgende *Classification der quadratischen Complexe:*

I. $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})^2 \neq 0.$

$$\boxed{\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_{11} = 0} \quad \infty^8.$$

II. $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})^2 = 0, \quad (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{B}}) \neq 0.$

$$\boxed{\mathfrak{U}_{11} = 0} \quad \infty^7.$$

III. $(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{B}}) = 0, \quad \tfrac{1}{6}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}'')^2 \neq 0.$

$$\boxed{\mathfrak{U}_1^2 \pm (\mathfrak{U}_2^2 + \mathfrak{U}_3^2) = 0} \quad \infty^5.$$

IV. $(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{B}}) = 0, \quad \frac{1}{6}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}'')^2 = 0, \quad \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Y})^2 \neq 0.$

$$\boxed{\mathfrak{U}_2^{\,2} \pm \mathfrak{U}_3^{\,2} = 0} \quad \infty^4.$$

V. $(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{B}}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Y})^2 = 0.$

$$\boxed{\mathfrak{U}_1^{\,2} = 0} \quad \infty^2.$$

Bei jeder Classe haben wir gleich eine canonische Form ihrer Gleichung, und die Dimensionenzahl der Classe angegeben.

Einen jeden Complex der Classe I nennen wir einen *regulären quadratischen Strahlencomplex*. In der Classe II stehen die *Kettencomplexe*. $(\mathfrak{B}\,\underline{\mathfrak{B}}) \neq 0$ bedeutet natürlich: Es verschwinden nicht gleichzeitig $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, die Coefficienten von $\mathfrak{U}_{11}$, $\mathfrak{U}_{22}$, $\mathfrak{U}_{33}$ in der Complexgleichung. Tritt der hiermit ausgeschlossene Fall ein, so lassen sich die eigentlichen Complexstrahlen auf ∞^1 Parallelenbündel vertheilen, und wir erhalten weiter so viele Arten noch speciellerer Complexe, als es Arten von projectiv-verschiedenen Curven 2. Ordnung in einer Ebene giebt. Die Classe III enthält *die irreducibelen conischen Complexe* (S. 327). Das doppelte Vorzeichen, das sonst auch entbehrt werden kann, ist in der canonischen Gleichung deshalb beigefügt, damit bei der Transformation eines reellen Complexes (eines solchen mit reeller Gleichung) auf die canonische Form der Gebrauch imaginärer Transformationen vermieden werden kann. In den Classen IV und V stehen *die reducibelen conischen Complexe*, die Paare von verschiedenen oder zusammenfallenden planaren Complexen.

Der reguläre quadratische Strahlencomplex.

Fragen wir nach den in einem regulären quadratischen Complex enthaltenen Ketten, so ergiebt sich zunächst ein negatives, aber, wie sich finden wird, nicht unwichtiges Resultat:

Der reguläre quadratische Strahlencomplex enthält weder eine aplaplanare Kettencongruenz, noch ein Normalennetz eines eigentlichen oder Punktstrahls.

Drückt man nämlich aus, dass durch irgend eine dieser zweidimensionalen Ketten ein quadratischer Complex geht, so folgt sofort, dass dessen Invariante $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})^2$ verschwinden muss. (Vgl. S. 333, 339.)

Danach giebt es im regulären quadratischen Complex folgende Arten von ein- und zweidimensionalen Ketten:

1) *Eine Punktkette:*

$$(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) = \mathfrak{B}_1\mathfrak{U}_{11} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{U}_{22} + \mathfrak{B}_3\mathfrak{U}_{33} = 0. \tag{16}$$

2) ∞^2 *Parallelenbüschel. In jedem Parallelenbündel liegt ein dem Complex angehöriges Büschel, mit einer einzigen Ausnahme.* Das Bündel

$$\mathfrak{U}_1 : \mathfrak{U}_2 : \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{B}_1 : \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{B}_3 \tag{17}$$

nämlich enthält statt eines Parallelenbüschels die Punktkette (16). Da nach Voraussetzung $(\mathfrak{B}\ \mathfrak{D})^2 \neq 0$, so ergiebt sich bei der Substitution $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ in die Complexgleichung und in die Identität $(\mathfrak{U}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) = 0$ zwischen Strahlencoordinaten ein Widerspruch: $(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) \neq 0$, $(\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) = 0$. Dies zeigt, dass man in diesem Falle der Complexgleichung (14) nicht durch endliche Werthe von $\mathfrak{U}_{11}$, $\mathfrak{U}_{22}$, $\mathfrak{U}_{33}$ genügen kann, es sei denn, dass $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_3 = 0$.

Mit dem regulären quadratischen Strahlencomplex ist also ein Parallelenbündel (im gleichen Blatte wie der Complex) invariant-verbunden. Dieses ist unter allen Parallelenbündeln dadurch ausgezeichnet, dass es keinen eigentlichen Complexstrahl enthält.

Lässt man den Complex in einen Kettencomplex übergehen, so verschwindet der Widerspruch, und es entsteht ein Parallelenbündel, das *ganz* von Complexstrahlen gebildet wird. — Offenbar hat man in dieser Betrachtung eine zweite Herleitung der für den regulären quadratischen Complex charakteristischen Ungleichung.

3) ∞^4 *Ketten. Jedes Normalennetz, dessen Punktstrahl dem Complex nicht angehört, durchdringt diesen in einer Kette.* Andere Ketten giebt es nicht im Complex: Die zweite Schaar von ∞^4 Ketten, die wir im Falle des Kettencomplexes gefunden hatten, ist diesem eigenthümlich.

4) ∞^1 *cylindrische Kettencongruenzen.* Sie werden ausgeschnitten durch *die* planaren Complexe, die ihren singulären Punktstrahl im quadratischen Complex haben, nämlich durch die Complexe

$$(\mathfrak{R}\,|\,\mathfrak{U}) = 0, \quad \{(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{R}) = 0\}. \tag{18}$$

Die ∞^3 eigentlichen Complexstrahlen und die ∞^2 Parallelenbüschel im Complex vertheilen sich auf die cylindrischen Kettencongruenzen, derart, dass durch jeden Complexstrahl (und also auch durch jedes der Büschel) eine solche Congruenz geht.

Beim Uebergang zum Kettencomplex werden aus diesen cylindrischen Congruenzen die ∞^1 Normalennetze des Kettencomplexes; es trennt sich dabei in jedem Falle das im Complex enthaltene Parallelenbündel ab.

5) ∞^2 *planare Kettencongruenzen.*

Auf diese vertheilen sich die ∞^4 *Ketten derart, dass jede Kette im Complex einer der planaren Congruenzen angehört.*

Natürlich werden diese Congruenzen ausgeschnitten durch die unter 4) nicht genannten planaren Complexe. —

Singularitäten des quadratischen Complexes.

Die Parallelenbüschel (des ersten Blattes), die zu den im Complex gelegenen Parallelenbüscheln reciprok sind, erfüllen einen planaren Complex,

$$(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) = 0, \tag{19}$$

denselben, der mit dem ausgezeichneten Parallelenbündel verbunden ist.

Sagen wir, ein Strahl $\mathfrak{X}$ des ersten Blattes habe *allgemeine Lage,* wenn er diesem Complex nicht angehört, wenn er also zu keinem Punktstrahl des quadratischen Complexes orthogonal ist, so ist jeder Strahl $\mathfrak{X}$ allgemeiner Lage Hauptaxe einer im quadratischen Complex gelegenen Kette des zweiten Blattes, und daher singulärer Strahl eines Kettencomplexes. Um die Gleichung dieses Kettencomplexes zu finden, braucht man nur auszudrücken, dass die gemeinsame Normale $U = \widehat{XY}$ zweier nicht paralleler eigentlicher Strahlen dem quadratischen Complex angehört. So ergiebt sich, nach Uebergang zu Strahlencoordinaten zweiter Art:

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{X}\mathfrak{Y})^2 + (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Y})(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) = 0. \tag{20}$$

Die Symmetrie der gefundenen Gleichung zeigt, dass der quadratische Complex im ersten Blatt eine Reciprocitätsbeziehung definirt: *Gehört* $\mathfrak{Y}$ *dem durch* $\mathfrak{X}$ *bestimmten Kettencomplex an, so gehört auch* $\mathfrak{X}$ *dem durch* $\mathfrak{Y}$ *bestimmten Kettencomplex an.*

Liegt der Strahl $\mathfrak{X}$ in dem planaren Complex (19), so erhält man statt der Kette ein Paar von Parallelenbüscheln; der durch $\mathfrak{X}$ bestimmte Kettencomplex zerfällt in der Grenzlage in ein Paar planarer Complexe. Man kann also den planaren Complex (19) als *Singularitätencomplex des quadratischen Complexes* bezeichnen.

In dem planaren Complex liegt ferner eine ausgezeichnete Congruenz, die wir *Singularitätencongruenz des quadratischen Complexes* nennen. *Diese Congruenz ist dadurch erklärt, dass sie alle Strahlen (des Singularitätencomplexes) enthält, die nur von einem Parallelenbüschel des quadratischen Complexes orthogonal getroffen werden.*

Wir stellen sie leicht durch Gleichungen dar, wenn wir ausdrücken, dass das Paar planarer Complexe

$$(\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{Y})^2 = (\mathfrak{Q}\mathfrak{X}\mathfrak{Y})^2 + (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Y})\,(\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\mathfrak{Y}) = 0 \quad \{(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) = 0\}$$

sich auf einen doppelt zählenden planaren Complex reducirt. Wir erhalten so die Bedingung für $\mathfrak{X}$, dass die Gleichung

$$\text{(21)} \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{B})^2 =$$
$$= \{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\mathfrak{X})^2 + (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})\,(\mathfrak{Q}\,|\,\underline{\mathfrak{X}})\}\,(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{B})^2 - \tfrac{1}{4}(\mathfrak{B}\underline{\mathfrak{X}}\mathfrak{B})^2 = 0$$

identisch besteht, für alle $\mathfrak{B}$.

Wenn die Gleichung des quadratischen Complexes die besondere Form

$$\text{(22)} \qquad (\mathfrak{Q}\,|\,\mathfrak{U})^2 + (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}) = \mathfrak{U}_1^{\,2} + \mathfrak{U}_{11} = 0$$

hat, wird $(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_1 = 0$, und es ergiebt sich das Gleichungssytem

$$\text{(23)} \qquad \begin{aligned} 4\mathfrak{X}_2^{\,2}\cdot\mathfrak{X}_{11} - \mathfrak{X}_{33}^{\,2} &= 0,\\ 4\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\cdot\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_{22}\mathfrak{X}_{33} &= 0,\\ 4\mathfrak{X}_3^{\,2}\cdot\mathfrak{X}_{11} - \mathfrak{X}_{22}^{\,2} &= 0, \end{aligned}$$

das in Verbindung mit den Gleichungen $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0$ die Singularitätencongruenz *rein* darstellt.

Geht der quadratische Strahlencomplex in einen Kettencomplex über, so reducirt sich die Singularitätencongruenz auf das die reciproke Kette enthaltende doppelt überdeckte Normalennetz und es tritt weiter ein *Singularitätenband* auf, als Ort von Strahlen des ersten Blattes, denen ein unbestimmtes Parallelenbüschel zugehört: Die zum Complex reciproke Strahlenkette.

Die Gleichungen (23) lassen sich in allgemeinster Weise befriedigen durch die Substitutionen

$$\text{(24)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= 0\,, & \mathfrak{X}_{11} &= \quad\ \sigma_1^{\,2}\,,\\ \mathfrak{X}_2 &= \sigma_2\,, & \mathfrak{X}_{22} &= \quad 2\sigma_1\sigma_3\,,\\ \mathfrak{X}_3 &= \sigma_3\,, & \mathfrak{X}_{33} &= -2\sigma_1\sigma_2\,, \end{aligned}$$

die jeder Geraden $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ einer Ebene *einen* Congruenzstrahl zuordnen, nnd umgekehrt. Man kommt auf diese Weise unschwer zu den folgenden Sätzen, mit deren Begründung im Einzelnen wir uns nicht aufhalten können:

Die Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Strahlencomplexes ist rational und Trägerin eines ternären Gebietes.

Ihre Strahlen können z. B. den Geraden einer Ebene ausnahmslos-eindeutig so zugeordnet werden, dass jedem der ∞^2 Linienbüschel mit eigentlichem Scheitel eine in der Congruenz gelegene Kette, jedem Pa-

rallelenbüschel ein parabolischer Cylinder, und der unendlich fernen Geraden der Punktstrahl der Congruenz entspricht.

Die Congruenzstrahlen vertheilen sich zu ∞^1 auf die genannten parabolischen Cylinder, und diese sind identisch mit den ∞^1 Cylindern, die (als Enveloppen) zu den im quadratischen Complex enthaltenen cylindrischen Kettencongruenzen gehören.

Auf diese cylindrischen Congruenzen vertheilen sich zu ∞^2 die Complexstrahlen; so erkennt man, was sich übrigens auch durch Rechnung mit Hülfe der Gleichungen (21) und (23) feststellen lässt:

Der reguläre quadratische Strahlencomplex ist durch seine Singularitätencongruenz eindeutig bestimmt. Es giebt also ∞^8 Congruenzen dieser Art.

Die (endlichen) Transformationen der neungliedrigen *radial-projectiven Gruppe* des regulären quadratischen Strahlencomplexes lassen sich natürlich leicht durch Relationen zwischen den Transformationscoefficienten und dann auch rational durch unabhängige Parameter darstellen. Es scheint aber zu dem Durchschnitt dieser Gruppe mit G_{16} eine viel einfachere Darstellungsweise, eine Darstellung durch homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung zu gehören. *Diese achtgliedrige Gruppe dualer Collineationen muss sich, soweit die Complexstrahlen selbst in Frage kommen, als Grenzfall der einfachen Gruppe auffassen lassen, die aus der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene entsteht, wenn man die ∞^3 Linienelemente als Raumelemente einführt.* Die analytische Durchführung dieses Grenzübergangs und die wirkliche Herstellung der gemeinten Transformationsformeln sind dem Verfasser leider nicht gelungen. Doch hat er sich überzeugt, dass jede der aufgezählten Mannigfaltigkeiten von Ketten schon von der genannten achtgliedrigen Gruppe *transitiv* transformirt wird. — Die Strahlen der Singularitätencongruenz werden von der neungliedrigen Gruppe des Complexes noch sechsgliedrig, isomorph zur Gruppe *aller* affinen Transformationen einer Ebene, vertauscht. *Jedes einzelne Parallelenbüschel im Complex bleibt in Ruhe bei einer dreigliedrigen Gruppe dualer Schiebungen.* Diese bilden den vollständigen Durchschnitt der Gruppe des Complexes mit der Gruppe G_9.

Metrische Erzeugung quadratischer Rotationscomplexe.

Die bisherigen Betrachtungen geben zwar einen Begriff von der Vertheilung der Ketten in einem quadratischen Complex, eine anschau-

liche Vorstellung von diesem Gebilde aber vermitteln sie nicht. Wir betrachten deshalb, unter Beschränkung auf *reelle* Figuren, kurz noch eine *elementar-geometrische Erzeugung* des speciellen Complexes (22) und seiner Singularitätencongruenz (23).

Um eine solche zu erhalten, brauchen wir nur zu bemerken, dass beide zu einander reciproke Figuren die eingliedrige Gruppe aller Drehungen um die Axe $x_2 = x_3 = 0$ gestatten. Es genügt also, irgend einen der erzeugenden parabolischen Cylinder der Congruenz (23) zu kennen. Ein solcher Cylinder wird beispielsweise in Punktcoordinaten dargestellt durch die Gleichung $x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$; man erhält seine Erzeugenden, wenn man in (24) die Annahme $\sigma_3 = 0$ einführt. Lassen wir die angedeuteten Drehungen vor sich gehen, so umhüllt der bewegliche Cylinder das Rotationsparaboloid $x_2^2 + x_3^2 - 4x_0x_1 = 0$, die Fusspunktfläche der Singularitätencongruenz in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten, und die Erzeugenden des Cylinders gehen über in die Tangenten der auf dieser Fläche gelegenen Kreise. Wir sehen also:

Die von den Tangenten der Kreise auf einem Rotationsparaboloid gebildete Congruenz ist die Singularitätencongruenz eines speciellen regulären quadratischen Strahlencomplexes. Die Parallelenbüschel in diesem Rotationscomplex sind reciprok zu den ∞^2 Parallelenbüscheln, die je zwei consecutive parallele Strahlen der Singularitätencongruenz verbinden.

Jeder reguläre quadratische Strahlencomplex ist zu dem so construirten dual-projectiv.

Die angeführte Erzeugungsweise setzt nicht nur die in der Singularitätencongruenz enthaltenen Cylinder, die das Paraboloid in Meridianen berühren, und damit die im quadratischen Complex enthaltenen cylindrischen Congruenzen aufs Schönste in Evidenz, sondern auch die Eigenschaft der Singularitätencongruenz als Trägerin eines ternären Gebietes: Man braucht nur die Congruenzstrahlen parallel zu den Durchmessern auf die Scheitelebene des Paraboloids zu projiciren, um in der Mannigfaltigkeit der erhaltenen *Geraden*

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= 0\,, & \mathfrak{X}_{23} &= 2\sigma_1, \\ \mathfrak{X}_{02} &= \sigma_2\,, & \mathfrak{X}_{31} &= 0\,, \\ \mathfrak{X}_{03} &= \sigma_3\,, & \mathfrak{X}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

das eben auf rein-algebraischem Wege bereits nachgewiesene ternäre Feld zu erkennen. Dem unendlich fernen Punktstrahl der Congruenz, d. i. dem unendlich fernen Punkt des Paraboloids, wird auf diese Art

die unendlich ferne Gerade $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ der Scheitelebene zugeordnet. Ausserdem ergiebt sich eine neue sehr einfache und auschauliche Erzeugungsart des Cylindroids:

Lässt man einen veränderlichen Strahl sich so bewegen, dass er einen Durchmesser eines Rotationsparaboloids senkrecht schneidet, und dass er ausserdem dieses Paraboloid berührt, so beschreibt der Strahl eine Kette — also, wenn der Durchmesser nicht gerade die Hauptaxe der Fläche ist, ein Cylindroid.

Die Berührungscurve zwischen Cylindroid und Paraboloid ist eine Ellipse, aus dem Paraboloid ausgeschnitten durch einen Rotationscylinder, der die Hauptaxe der Fläche enthält. (S. 348.)

Ferner erhalten wir nunmehr auch eine Construction der im quadratischen Complex enthaltenen planaren Kettencongruenzen.

Zu den ∞^1 Strahlen irgend einer der construirten ∞^2 Ketten gehören ∞^1 im quadratischen Complex gelegene Parallelenbüschel. Die Strahlen dieser Büschel erfüllen irgend eine der ∞^2 im Complex enthaltenen planaren Kettencongruenzen. —

Man mache sich deutlich, wie der zu einem ebenen Strahlenbüschel gehörige Kettencomplex als Grenzfall der betrachteten Figur entsteht, und ebenso der conische Complex aller Strahlen, die gegen eine Ebene gleich geneigt sind.

Bei der Reduction der Gleichung eines regulären quadratischen Complexes auf die canonische Form (22) hatten wir beliebige dualcollineare Transformationen benutzt. Lässt man nur *Bewegungen* zu, so lässt sich soviel nicht erreichen. *Man kann aber durch Drehungen und Schiebungen die Gleichung eines reellen regulären quadratischen Strahlencomplexes stets auf die Form*

$$(25) \qquad \mathfrak{D}_{11}\mathfrak{U}_1^2 + 2\mathfrak{D}_{23}\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3 + \mathfrak{U}_{11} = 0 \quad (\mathfrak{D}_{11} \neq 0)$$

bringen; und zwar ist dies, wenn $\mathfrak{D}_{23} \neq 0$, auf *zwei* Arten möglich, da eine Umwendung um die x_1-Axe die Form der Gleichung (25) nicht zerstört.

Betrachtet man den reellen Complex (25) als einen Plücker'schen Liniencomplex, so ergiebt sich als Singularitätenfläche (Ort von *Punkten* mit zerfallendem Complexkegel) die unendlich ferne Ebene $x_0 = 0$ und eine geradlinige Fläche 3. Ordnung

$$(26) \quad x_1(x_2^2 + x_3^2) - 4x_0(\mathfrak{D}_{11}x_1^2 + \mathfrak{D}_{23}x_2x_3) + 16\mathfrak{D}_{11}\mathfrak{D}_{23}^2x_0^3 = 0,$$

die Enveloppe der Ebenen der ∞^2 im Complex enthaltenen Parallelenbüschel. Diese Fläche, von der sich im zuvor untersuchten Falle $\mathfrak{D}_{23} = 0$ eine Ebene $x_1 = 0$ (die Scheitelebene des Paraboloids) ab-

trennt, vertritt hier die Stelle des soeben behandelten Paraboloids, auch in der Eigenschaft als Brennfläche der Singularitätencongruenz.

Es lässt sich hier offenbar noch eine längere Reihe weiterer Untersuchungen anknüpfen, auf die wir uns indessen nicht einlassen können.

Wir heben nur noch hervor, dass die Singularitätencongruenz eines reellen regulären quadratischen Strahlencomplexes, als Plücker'sche Linien congruenz betrachtet und im Plücker'schen Linien continuum ergänzt, unter *allen* Umständen von der *zweiten Ordnung* und *zweiten Classe* ist.

Die Singularitätencongruenzen der quadratischen Complexe sind sehr merkwürdige Gebilde. Wir werden später nachweisen, dass sie, zusammen mit den Kettengruenzen, unter allen möglichen Strahlencongruenzen eine *ausgezeichnete* Stellung einnehmen. Ebenso werden wir zeigen, dass mehrere der bei den planaren Complexen, den Kettencomplexen und regulären quadratischen Complexen gefundenen Eigenschaften für diese Figuren *charakteristisch* sind. Die zuletzt genannten haben für die radial-projective Geometrie eine ähnliche Bedeutung, wie etwa für die projective Geometrie die Flächen zweiten Grades.

§ 32.

Abbildung des ersten natürlichen Strahlencontinuums auf eine Punktmannigfaltigkeit.

Wir nehmen nun eine in § 27 abgebrochene Untersuchung wieder auf, indem wir zunächst die dort vorgeführte Abbildung des ersten natürlichen Strahlencontinuums auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit M_4 eines Gebietes neunter Stufe R_8 kurz betrachten. Diese Abbildung kommt, wie gesagt, dadurch zu Stande, dass man die Grössen:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{X}_1^2, & \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3, & \mathfrak{X}_{11}, \\ \mathfrak{X}_2^2, & \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1, & \mathfrak{X}_{22}, \\ \mathfrak{X}_3^2. & \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2, & \mathfrak{X}_{33} \end{array}$$

als homogene Punktcoordinaten deutet. Ohne Mühe erkennt man:

Die Ebene M_2 *im Raume* R_8, *deren Punkte die Bilder der Punktstrahlen im Strahlenraume sind, wird von lauter Doppelpunkten der Mannigfaltigkeit* M_4 *gebildet.*

Schneidet man den Tangentialkegel von M_4 in irgend einem Punkte von M_2 mit einem ebenen R_7, der nicht durch den Scheitel des Kegels geht, so entsteht eine *dreidimensionale quadratische Mannig-*

faltigkeit mit Knotenlinie. Das heisst, es entsteht der Ort aller Ebenen, die eine Gerade, die Schnittlinie von R_7 mit M_2, mit den Punkten eines irreducibelen Kegelschnittes verbinden, dessen Ebene die Gerade nicht trifft.

Ferner lässt die Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0$$

eine einfache Deutung zu, aus der sich folgende Erzeugungsart des Gebildes M_4 ergiebt:

Man nehme in einem projectiven Punktcontinuum R_8 eine Ebene M_2 und einen ebenen R_5 an, die beide keinen Punkt gemein haben. In R_5 nehme man ferner eine Normalfläche 4. Ordnung (S. 333) *beliebig an, und beziehe diese (d. h. deren ternäres Gebiet) correlativ auf die Ebene M_2. Dadurch werden jedem Punkt der Normalfläche alle Punkte einer Geraden auf M_2 zugeordnet, und jedem Punkt der Ebene M_2 alle Punkte eines Kegelschnittes auf der Normalfläche. Verbindet man zugeordnete Punkte durch gerade Linien, so entsteht eine Mannigfaltigkeit M_4, auf deren Punkte das erste reguläre Strahlencontinuum durchaus eindeutig-umkehrbar abgebildet werden kann.*

Diese Erzeugungsweise unserer M_4, die bei gegebener M_4 in ∞^8 Exemplaren vorhanden ist, hat eine gewisse *systematische* Bedeutung. Man kann nämlich ganz ebenso eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ erzeugen, wenn man eine Ebene correlativ auf eine rationale Normalfläche der Ordnung n^2 bezieht (auf eine jener Flächen eines Gebietes der Stufe $\binom{n+2}{2}$, die die Bilder der n-fach zählenden Punkte einer Ebene enthalten, wenn man die Coefficienten in den Gleichungen der Curven n. Classe als Punktcoordinaten deutet). Das so erzeugte Gebilde $\mathfrak{M}_4$ gestattet eine projective Gruppe mit $n^2 + 2n + 9$ Parametern, wenn $n > 1$. Im Falle $n = 1$ dagegen ergiebt sich eine quadratische $\mathfrak{M}_4$ des R_5, mit einer Gruppe von 15 Parametern, wobei die eine der erzeugenden Ebenen noch bei einer projectiven Gruppe mit $1 + 2 + 9 = 12$ Parametern in Ruhe bleibt. Man erkennt also:

Das erste reguläre Strahlencontinuum gehört als zweites Glied zu einer unendlichen Folge von vierfach ausgedehnten algebraischen Continuis, der auch das Plücker'sche Liniencontinuum, und zwar als erstes Glied angehört.

*Die Gruppe G_{17} aller radial-projectiven Transformationen gehört als zweites Glied zu einer unendlichen Folge von Gruppen birationaler Transformationen einer $\mathfrak{M}_4$, in der als erstes Glied die Gruppe der affinen Transformationen im Raume, mit der geraden Linie als Raumelement, auftritt**).

Danach können z. B. die quadratischen Strahlencomplexe in Analogie gesetzt werden zu den linearen Liniencomplexen oder Gewinden, die Ketten-

---

*) Der Satz enthält ein weiteres Interesse durch die vom Verfasser nachgewiesene Deutung der letztgenannten Gruppe. (Leipz. Ber. 1891, S. 338 u. ff.)

complexe zu den speciellen Liniencomplexen (Liniengebüschen), die conischen Complexe zu den uneigentlichen Gewinden.

Der diesen Betrachtungen zu Grunde liegende Gedanke ist sehr bedeutender Verallgemeinerungen fähig. Wir erwähnen noch eine ganz specielle Folgerung: Die Gleichungsform

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 + \cdots + x_{2n-1} x_{2n} = 0$$

einer quadratischen $\mathfrak{M}_{2n-2}$ von nicht verschwindender Discriminante lässt dieses Gebilde als Erzeugniss correlativ bezogener R_{2n-1} erkennen.

Wir zählen nun die Bilder der verschiedenen Arten von Ketten auf, und fügen verschiedene Bemerkungen hinzu, deren einige wir weiterhin noch vervollständigen werden.

Das Feld aller Punktstrahlen.	Die *singuläre Ebene* M_2.
∞^2 Parallelenbündel.	∞^2 Ebenen auf M_4, von M_2 verschieden.

Andere Ebenen als die genannten giebt es, wie leicht zu zeigen, auf M_4 nicht.

Die Bilder der Punktketten sind natürlich Gerade auf M_2, die Bilder der Parallelenbüschel Gerade auf den übrigen ∞^2 Ebenen von M_4.

Man bemerke, dass diese Ebenen, die M_2 in je einer Geraden treffen, eine Schaar von ∞^7 Kegelschnitten tragen, die Bilder von Cylindern 2. Grades sind. Darunter befinden sich, M_2 berührend, die Bilder der ∞^6 parabolischen Cylinder.

Die ∞^4 Normalennetze eigentlicher Strahlen.	∞^4 Kegel zweiten Grades, deren Scheitel auf M_2 liegen.

Auf diese Kegel vertheilen sich zu ∞^3 die Individuen einer zweiten Schaar von ∞^7 Kegelschnitten auf M_4, die Bilder der Strahlenketten sind. Zu dieser Schaar gehören als Grenzlagen die zuvor schon genannten ∞^6 Bilder parabolischer Cylinder, und ausserdem, ebenfalls als Grenzlagen, die ∞^5 Kegelschnitte auf M_2.

Die ∞^6 cylindrischen und die ∞^7 planaren Kettencongruenzen.	Geradlinige Flächen 3. O. der zuvor (S. 352, 337) beschriebenen Arten.
Die ∞^8 aplanaren Kettencongruenzen. (Vgl. S. 331—333.)	∞^8 (nicht-geradlinige) Normalflächen 4. O. (S. 333), deren *keine* einen Punkt von M_2 enthält.

Jede dieser Normalflächen gehört zu einer der soeben beschriebenen Erzeugungsarten des Gebildes M_4.

Die ∞^2 planaren Complexe.	∞^2 dreidimensionale Normalkegel 3. O. in ebenen R_5. (S. 349).

Irgend zwei dieser Kegel bilden zusammen den vollständigen Durchschnitt von M_4 mit einem speciellen ebenen R_7, der M_2 enthält. Lässt man beide Kegel zusammenfallen, so erhält man eine Schaar von ∞^2 R_7, deren jeder die M_4 in der ganzen Erstreckung eines der genannten Kegel berührt.

Die ∞^5 irreducibelen conischen Complexe. (S. 327).

Durchschnittsgebilde von M_4 mit ebenen R_7 allgemeiner Lage durch M_2.

Die conischen Complexe haben wir bisher noch nicht näher betrachtet. Wir bemerken nunmehr, dass man die zugehörigen Bildmannigfaltigkeiten so construiren kann: Man ordne die Punkte einer in einem ebenen R_4 gelegenen (sogenanten Normal-)Curve 4. Ordnung projectiv zu den Tangenten eines Kegelschnittes, dessen Ebene M_2 den R_4 nicht trifft. Die Verbindungsebenen von entsprechenden Punkten und Geraden erfüllen die Bildmannigfaltigkeit. Diese enthält als Ort ihrer Doppelpunkte die Ebene M_2. Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, ist sie von der *sechsten* Ordnung.

Die ∞^7 Kettencomplexe.

Durchschnittsgebilde von M_4 mit ebenen R_7, die M_4 in je einem Punkte allgemeiner Lage berühren.

Der Berührungspunkt ist natürlich *das Bild des singulären Strahls* des Kettencomplexes. Eine Kette, die den singulären Strahl enthält, hat mit dem Kettencomplex nur diesen einen Strahl gemein, oder sie liegt ganz in dem Complex. Ausserdem aber sind singuläre, und zwar ebenfalls *Doppelpunkte* des Bildes auch noch die Bilder der ∞^1 im Complex gelegenen Punktstrahlen. Die Bildmannigfaltigkeit kann so erzeugt werden: Man nehme eine Normalfläche 4. O. in einem R_5 und eine Gerade an, die den R_5 nicht trifft. Den Punkten der Geraden ordne man projectiv die ∞^1 Kegelschnitte zu, die einen beliebig angenommenen Punkt der Normalfläche enthalten. Verbindet man sodann jeden der ∞^1 Kegelschnitte mit dem zugeordneten Punkt durch einen Kegel 2. Grades, so entsteht das verlangte Bild. Dieses ist (ebenfalls) eine Punktmannigfaltigkeit von der *sechsten* Ordnung. In der That, die ebenen Schnitte unseres Bildes mit R_7, oder also die Durchschnittscongruenzen des Kettencomplexes mit irgend welchen quadratischen Complexen, werden bei der auf S. 356 u. s. w. geschilderten Abbildung wiedergegeben durch irgend welche Flächen 2. Grades, die die Gerade $\mathfrak{P}$ im Punkte p berühren. Drei solche Flächen aber haben noch sechs bewegliche Schnittpunkte.

Als Bild eines regulären quadratischen Complexes ergiebt sich nunmehr eine dreifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit eines ebenen R_7, die ebenfalls eine auf M_2 gelegene Gerade als Ort von Doppelpunkten hat, einen isolirten Doppelpunkt aber *nicht* besitzt. Auch diese Mannigfaltigkeit ist von der sechsten Ordnung, wie man sieht, wenn man sie mit einem Kettencomplex zum Schnitt bringt. So ergiebt sich der erste der folgenden beiden wichtigen Sätze:

Die Mannigfaltigkeit M_4, *das Bild des ersten regulären Strahlencontinuums in* R_8, *ist von der sechsten Ordnung.*

Sie ist ferner von der dritten Classe, d. h. die Bestimmung der ebenen R_7 *eines Büschels, die* M_4 *berühren, hängt von einer Gleichung 3. Grades ab.*

Der zweite Satz ist nach S. 359 (Nr. 15) evident. Die Erörterung der genannten ohne Weiteres hinzuschreibenden Gleichung 3. Grades aber führt zu sehr merkwürdigen Folgerungen, die uns nunmehr beschäftigen sollen.

Vollständige und partielle Durchschnitte quadratischer Strahlencomplexe.

Die im Mittelpunkte unserer Untersuchung stehenden als ein- und mehrdimensionale *Ketten* bezeichneten Gebilde haben sich sämmtlich als Durchschnitte quadratischer Strahlencomplexe, ihre Bilder im R_8 mithin als Durchschnitte linearer Punktmannigfaltigkeiten mit der Mannigfaltigkeit M_4 erwiesen, die selbst partieller Durchschnitt quadratischer Mannigfaltigkeiten ist. Wir werden nun zu neuen Gesichtspunkten kommen, wenn wir die umgekehrte Frage, nämlich die nach allen möglichen Durchschnittsgebilden dieser Art stellen. Diese Frage ist, wie man unschwer erkennt, enthalten in der auf S. 351 berührten Frage nach allen möglichen in Bezug auf quadratische Complexe abhängigen Figuren von Strahlen. Wir werden aber die etwas umfangreiche Aufgabe nur zum Theil behandeln: Nur die radial-projectiv verschiedenen Classen zwei- und dreidimensionaler irreducibeler Durchschnitte werden wir erschöpfend aufzählen; im Uebrigen werden wir uns auf einzelne Angaben beschränken. Wir werden indessen das bezeichnete Problem so weit fördern, dass einer vollständigen Behandlung wesentliche Schwierigkeiten nicht mehr entgegenstehen. —

Enthält ein Büschel quadratischer Complexe (mindestens) einen Kettencomplex, so kann dieser nach der zuvor geschilderten Methode auf einen ebenen Punktraum R_3 abgebildet werden. Die *Basis* des

Büschels, nämlich die Strahlencongruenz, in der sich die Complexe des Büschels durchdringen, geht dann, wie bereits bemerkt, über in eine Fläche zweiter Ordnung, die die Gerade $\mathfrak{P}$ (S. 356) im Punkte p berührt. Der allgemeine Fall wird der sein, in dem die genannte Fläche weder ein Kegel ist, noch die Gerade $\mathfrak{P}$ enthält. Durch die Strahlencongruenz, deren Bild diese Fläche ist, gehen dann drei verschiedene Kettencomplexe, denen drei verschiedene Abbildungen der Congruenz auf eine Fläche 2. Grades zugeordnet sind. Wir betrachten diesen besonders merkwürdigen Fall etwas eingehender als die übrigen.

A_1. *Strahlencongruenz, Basis eines Büschels quadratischer Complexe, das drei verschiedene Kettencomplexe enthält.*

Eine solche Congruenz hängt von 14 Constanten ab; sie ist, wie jede ihrer weiterhin zu betrachtenden Ausartungen $A_2, \ldots A_6$, durch *sieben* unabhängige unter ihren Strahlen *eindeutig* bestimmt. Sie gestattet eine dreigliedrige Gruppe von radialen Collineationen, die aus sechs verschiedenen Schaaren von Transformationen besteht, und isomorph ist zur Gruppe der sechs Vertauschungen von drei Dingen. Von den dual-projectiven Transformationen einer invarianten zweigliedrigen Untergruppe werden die eigentlichen Strahlen der Congruenz noch transitiv unter einander vertauscht (abgesehen von sogleich zu nennenden Strahlen specieller Lage). Die Congruenz enthält *einen* Punktstrahl, und dieser gehört *drei* verschiedenen in der Congruenz liegenden Parallelenbüscheln an. Bei der Abbildung irgend eines der drei Kettencomplexe auf einen ebenen R_3 werden zwei der Parallelenbüschel als Gerade durch p wiedergegeben, während das dritte in den Punkt p zusammengezogen wird. Die eigentlichen Congruenzstrahlen können ferner auf *drei* Weisen zu ∞^1 Ketten zusammengefasst werden. Zu jeder dieser Schaaren von Ketten gehört als Grenzfall ein Paar von Parallelenbüscheln. Bei irgend einer der genannten Abbildungen der Congruenz auf eine Fläche zweiten Grades erscheinen zwei der Schaaren von ∞^1 Ketten als Erzeugende der Fläche, die dritte als eine Schaar von Kegelschnitten, die von den Ebenen durch $\mathfrak{P}$ ausgeschnitten wird. (S. 357.)

Reciprok zu den drei Kettencomplexen durch die Congruenz sind drei Ketten, die Oerter der Hauptaxen für jede der drei Schaaren von ∞^1 Ketten in der Congruenz. Jede dieser drei Ketten enthält einen ausgezeichneten Strahl und diese drei Strahlen gehören demselben Parallelenbündel, aber nicht demselben Parallelenbüschel an. Die drei Parallelenbüschel, die zu je zweien unter diesen Strahlen orthogonal sind, sind die drei Büschel in der Congruenz. Die Hauptaxen der drei

Ketten gehören der Congruenz nicht an, liegen aber in dem durch den Punktstrahl der Congruenz bestimmten planaren Complex. Die Hauptaxe irgend einer der drei Ketten kann nicht senkrecht stehen auf einem Strahl der anderen.

Die letzten Bemerkungen lassen sich umkehren: Nimmt man noch die sogleich unter A_2 anzustellende Betrachtung hinzu, so ergiebt sich der folgende, besonders auch wegen der Einfachheit seiner Voraussetzungen merkwürdige Satz:

Wenn zwei Strahlenketten so liegen, dass kein Strahl der einen senkrecht steht auf der Hauptaxe der anderen, so bestimmen sie eindeutig eine dritte Kette, die von den gegebenen verschieden ist.

Der Ort der gemeinsamen Normalen zwischen Strahlen von je zweien der drei Ketten ist eine und dieselbe Strahlencongruenz, die demnach auf drei Arten mit Hülfe zweier Ketten erzeugt werden kann. Diese Congruenz ist die Basis eines Büschels quadratischer Complexe, das drei getrennte Kettencomplexe enthält.

Bild einer solchen Congruenz ist eine in einem ebenen R_6 gelegene Fläche 6. Ordnung, mit drei Schaaren von Kegelschnitten, und drei geraden Linien, die sich in einem auf M_2 gelegenen conischen Knotenpunkt der Fläche treffen.

A_2. *Zwei der Kettencomplexe fallen zusammen.*

Die cubische Gleichung, von der die Bestimmung der Kettencomplexe im Büschel quadratischer Complexe abhängt, hat nunmehr eine einfache Wurzel und eine Doppelwurzel. Bei der Abbildung des einfach zählenden Kettencomplexes auf einen ebenen R_3 entsteht als Bild der noch von 13 Constanten abhängigen Congruenz ein Kegel 2. Grades, der $\mathfrak{P}$ in p berührt, und dessen Doppelpunkt von p verschieden ist. Bei der Abbildung des doppelt zählenden Kettencomplexes dagegen geht aus der Congruenz eine Fläche 2. O. ohne Knotenpunkt hervor, die die Gerade $\mathfrak{P}$ enthält. Es giebt nur noch zwei getrennte Schaaren von Ketten in der Congruenz. Die ∞^1 Ketten der doppelt zählenden Schaar haben als Hauptaxen die Strahlen der Kette, die zu dem doppelt zählenden Kettencomplex gehört, und enthalten sämmtlich dessen singulären Strahl (S. 321). Gegenüber dem Fall A_1 tritt also die Besonderheit ein, dass eine der drei zusammengehörigen Ketten doppelt zählt: Die Hauptaxe *dieser* Kette steht senkrecht auf einem Strahl der anderen. Darin liegt schon, dass die Hauptaxen der beiden erzeugenden Ketten nicht parallel sind, und dass diese Ketten keinen gemeinsamen Strahl haben.

A_3. *Durchschnitt eines Kettencomplexes und eines irreducibelen conischen Complexes in allgemeiner gegenseitiger Lage.* (Vgl. A_6.)

Diese Congruenz hängt noch von 12 Constanten ab.

Die cubische Gleichung verhält sich wie zuvor unter A_2. Die Congruenz enthält aber keine Kette mehr, sondern nur noch ∞^1 Parallelenbüschel. Bei der Abbildung des Kettencomplexes auf einen Punktraum R_3 erscheinen die genannten Büschel als Erzeugende eines Kegels 2. Ordnung, der seinen Scheitel in p hat, $\mathfrak{P}$ aber nicht enthält.

A_4. *Basis eines Büschels quadratischer Complexe mit einem dreifach zählenden Kettencomplex.*

Die Constantenzahl dieser Congruenz ist ebenfalls 12. Die Congruenz enthält eine einzige Schaar von ∞^1 Ketten, die alle die Hauptaxe des Kettencomplexes enthalten. Bei Abbildung des Kettencomplexes auf einen Punktraum R_3 entsteht ein Kegel 2. Ordnung, der seinen Scheitel auf $\mathfrak{P}$, aber nicht in p hat, und der $\mathfrak{P}$ als Erzeugende enthält.

A_5. *Basis eines Büschels quadratischer Complexe ohne Kettencomplex, aber mit einem irreducibelen conischen Complex.*

Die cubische Gleichung hat wie unter A_4 eine dreifache Wurzel, aber dieser entspricht ein conischer Complex. Diese Congruenz hängt von 11 Constanten ab. Ketten enthält sie natürlich nicht, aber ∞^1 Parallelenbüschel.

A_6 *und* B. *Basis eines Büschels von Kettencomplexen mit gemeinsamem Parallelenbündel, worunter, als Grenzfall, ein irreducibeler conischer Complex.*

Diese von 10 Constanten abhängige Congruenz ist Durchschnitt eines Kettencomplexes mit einem irreducibelen conischen Complex, *der das Parallelenbündel des Kettencomplexes enthält.* Die Congruenz ist also reducibel. Nach Abtrennung des Parallelenbündels bleibt ein irreducibeler Bestandtheil B, als dessen Bild in R_3 eine Fläche 5. O. erscheint. Diese liegt, wie die zuvor aufgetretenen Flächen 6. O., in einem ebenen R_6, und nicht in einem ebenen Raume niederer Dimension: Die Gesammtbasis A_6 ist durch B allein völlig bestimmt. Jeder durch B gehende quadratische Complex ist entweder ein Kettencomplex, oder er ist der ausgezeichnete conische Complex: Die Coefficienten der cubischen Gleichung sind alle Null. Bei Abbildung eines der ∞^1 Kettencomplexe auf einen ebenen R_3 erscheint die Congruenz als Kegel 2. O., der durch $\mathfrak{P}$ geht, und seinen Scheitel in p hat. *Die*

Congruenz B kann sehr leicht construirt werden mit Hülfe zweier Ketten: Man nehme zwei Ketten mit parallelen, aber nicht identischen Hauptaxen so an, dass sie keinen Strahl gemein haben. Man verbinde sodann parallele Strahlen beider Ketten durch Parallelenbüschel: Der Ort der zu diesen reciproken Parallelenbüschel ist die Congruenz *B*.

Weiter betrachten wir Büschel quadratischer Strahlencomplexe nicht systematisch: Wir zählen vielmehr nur die Congruenzen auf, die irreducibele Bestandtheile der Basis eines solchen Büschels bilden können. — Auf die zunächst folgenden Fälle wird man geführt, wenn man annimmt, dass in einem Büschel mit zerfallender Basis ein Kettencomplex vorkommt. Nach Erledigung des Falles A_6 muss bei Abbildung des Kettencomplexes auf einen Punktraum R_3 ein Ebenenpaar als Bild der Basis entstehen.

C. *Die aplanare Kettencongruenz, betrachtet als Basis eines Bündels von Kettencomplexen* (∞^8).

Jeder quadratische Complex, der eine aplanare Kettencongruenz enthält, ist ein Kettencomplex, dessen singulärer Strahl der Kettencongruenz angehört. Durch die Kettencongruenz und den in ihr beliebig angenommenen singulären Strahl ist der Kettencomplex völlig bestimmt: Die zu ihm reciproke Kette ist *die* Kette der reciproken Kettencongruenz, deren Hauptaxe der singuläre Strahl ist. Das Bündel der Kettencomplexe durch eine vorgelegte aplanare Kettencongruenz ist projectiv bezogen auf diese Congruenz. Durch irgend ein Normalennetz, das mit der aplanaren Kettencongruenz eine Kette gemein hat, wird die Congruenz zu einem vollständigen Durchschnitt ergänzt.

Ebenfalls Basis eines *Bündels* quadratischer, nämlich reducibeler conischer Complexe, ist

Γ. Der planare Strahlencomplex (∞^2). —

D_1. *Die planare Kettencongruenz,* (∞^7) und

D_2. *Die cylindrische Kettencongruenz,* (∞^6)

sind jede Basis eines Gebüsches, eines linearen Systems vierter Stufe quadratischer Complexe. Ein quadratischer Complex, der eine planare Kettencongruenz enthält, ist entweder regulär, oder ein Kettencomplex, oder ein reducibeler conischer Complex. Ein quadratischer Complex durch eine cylindrische Kettencongruenz ist entweder regulär, oder ein reducibeler conischer Complex. Irgend zwei planare oder cylindrische Kettencongruenzen, die in demselben irreducibelen quadratischen Complex liegen, bilden zusammen einen vollständigen Durchschnitt, also die Basis eines speciellen Büschels quadratischer Complexe.

E. Das Normalennetz eines eigentlichen Strahls (∞^4) ist Basis eines linearen Systems *fünfter* Stufe quadratischer Complexe. Jeder quadratische Complex, der ein Normalennetz enthält, ist entweder ein Kettencomplex, oder ein reducibeler conischer Complex.

F. Das Parallelenbündel (∞^2) ist Basis eines linearen Systems *sechster* Stufe quadratischer Complexe. Jeder quadratische Complex durch ein Parallelenbündel ist entweder Kettencomplex, oder er ist conisch.

G. Das Feld aller Punktstrahlen (∞^0) *ist Basis des linearen Systems sechster Stufe aller conischen Complexe.*

Zerfallen der betrachteten Congruenzen.

Aus den aufgezählten partiellen Durchschnitten quadratischer Complexe lassen sich auf mannigfaltige Art Congruenzen zusammensetzen, die *vollständige Durchschnitte* sind. Diese reducibelen Schnittfiguren sind bereits zu zahlreich, als dass wir sie hier eingehend betrachten könnten. Aber wir wollen wenigstens die einzelnen Möglichkeiten kurz aufzählen. Um sie zu finden, hat man offenbar die Zahl sechs auf alle möglichen Arten als Summe kleinerer Zahlen darzustellen, und dann jede Zerlegung darauf hin zu untersuchen, ob ihr ein zerfallender Durchschnitt entspricht. So ist die folgende Tabelle zu Stande gekommen, in der z. B.

$$C \succ (3F + G)$$

zu lesen ist: „Die aplanare Kettencongruenz hat eine reducibele Congruenz zur Grenzlage, die aus drei Parallelenbündeln und dem Feld aller Punktstrahlen besteht."

(2)

$$E \succ (F + G),$$
$$D \succ (E + F,\ 2F + G),$$
$$C \succ (D + F,\ E + 2F,\ 3F + G),$$
$$B \succ (D + E,\ D + F + G,\ 2E + F,\ E + 2F + G,\ 3F + 2G),$$
$$A \succ (B + F,\ C + E,\ 2D,\ C + F + G,\ D + E + F,$$
$$D + 2F + G,\ 2E + 2F,\ E + 3F + G,\ 4F + 2G).$$

Wir fügen hierzu eine entsprechende Bemerkung über die Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Complexes, die hier mit S bezeichnet werden mag. Diese Congruenz ist nicht partieller

Schnitt quadratischer Complexe; sie hat aber mehrere Ausartungen, die aus solchen Schnitten bestehen, nämlich (wie man leicht erkennt):

$$(3) \qquad S \succ (D+G,\ 2E,\ E+F+G,\ 2F+2G).$$

Zahl der gemeinsamen Strahlen von mehreren Congruenzen $A \ldots G$.

Auch die Gleichungen, von denen die gemeinsamen Strahlen zweier der betrachteten Congruenzen abhängen, können wir nicht eingehend erörtern. Wir wollen aber wenigstens die Grade dieser Gleichungen angeben. Sie sind in den folgenden Formeln (4), (5) zusammengestellt. Dabei sind die Anzahlen solcher gemeinsamer Strahlen, die unter allen Umständen Punktstrahlen sind, mit einem Nenner $\frac{1}{2}$ versehen. Die symbolische Gleichung $D \cdot D = 1 + \frac{1}{2}$ z. B. ist zu lesen: „Wenn zwei planare Kettengruenzen nicht unendlich viele Strahlen gemein haben, so haben sie zwei Strahlen gemein. Die Gleichung, von deren Lösung die Bestimmung dieser Strahlen abhängt, ist reducibel: Einer der beiden gemeinsamen Strahlen ist immer ein Punktstrahl.“

Eine Ueberlagerung mehrerer gemeinsamer Strahlen ist natürlich nicht ausgeschlossen. Auch kann es unter Umständen eintreten, dass Strahlen, die dem Feld der Punktstrahlen G in der Regel nicht angehören, im Grenzfall in dieses hineinrücken. Solche Strahlen sind in der Tafel (4) *nicht* unter denen zu suchen, deren Anzahlen der Nenner $\frac{1}{2}$ beigefügt ist, sondern unter den übrigen. Das Symbol ∞ bedeutet: „Es sind unter allen Umständen unendlich viele gemeinsame Strahlen vorhanden.“

(4)

	A	B	C	D	E	F	G
A	6	5	4	3	2	1	$\frac{2}{2}$
B	5	$4+\frac{1}{2}$	3	$2+\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	∞
C	4	3	3	2	1	1	0
D	3	$2+\frac{1}{2}$	2	$1+\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	∞
E	2	2	1	1	1	0	$\frac{2}{2}$
F	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	∞
G	$\frac{2}{2}$	∞	0	∞	$\frac{2}{2}$	∞	∞

Wir fügen sogleich hinzu die auf die Singularitätencongruenz S eines regulären quadratischen Complexes bezüglichen Anzahlen:

$$SA = SB = SS = 4,$$
$$SC = SD = SE = 2, \tag{5}$$
$$SF = 0,\ SG = \tfrac{1}{2}.$$

Die Zahlen $A.G$ und $E.G$ sind gleich $\frac{3}{2}$ gesetzt, weil die Punktstrahlen der Congruenzen A_1 und E bei der Abbildung dieser Congruenzen in R_8 als Knotenpunkte der Bildflächen erscheinen.

Die Formeln (4) und (5) lassen eine einfache Structur erkennen, die auf die Existenz eines umfassenderen Gesetzes hinweist. Sieht man nämlich von den G enthaltenden symbolischen Gleichungen ab, und bezeichnet man den eingetragenen *Zahlenwerth* irgend eines der übrigen symbolischen Producte XY als *Gesammtmultiplicität* der gemeinsamen Strahlen von X und Y, so gilt der Satz, *dass bei den zuvor unter* (2), (3) *genannten Arten des Zerfallens von* X *oder* Y *entweder diese Gesammtmultiplicität erhalten bleibt, oder die Zahl der gemeinsamen Strahlen unendlich wird**). Es werden nämlich alle aufgeführten symbolischen Gleichungen, mit Ausnahme der auf G bezüglichen, Folgen der beiden symbolischen Gleichungen

$$E^2 = 1,\quad EF = 0,\quad F^2 = \tfrac{1}{2},$$

wenn man, nach der von Herrn H. Schubert eingeführten Bezeichnungsweise, setzt

$$A = 2E + 2F,\quad B = 2E + F,\quad C = E + 2F,\quad S = 2E,\quad D = E + F.$$

---

*) In dem von Herrn Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879) behaupteten „Princip von der Erhaltung der Anzahl" kommen gebrochene Multiplicitäten nicht vor. — Dass dieses „Princip" — sofern es mangels klarer Definitionen überhaupt verständlich erscheint — zu allgemein gefasst und also unhaltbar ist, lässt sich übrigens schon durch sehr einfache Beispiele nachweisen. Bereits die Geometrie der Curven auf einem irreducibelen Kegel 2. Ordnung bietet Verhältnisse dar, die den im Texte beschriebenen ähnlich sind. Die Zahl der Projectivitäten, die vier Punkte auf einer Geraden unter einander vertauschen, genügt dem Satze des Herrn Schubert nicht, u. A. m.

Wir können den Gegenstand hier nicht erörtern, und bemerken nur, dass wir die Mehrzahl der aus dem genannten Princip gezogenen Folgerungen als ungenügend begründet, und gewisse Classen solcher Folgerungen auch wohl als materiell zweifelhaft betrachten müssen. Keinenfalls verdient dieser Satz das unbedingte Vertrauen, das einige Geometer auf ihn gesetzt haben. Seine — bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft gewiss nicht zu unterschätzende — Bedeutung scheint uns darin zu liegen, dass er eine schnelle Orientirung wenn auch hypothetischer Natur in zahlreichen Fällen ermöglicht, die Schwierigkeiten bieten, und dadurch dem Geometer die Production erleichtert. — Auch bei exacter Formulirung und Begründung, wie sie für grosse Classen von Problemen sicher möglich ist, wird man die Bestimmung bloser Gradzahlen von Gleichungen übrigens wohl immer nur als einen Nothbehelf betrachten können.

Ueber die Vertheilung der Gesammtmultiplicität auf ganze und gebrochene Zahlen giebt dieses Verfahren keine Auskunft. Die soeben angeführten Gleichungen vermögen *nicht*, die Tafeln (4) und (5) zu ersetzen. Auch geben diese Tafeln selbst, wie bereits angedeutet, keine Auskunft über das Auftreten von Punktstrahlen oder unendlich vielen gemeinsamen Strahlen in Grenzfällen (z. B. $A = A_3$, $A = A_5$).

Bedeutung der für ein invariantes lineares System von Strahlencomplexen charakteristischen Zahlen μ, ν (S. 277).

Im Anschluss an die letzten Betrachtungen schalten wir einige im Grunde nicht hierher gehörige Sätze ein, die die auf Seite 278 offen gelassene Frage nach der geometrischen Bedeutung der Zahlen μ, ν beantworten.

$\mu + \nu$ ist die Zahl der gemeinsamen Strahlen zwischen einem algebraischen Strahlencomplex $\mathfrak{C}$ und einer frei beweglichen Strahlenkette.

ν ist die Zahl der eigentlichen Strahlen, die der Complex $\mathfrak{C}$ in einem frei beweglichen Parallelenbüschel hat.

Die unter Umständen gebrochene, aber niemals negative Zahl $\frac{\mu - \nu}{2}$ kann erklärt werden als „*Multiplicität*“ der Punktmannigfaltigkeit $\mathsf{M}_2 = G$ in dem Complex. Im planaren Complex hat M_2 danach die Multiplicität $\frac{1}{2}$, in jedem conischen die Multiplicität 1, in jedem anderen quadratischen Complex die Multiplicität 0.

Figur von sechs abhängigen Strahlen.

In ähnlicher Weise wie die Congruenzen, in denen sich zwei oder mehrere quadratische Complexe durchdringen, lassen sich auch Strahlenbänder der Art untersuchen, und überhaupt Figuren, die die Basis einer linearen Mannigfaltigkeit quadratischer Complexe bilden. Unter diesen weiteren Figuren, deren einige wir bei Gelegenheit der Untersuchung des planaren Complexes betrachtet haben, hebt sich eine dadurch hervor, dass sie aus discreten, nämlich aus sechs einzelnen Strahlen besteht. Die Existenz dieser Figur abhängiger Strahlen, die die Basis eines linearen Systems *vierter* Stufe bildet, haben wir bereits in der Aussage festgestellt, dass die Mannigfaltigkeit M_4 die Ordnung sechs hat. Wir geben nun diesem Satz eine inhaltsreichere Fassung, indem wir die Fälle ausschliessen, in denen der durch fünf Strahlen bestimmte sechste unbestimmt wird:

Wenn von fünf eigentlichen Strahlen keine zwei parallel sind, und keine vier demselben planaren Complex angehören, wenn ferner die fünf Strahlen in keiner aplanaren Kettencongruenz liegen, so bestimmen sie eindeutig einen sechsten eigentlichen Strahl, der mit ihnen invariant verbunden ist.

Jeder der ∞^3 quadratischen Complexe durch irgend fünf der sechs Strahlen enthält auch den letzten.

Dass die angegebenen Voraussetzungen für die Bestimmtheit des sechsten Strahles nothwendig sind, ist nach dem über die aplanaren Kettencongruenzen und über die Geometrie im planaren Complex Gesagten leicht zu erkennen. Dass sie auch hinreichend sind, lässt sich so nachweisen:

Wenn keine vier unter den fünf Strahlen in einem planaren Complex liegen, so lassen sich immer solche vier unter ihnen finden, von denen auch keine drei in einem planaren Complex liegen. Diese vier Strahlen können dann durch eine aplanare Kettencongruenz verbunden werden (S. 331). Durch diese Congruenz kann man ferner noch ein Büschel von Kettencomplexen legen, die den fünften Strahl enthalten. Höchstens bei einem dieser Complexe ist der fünfte Strahl zum singulären Strahl parallel (S. 375): Man kann daher aus dem Büschel einen Complex auswählen, für den diese Besonderheit nicht eintritt. Bilden wir nun diesen Complex auf einen ebenen R_3 ab (S. 356), so ergiebt sich eine Figur von sieben Punkten, die einen Theil der Basis eines Bündels von Flächen 2. O. bilden: Zwei der sieben Punkte liegen auf $\mathfrak{P}$ consecutiv in p, vier — die Bilder jener vier Strahlen — ausserhalb $\mathfrak{P}$ in einer Ebene, die p nicht enthält, der letzte ausserhalb dieser Ebene sowohl als auch der Geraden $\mathfrak{P}$. Durch solche sieben Punkte kann nun augenscheinlich weder eine irreducibele noch auch eine zerfallende Raumcurve 3. O. gelegt werden: Also schneiden sich die Flächen des Bündels in einem bestimmten achten Punkt, der nicht auf $\mathfrak{P}$ liegt. Hieraus aber ergiebt sich unmittelbar der behauptete Satz.

Bei besonderen Schnittfiguren von M_4 mit ebenen R_4 können selbstverständlich einzelne der Schnittpunkte sich mit einander vereinigen. Es ist auch bei obigem Satze nicht ausgeschlossen, dass der sechste Strahl mit einem der fünf zusammenfällt. In der Figur von sechs Strahlen ist dann einer zweifach zu rechnen. — Die Schwierigkeit der Reihe von Fragen, die sich hier anschliessen, übertrifft wohl ihr wissenschaftliches Interesse. Wir sehen von einer näheren Untersuchung des Gegenstandes ab.

Umkehrung einiger der aufgestellten Sätze.

Wir hatten oben zwei analytisch-getrennte Schaaren von je ∞^7 Kegelschnitten auf M_4 gefunden. Wir behaupten nun, dass es andere Kegelschnitte auf M_4 nicht giebt, als die in einer von beiden Classen (oder im Grenzfall in beiden) enthaltenen. Zu dem Ende haben wir zu zeigen:

Jeder auf M_4 *gelegene irreducibele Kegelschnitt, der nicht einer ganz in* M_4 *enthaltenen Ebene angehört, ist Bild einer Kette.*

Die Coordinaten $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{ii}$ der Punkte des fraglichen Kegelschnittes werden als quadratische Formen zweier Parameter $t_1 : t_2$ darstellbar sein. Aus den zwischen den Producten $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$ stattfindenden quadratischen Relationen aber folgt, da nach Voraussetzung die Verhältnisse $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ von $t_1 : t_2$ nicht unabhängig sind, dass $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ selbst linear von $t_1 : t_2$ abhängen*). Hiernach werden dann leicht die Grössen $\mathfrak{X}_{ii}$ als quadratische Formen von $t_1 : t_2$ bestimmt, die mit den drei linearen Formen $\mathfrak{X}_i$ durch die Identität (1) verbunden sind. Dass die so dargestellten Kegelschnitte sämmtlich Bilder von Ketten sind, kann man dann z. B. dadurch nachweisen, dass man durch eine duale Collineation die lineare Identität zwischen den drei Formen $\mathfrak{X}_i$ in die Gestalt $\mathfrak{X}_1 = 0$ überführt.

Nahezu evident ist der Satz:

Eine analytische Strahlencongruenz kann höchstens ∞^3 *Ketten enthalten. Sie ist in diesem Falle das Normalennetz eines eigentlichen Strahls.*

In der That, gehen durch zwei Strahlen ∞^1 Ketten, so liegen diese in demselben Normalennetz, und die Strahlen dieser Ketten erfüllen das Normalennetz, abgesehen von zwei Parallelenbüscheln, deren Strahlen sich nachträglich durch analytische Fortsetzung ergeben. Nunmehr beweisen wir:

Wenn eine analytische Strahlencongruenz nicht ∞^3 *Ketten, aber eine analytische Schaar von* ∞^2 *Ketten enthält, so ist sie entweder die Singularitätencongruenz eines quadratischen Complexes, oder eine aplanare oder endlich eine planare Kettencongruenz.*

Es wird hiermit behauptet, dass es *zwei* und nicht mehr analytisch-

*) Deutet man die Producte $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$ als homogene Punktcoordinaten in einem R_5, so erhält man eine auf das ternäre Gebiet $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ bezogene Normalfläche 4. O., auf der der Kegelschnitt $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k(t)$ liegt. Bild dieses Kegelschnitts in der Ebene ist eine Gerade, die auf ihn projectiv bezogen ist; $t_1 : t_2$ können als homogene Coordinaten auf dieser Geraden angesehen werden.

getrennte Familien von Congruenzen der verlangten Eigenschaft giebt, die ∞^8 Singularitätencongruenzen und die ∞^8 aplanaren Kettencongruenzen; denn die ∞^7 planaren Kettencongruenzen können in gewisser Weise als Durchschnitt jener beiden Familien betrachtet werden: Eine planare Kettencongruenz kann, durch das begleitende Parallelenbündel ergänzt, als Grenzfall einer aplanaren Kettencongruenz gelten, andrerseits aber, nach Ergänzung durch das Feld aller Punktstrahlen, auch als Grenzfall einer Singularitätencongruenz. (Vgl. S. 377.)

Der Ort der Hauptaxen der vorausgesetzten ∞^2 Ketten kann weder ein einzelner Strahl noch auch ein Strahlenband sein. Denn im letzten Falle würde das Normalennetz eines Strahls des Bandes ∞^1 Ketten, also bereits ein Continuum von ∞^2 Strahlen der Congruenz enthalten. Der genannte Ort ist also eine zweite Congruenz. Wir können nun der Reihe nach drei Hypothesen machen, 1) dass die Strahlen dieser zweiten Congruenz ∞^2 verschiedene Richtungen haben, 2) dass sie auf ∞^1 Cylinderflächen vertheilt werden können, 3) dass sie ein Parallelenbündel oder einen continuirlichen zweifach ausgedehnten Theil eines solchen bilden. Von diesen Annahmen reducirt sich die zweite sofort auf die dritte, da offenbar auch im Falle 2) schon die sämmtlichen Strahlen der gegebenen Congruenz einem planaren Complex angehören müssen.

Machen wir die Annahme 1), so folgt, dass auch die Strahlen der vorgelegten Congruenz selbst ∞^2 verschiedene Richtungen haben, dass sie nicht auf ∞^1 Cylinderflächen vertheilt werden können. Denn die entgegengesetzte Hypothese führt sofort zu der Annahme 3). Man kann also, bei der analytischen Darstellung der einen Congruenz die Grössen $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$, bei der Darstellung der anderen die Grössen $\mathfrak{U}_1 : \mathfrak{U}_2 : \mathfrak{U}_3$ als unabhängige Veränderliche benutzen. Die ∞^2 Ketten in der ersten Congruenz werden dann dargestellt durch lineare Gleichungen der Form

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{U}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{U}_3\mathfrak{X}_3 = 0;$$

die Congruenz ist auf das ternäre Gebiet $\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2 : \mathfrak{X}_3$ jedenfalls in der Umgebung eines Strahles allgemeiner Lage eindeutig so abgebildet, dass den ∞^2 Ketten gerade Linien projectiv entsprechen. Sie ist folglich rational, und, da die Bilder der genannten Geraden in R_8 Kegelschnitte sind (s. oben S. 381), so sind die Punktcoordinaten $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ als ternäre quadratische Formen der homogenen Grössen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ darstellbar. Bild der Congruenz in R_8 ist folglich entweder eine rationale nicht geradlinige Fläche 4. Ordnung eines ebenen R_5 — nothwendig eine der bereits mehrfach besprochenen Normalflächen 4. O. —

oder eine Projection einer solchen Fläche. Zugleich ist dieses Bild Basis oder Theil der Basis eines linearen Systems ebener R_7, von mindestens dritter Stufe. Alle irreducibelen Flächen auf M_4 aber, die die Basis eines solchen Systems bilden, oder ihr angehören, haben wir bereits bestimmt: Da die fragliche Congruenz nicht in einem planaren Complex liegt, so bleibt nur die eine Möglichkeit, dass sie eine aplanare Kettencongruenz ist.

Machen wir nunmehr die Annahme 3), setzen wir also voraus, dass die zu suchende Congruenz in einem planaren Complex liegt, sagen wir des ersten Blattes, so liegen die Hauptaxen der ∞^2 Ketten im zugehörigen Parallelenbündel des zweiten Blattes. Da dieses Bündel Träger eines ternären Gebietes ist, so können auch jetzt wieder — innerhalb eines gewissen Bereichs — die ∞^2 Congruenzstrahlen und Ketten den Geraden und Punkten einer Ebene eindeutig zugeordnet werden: Es ergiebt sich, wie zuvor, dass als Bild der Congruenz im R_8 eine Normalfläche 4. Ordnung oder eine Projection einer solchen Fläche erscheinen muss. Nun liegt aber dieses Bild, nach unserer nunmehrigen Voraussetzung, auf einem der auf S. 349 u. s. w. erörterten Normalkegel 3. Ordnung. Ist die fragliche Fläche in einem ebenen R_4 enthalten, so ist sie ein ebener Schnitt des Kegels, oder Theil eines solchen, und dann ist sie — da Normalennetze nicht in Betracht kommen — nothwendig eine Normalregelfläche 3. Ordnung (S. 337, 352); die Congruenz ist dann eine planare Kettencongruenz. Liegt aber die betrachtete Fläche nicht in einem ebenen R_4, so ist sie von der 4. Ordnung. Sie muss dann durch den Scheitel des Kegels gehen, da dieser selbst nur von der dritten Ordnung ist. Die Congruenzstrahlen können also auf ∞^1 parabolische Cylinder vertheilt werden, die alle denselben Punktstrahl enthalten.

Nehmen wir nun an, $\mathfrak{X}_1 = 0$ sei die Gleichung des planaren Complexes, in dem die Congruenz liegt, so wird diese durch Parameter $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ derart dargestellt werden können, dass $\mathfrak{X}_2$ und $\mathfrak{X}_3$ — als Coordinaten des einzelnen erzeugenden Cylinders — selbst mit zweien der Parameter σ_i zusammenfallen. Da ferner unter den Grössen $\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k$, $\mathfrak{X}_{ii}$ *sechs* linear-unabhängige vorkommen müssen, so folgt aus der Relation $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0$ weiter, dass die analytische Darstellung der Congruenz auf die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= 0\ , & \mathfrak{X}_{11} &= (a\sigma)^2, \\ \mathfrak{X}_2 &= \sigma_2, & \mathfrak{X}_{22} &= 2\sigma_1\sigma_3, \\ \mathfrak{X}_3 &= \sigma_3, & \mathfrak{X}_{33} &= -2\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

gebracht werden kann, wofern $(a\sigma)^2$ irgend eine in σ_1, σ_2, σ_3 quadratische Form bedeutet, die das Quadrat des Parameters σ_1 wirklich enthält. Mit Hülfe der Gleichungen (21)...(24) des vorigen Paragraphen wird diese Congruenz leicht als Singularitätencongruenz eines quadratischen Complexes erkannt.

Der hiermit bewiesene Satz findet eine wesentliche Ergänzung in dem folgenden:

Wenn zwei analytische Congruenzen eigentlicher Strahlen in solcher Beziehung zu einander stehen, dass in einer gewissen Umgebung von zwei Strahlen allgemeiner Lage jeder Strahl der einen Congruenz senkrecht geschnitten wird von (wenigstens) einem continuirlichen Band von Strahlen der anderen und umgekehrt, so sind folgende Fälle möglich:

Entweder liegt die eine Congruenz in einem planaren Complex, und ist übrigens beliebig, und die andere ist das mit dem Complex verbundene Parallelenbündel.

Oder die Strahlen beider Congruenzen lassen sich auf je ∞^1 Parallelenbüschel vertheilen, und diese und damit die Congruenzen selbst sind paarweise zu einander reciprok.

Oder endlich, beide Congruenzen sind zu einander reciproke aplanare Kettencongruenzen.

Nehmen wir an, dass die Strahlen der einen — sagen wir der zweiten — Congruenz sich auf ∞^1 Cylinder vertheilen lassen, so gehören nach Voraussetzung zu einer Erzeugenden eines solchen Cylinders ∞^1 Strahlen der ersten Congruenz. Gehören zu allen Erzeugenden des Cylinders dieselben ∞^1 Strahlen, so heisst das, dass der Cylinder ein Parallelenbüschel ist, und dass die ∞^1 Strahlen das zu diesem Büschel reciproke Büschel bilden. Gehören aber zu den ∞^1 Erzeugenden des Cylinders insgesammt ∞^2 Strahlen, so liegt die erste Congruenz in einem planaren Complex, und die zweite ist das zugehörige Parallelenbündel. Wenn also die Strahlen der einen Congruenz nicht auf ∞^1 Cylinder vertheilt werden können, so gilt Dasselbe von der anderen: Es bleibt nur noch zu zeigen, dass in diesem Falle alle Strahlen der einen Congruenz, die einen Strahl (allgemeiner Lage) der anderen senkrecht schneiden, eine Kette bilden müssen. Dieser Nachweis gelingt ohne Weiteres mit Hülfe eines Satzes, dessen Grundgedanke von Hamilton herrührt, und der so gefasst werden soll:

Wenn die eigentlichen Strahlen einer analytischen Congruenz sich nicht auf ∞^1 Cylinder vertheilen lassen, so bilden die gemeinsamen Nor-

malen zwischen einem Strahl allgemeiner Lage und den ihm benachbarten Strahlen der Congruenz eine Kette.

Als ein Strahl *„allgemeiner Lage“* in der Congruenz ist hier ein solcher zu bezeichnen, in dessen Umgebung die Coordinaten erster Art sich durch Potenzreihen zweier Parameter $s - s_0$, $t - t_0$ derart darstellen lassen, dass

$$S\left(X\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial t}\right) = \left(\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right) \neq 0 \tag{6}$$

ist für $s = s_0$, $t = t_0$.*) Das Normalennetz eines veränderlichen Strahls $ds : dt$ der Kette ist dann gegeben durch die Gleichung

$$ds\left(X\frac{\partial X}{\partial s}Y\right) + dt\left(X\frac{\partial X}{\partial t}Y\right) = 0. \tag{7}$$

Man erkennt nun unschwer, dass auch die folgenden von enger gefassten Voraussetzungen ausgehenden Sätze richtig sind:

Wenn von zwei analytischen Congruenzen eigentlicher Strahlen jede aus allen gemeinsamen Normalen von Strahlen der anderen besteht, so sind sie reciproke aplanare Kettencongruenzen.

Wenn die eigentlichen Strahlen einer analytischen Congruenz nicht auf ∞^1 Parallelenbüschel vertheilt werden können, und wenn zugleich die gemeinsamen Normalen consecutiver Congruenzstrahlen in ihrer Gesammtheit eine zweite Congruenz bilden, so sind beide Congruenzen reciproke aplanare Kettencongruenzen.

Wir fügen noch einige Sätze verwandten Charakters hinzu, die sich auf Strahlencomplexe beziehen.

Wenn ein analytischer Strahlencomplex ∞^4 Ketten enthält, so enthält er entweder deren ∞^5, und ist ein planarer Complex; oder der Complex besteht aus den Normalen der Strahlen eines nicht cylindrischen Bandes; oder endlich, der Complex ist ein regulärer quadratischer Strahlencomplex.

---

*) Der Satz Hamiltons, in dem das Cylindroid wohl zuerst und sogleich in einer seiner wichtigsten Eigenschaften auftritt, scheint in der dem Verfasser zur Zeit nicht zugänglichen Abhandlung über „Systems of Rays“ vorzukommen, die im 15. Bande (1829?) der Transactions of the R. Irish Academy abgedruckt ist.

Der Verfasser hat den Satz, in einer ungenügenden Formulirung, in dem citirten Werke des Herrn R. Ball gefunden (S. 511).

Liegen die ∞^4 Ketten in demselben planaren Complex, so tritt der erste Fall ein. Sind ferner die ∞^4 Ketten auf ∞^1 planare Complexe vertheilt, so müssen die in einem dieser Complexe gelegenen ∞^3 Ketten eine Congruenz bilden, und diese ist dann nothwendig ein Normalennetz. Sind schliesslich die ∞^4 Ketten zu ∞^2 auf ∞^2 planare Complexe vertheilt, so bilden die in einem von diesen gelegenen Ketten wiederum eine Strahlencongruenz. Diese kann nicht ein Normalennetz sein, da die Normalen von ∞^2 eigentlichen nicht parallelen Strahlen keinen Complex bilden können. Die Congruenz ist also entweder die Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Strahlencomplexes, oder eine planare Kettencongruenz. Aus beiden Annahmen (deren erste sich übrigens sogleich als unmöglich erweist), folgt, dass die ∞^4 Ketten ∞^4 verschiedene Hauptaxen haben, dass also in einer gewissen Umgebung eines eigentlichen Strahls jeder Strahl in seinem Normalennetz eine Kette von Strahlen des gesuchten Complexes hat. Dieser Complex selbst ist dann nothwendig algebraisch, quadratisch, und entweder ein regulärer quadratischer Complex oder ein Kettencomplex. Der Kettencomplex gehört gleichzeitig zu der zuvor genannten Familie von Complexen, und kann daher in der Aufzählung weggelassen werden.

Wenn ein analytischer Strahlencomplex ∞^2 planare Kettencongruenzen enthält, so ist er entweder ein regulärer quadratischer oder ein Kettencomplex, oder er enthält ∞^5 planare Kettencongruenzen und ist ein planarer Complex.

Wenn ein analytischer Strahlencomplex ∞^2 Singularitätencongruenzen regulärer quadratischer Complexe enthält, so enthält er deren ∞^6, und ist ein planarer Complex.

Jeder analytische Strahlencomplex, der ∞^2 Normalennetze eigentlicher Strahlen enthält, ist ein planarer Complex.

Jeder analytische Strahlencomplex, der ∞^2 aplanare Kettencongruenzen enthält, enthält deren ∞^3, und ist ein Kettencomplex.

Alle diese Sätze können leicht auf den zuvor bewiesenen zurückführt werden.

Es lassen sich noch mehr Sätze der Art aufstellen; aber der Zweck, den wir bei unserer Untersuchung verfolgt haben, nämlich durch Aufweisung von *einfachen*, leicht verständlichen und dabei *charakteristischen* Eigenschaften der betrachteten Figuren das Interesse zu rechtfertigen, das wir an ihnen nehmen, darf wohl als durch das Vorgetragene erreicht gelten.

Charakteristische Eigenschaft der radial-projectiven Transformationen.

Aus den vorausgehenden Untersuchungen kann nun ohne Weiteres geschlossen werden, dass jede *analytische* Transformation, die Normalennetze eigentlicher Strahlen in ebensolche überführt, aplanare Kettencongruenzen, Strahlenketten, quadratische Strahlencomplexe u. s. w. unter einander vertauschen muss. Jede solche Transformation ist mithin, als Transformation der Mannigfaltigkeit M_4 betrachtet, projectiv. Die collinearen Transformationen von R_8 aber, die M_4 in Ruhe lassen, können sehr leicht unmittelbar bestimmt werden: Man erhält die uns bereits bekannte Gruppe mit 17 Parametern. Der schon auf S. 236 formulirte Satz ist also soweit bewiesen, als es sich um analytische Transformationen handelt. Dasselbe ergiebt sich, sogar noch auf etwas einfachere Art, übrigens auch aus den im folgenden Paragraphen anzustellenden Betrachtungen*).

Dass die radial-projectiven Transformationen auch dadurch charakterisirt werden können, dass sie z. B. Ketten, oder aplanare Kettencongruenzen, unter einander vertauschen, ist selbstverständlich.

§ 33.

Die aplanare Kettencongruenz als Raumelement. Analogieen zwischen der Euklidischen und der radial-projectiven Geometrie.

Man kann natürlich alle die zuvor betrachteten Figuren als Raumelemente auffassen, und die so aus den radialen Collineationen abzuleitenden Gruppen einer selbstständigen Untersuchung unterwerfen. Man wird dann offenbar meistens zu verwickelten Ergebnissen kommen. In einigen Fällen aber ergeben sich einfache, und wie uns scheint, auch bemerkenswerthe Resultate. Eines der gemeinten Raumelemente ist die aplanare Kettengruenz.

Wir knüpfen (äusserlich) an die bereits begründete Thatsache an, dass diese Figur mit dem Strahlenbündel in eine Classe gehört.

Ein Strahlenbündel mit dem eigentlichen Scheitel o gestattet eine der Gruppe G_9, aber nicht deren Untergruppe G_8 angehörige einglied-

*) Umständlicher, aber nunmehr ebenfalls nicht mehr schwierig, ist der Beweis unter den in der Anmerkung auf S. 236 bezeichneten Voraussetzungen zu führen: Auch bei mehreren der Sätze des Textes lassen sich die Voraussetzungen anders, und, in der Beschränkung auf reelle Figuren, allgemeiner fassen.

rige Gruppe von radial-projectiven Transformationen, die jeden einzelnen Strahl des Bündels in Ruhe lassen, nämlich die perspectiven Aehnlichkeitstransformationen mit dem Centrum o; und insbesondere gestattet es auch eine duale Anticollineation, die Spiegelung am Punkt o. Nun giebt es ∞^8 aplanare Kettencongruenzen, die alle mit dem Strahlenbündel äquivalent sind, und ebensoviele continuirliche eingliedrige Untergruppen giebt es in der Gruppe G_9 aller der radialen Collineationen, die jeden Strahl parallel zu sich selbst fortschieben. Da nun die zuerst genannte Gruppe die Strahlen einer weiteren aplanaren Kettencongruenz nicht in Ruhe lässt, so muss man eine nicht speciell gewählte eingliedrige Untergruppe von G_9 dadurch aus der Gruppe der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen mit dem Centrum o ableiten können, dass man diese Gruppe irgend einer radialen oder auch nur dualen Collineation unterwirft.

Um diese Bemerkung, und was daraus folgt, präcise formuliren zu können, untersuchen wir die eingliedrige Gruppe von radialen Transformationen, die von irgend einer solchen infinitesimalen Transformation von G_9 erzeugt wird, die nicht zu deren invarianter Untergruppe G_8 gehört.

Die Transformationen von G_9 und die aplanaren Kettencongruenzen.

Die allgemeine infinitesimale Transformation von G_9 wird nach S. 234...237 in Coordinaten erster Art dargestellt durch Gleichungen der Form

$$\begin{gathered} \mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}'_{02} = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathfrak{X}'_{03} = \mathfrak{X}_{03}, \\ (1) \quad \mathfrak{X}'_{23} = (1 + q\delta t) \cdot \mathfrak{X}_{23} + q_{11}\delta t \cdot \mathfrak{X}_{01} + q_{12}\delta t \cdot \mathfrak{X}_{02} + q_{13}\delta t \cdot \mathfrak{X}_{03}, \\ (q_{11} + q_{22} + q_{33} = 0) \end{gathered}$$

u. s. w., wobei der Parameter q, da Transformationen von G_8 ausgeschlossen sein sollen, als *von Null verschieden* anzunehmen ist. Die erzeugte endliche Transformation hat die Gleichungen

$$(2) \quad \mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{23} + \frac{1}{q}\left\{e^{qt} - 1\right\}\left\{q\mathfrak{X}_{23} + q_{11}\mathfrak{X}_{01} + q_{12}\mathfrak{X}_{02} + q_{13}\mathfrak{X}_{03}\right\},$$

u. s. f. Es ist also (vgl. S. 237, Nr. 5)

$$(3) \quad k = e^{qt}, \quad \alpha_{ik} = \frac{k-1}{q} \cdot q_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Sind daher die Grössen $k\,(\neq 1)$ und α_{ik} gegeben, so kann man die Quotienten $q_{ik} : q$ eindeutig bestimmen. Hieraus und aus einer ähn-

lichen auf die Transformationen von G_8 bezüglichen Betrachtung erhält man den Satz:

Jede beliebige endliche Transformation von G_9 wird von einer einzigen infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt).*

Ferner findet sich sogleich:

Jede nicht in G_8 enthaltene eingliedrige continuirliche Untergruppe von G_9 enthält eine einzige duale Anticollineation (eine einzige involutorische Transformation), und diese ist involutorisch (eine Anticollineation).

Man findet sie, wenn man $e^{qt} = k = -1$ setzt.

Bestimmen wir jetzt aus den Gleichungen

$$(4) \qquad \mathfrak{X}'_{23} = k\mathfrak{X}_{23} + \alpha_{11}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{12}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{13}\mathfrak{X}_{03} \quad (k \neq 1)$$

u. s. w., indem wir $\mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{23} + \lambda\mathfrak{X}_{01}$ etc. setzen, die bei der Transformation (4) in Ruhe bleibenden Strahlen, so finden wir, da nachträglich wieder $\lambda = 0$ gesetzt werden darf, die Strahlen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= \sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{23} = \frac{1}{1-k}\left\{\alpha_{11}\sigma_1 + \alpha_{12}\sigma_2 + \alpha_{13}\sigma_3\right\}, \\ \mathfrak{X}_{02} &= \sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{31} = \frac{1}{1-k}\left\{\alpha_{21}\sigma_1 + \alpha_{22}\sigma_2 + \alpha_{23}\sigma_3\right\}, \\ \mathfrak{X}_{03} &= \sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{12} = \frac{1}{1-k}\left\{\alpha_{31}\sigma_1 + \alpha_{32}\sigma_2 + \alpha_{33}\sigma_3\right\}, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ homogene Parameter bedeuten. Hieraus und aus dem auf S. 333 Gesagten folgt nunmehr:

Mit jeder aplanaren Kettencongruenz ist eindeutig-umkehrbar eine nicht in G_8 enthaltene eingliedrige Untergruppe von G_9 (und daher auch eine einzige in G_9 enthaltene involutorische Anticollineation) verbunden, die jeden einzelnen Congruenzstrahl in Ruhe lässt.

*Alle die genannten Gruppen (und ebenso die involutorischen Transformationen) sind daher schon gegenüber dualen Collineationen mit einander äquivalent (gleichberechtigt)***).*

Setzt man, was keine Beschränkung enthält, $q = 1$, so lassen sich die Gleichungen (5) einfacher so schreiben:

$$(6) \qquad \mathfrak{X}_{01} = \sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{23} = -q_{11}\sigma_1 - q_{12}\sigma_2 - q_{13}\sigma_3,$$

---

*) Ist $k < 0$, so wird die endliche Transformation nicht auf reellem Wege, nicht durch sogenannte Iteration einer reellen infinitesimalen Transformation erhalten; aber auch in diesem Falle gehört sie einer einzigen reellen und continuirlichen (wiewohl im reellen Gebiete discontinuirlichen) eingliedrigen Untergruppe von G_9 an.

**) Für die eingliedrigen Gruppen in G_8 (deren keine eine involutorische Transformation enthält) besteht kein ähnlicher Satz.

u. s. w. Es bedeutet aber das der Bedingung $q_{11} + q_{22} + q_{33} = 0$ unterworfene Grössensystem q_{ik} die allgemeine infinitesimale Transformation von G_9. Es folgt also, was übrigens auch unmittelbar deutlich:

Die ∞^8 aplanaren Kettencongruenzen lassen sich den im Endlichen gelegenen Punkten eines achtfach ausgedehnten ebenen Raumes derart eindeutig-umkehrbar zuordnen, dass aus der Gruppe G_{17} bei dieser Abbildung eine Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ von affinen Transformationen hervorgeht).*

Gleichzeitig werden auch die reciproken Congruenzen (die aplanaren Congruenzen der zweiten Schicht) auf denselben Punktraum abgebildet: Man hat, um das Bild der zur Congruenz q_{ik} reciproken zu finden, nur q_{ik} durch $-q_{ki}$, d. h. die zur Congruenz q_{ik} gehörige infinitesimale Transformation von G_9 durch die contragrediente (discordante) Transformation zu ersetzen. (Vgl. S. 235.)

Der eingeführte Punktraum R_8 wird also mit zwei Blättern überdeckt, die, wie wir sagen wollen, durch discordante Transformationen von $\mathfrak{G}_{17}$ transformirt werden. Beide Blätter werden vertauscht durch die Transformation $q_{ik}' = -q_{ki}$, die eben die Paarung der Transformationen von $\mathfrak{G}_{17}$ bewirkt, und die hierdurch isomorph auf sie selbst bezogene Gruppe zu einer sogenannten gemischten Gruppe $(\mathfrak{G}_{17}, \mathfrak{H}_{17})$ erweitert.

Das Ergebniss, zu dem wir hier gekommen sind, wird dadurch merkwürdig, dass die in der besprochenen Abbildung liegende „geometrische Addition" aplanarer Kettencongruenzen sich auf eine ganz einfache Weise deuten lässt. — Wir beschränken uns des kürzeren Ausdrucks wegen auf *reelle* Figuren.

Geometrische Addition aplanarer Kettencongruenzen.

Betrachten wir neben der Congruenz (6) eine zweite, die wir durch dieselben Parameter σ_i darstellen wollen,

$$(7) \qquad \mathfrak{X}_{01}' = \sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{23}' = -q_{11}'\sigma_1 - q_{12}'\sigma_2 - q_{13}'\sigma_3,$$

u. s. w., so sind entprechende Strahlen beider Congruenzen (Strahlen mit proportionalen Parametern) parallel. Verstehen wir jetzt unter $\lambda : \lambda'$ homogene Parameter, und setzen wir

$$(9) \qquad (\lambda + \lambda')q_{ik}'' = \lambda q_{ik} + \lambda' q_{ik}' \qquad (\lambda + \lambda' \neq 0),$$

*) Wir kommen auf diese Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ weiter unten zurück.

(8) $$\mathfrak{X}''_{01} = \sigma_1, \quad \mathfrak{X}''_{23} = -q''_{11}\sigma_1 - q''_{12}\sigma_2 - q''_{13}\sigma_3, \qquad \text{u. s. f.,}$$

so theilt der Strahl $\mathfrak{X}''$ den Abstand der Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ im Verhältniss $-\lambda' : \lambda$. (8) aber bedeutet wieder eine aplanare Congruenz. In derselben Beziehung, wie die drei Congruenzen (6), (7), (8) stehen ferner die zu ihnen reciproken Congruenzen:

(6a) $$\mathfrak{U}_{01} = \tau_1, \quad \mathfrak{U}_{23} = q_{11}\tau_1 + q_{21}\tau_2 + q_{31}\tau_3,$$

(7a) $$\mathfrak{U}'_{01} = \tau_1, \quad \mathfrak{U}'_{23} = q'_{11}\tau_1 + q'_{21}\tau_2 + q'_{31}\tau_3,$$

(8a) $$\mathfrak{U}''_{01} = \tau_1, \quad \mathfrak{U}''_{23} = q''_{11}\tau_1 + q''_{21}\tau_2 + q''_{31}\tau_3$$

(u. s. w.), und die Bedingung des orthogonalen Schneidens von Strahlen zusammengehöriger Congruenzen wird in allen drei Fällen durch die nämliche Gleichung ausgedrückt

(10) $$\sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2 + \sigma_3\tau_3 = 0.$$

Somit ist der folgende Satz begründet, der übrigens auch geometrisch abgeleitet werden kann:

Theilt man den Abstand paralleler Strahlen von zwei aplanaren Kettencongruenzen Φ, Φ' in einem bestimmten von der positiven Einheit verschiedenen Verhältniss, so ist der Ort aller so construirten Strahlen eine neue aplanare Kettencongruenz Φ''. Verfährt man ebenso mit den zugehörigen reciproken Congruenzen Ψ, Ψ', so ist die aus diesen abgeleitete Congruenz Ψ'' reciprok zu Φ'', und zwar werden orthogonalen Strahlen von Φ, Ψ und Φ', Ψ' ebenfalls orthogonale Strahlen von Φ'', Ψ'' zugeordnet. Die ganze Beziehung ist invariant gegenüber radialen Projectivitäten.

Man übersieht leicht, wie sich auf Grund dieses Satzes die ganze Punkt- und Streckenrechnung aus dem Raume von acht Dimensionen auf den gewöhnlichen Raum übertragen lässt. Man hat nur die Grössen q_{ik} abwechselnd als Punktcoordinaten im Raume R_8 und als Coordinaten einer aplanaren Kettencongruenz zu deuten. Aus irgend neun „linear-unabhängigen“ Congruenzen $\Phi_1 \ldots \Phi_9$, deren jeder man ein „Gewicht“ Eins zuschreibt, lassen sich, mit Gewichten $\lambda_1 \ldots \lambda_9$ von der Summe Eins alle anderen in der Form

(11) $$\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \cdots + \lambda_9\Phi_9$$

ableiten, wobei der Ableitungsprocess nach obigem Satze zu deuten ist.

Setzt man, nunmehr unter Φ'' eine *gegebene* aplanare Congruenz verstehend,

(12) $$2\Phi'' = \Phi + \Phi', \quad \text{d. h.} \quad 2q''_{ik} = q_{ik} + q'_{ik},$$

so erlaubt insbesondere auch dieser Process eine einfache geometrische Deutung. Es wird dadurch nämlich jeder aplanaren Congruenz Φ eine andere Φ' zugeordnet, und zwar durch die mit Φ'' verbundene involutorische Anticollineation. Bedenkt man ferner, dass mit je zwei aplanaren Congruenzen Φ_1 und Φ_2 solche involutorische Transformationen verbunden sind, denen in R_8 die Spiegelungen an den Φ_1 und Φ_2 zugeordneten Punkten entsprechen, sowie dass die Folge zweier solcher Spiegelungen eine Schiebung in R_8 bedeutet, so erkennt man, dass ein bereits aufgestellter Satz sich wie folgt erweitern lässt:

Mit jeder aplanaren Kettencongruenz Φ ist eine involutorische Anticollineation verbunden, die „Spiegelung“ $\{\Phi\}$ an der Congruenz. Diese reducirt sich für jedes Parallelenbündel auf die Spiegelung an dem in der Congruenz enthaltenen Strahl des Bündels, und kann daher leicht construirt werden.

Setzt man irgend zwei solche Spiegelungen $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_2\}$ zusammen, so entsteht dadurch eine duale Schiebung

$$S = \{\Phi_1\}\{\Phi_2\} = \{\Phi_1, \Phi_2\} = \{\Phi_2, \Phi_1\}^{-1},$$

also eine Transformation der Gruppe G_8 (S. 235).

Umgekehrt kann jede Transformation S von G_8 auf ∞^8 Arten als Folge zweier Spiegelungen an aplanaren Kettencongruenzen erzeugt werden, wobei noch die eine dieser Congruenzen beliebig angenommen werden darf.

Die genannten Spiegelungen und Schiebungen bilden zusammen eine Gruppe, die holoëdrisch isomorph ist mit der von den Spiegelungen an Punkten und von den Schiebungen eines achtfach ausgedehnten Raumes gebildeten Gruppe.

Ist $$S = \{\Phi_1, \Phi_2\} = \{\Phi_1', \Phi_2'\},$$

so ist $$\Phi_2 - \Phi_1 = \Phi_2' - \Phi_1', \qquad \text{und umgekehrt,}$$

d. h. parallele Strahlen der Congruenzen Φ_1 und Φ_2', Φ_2 und Φ_1' werden von den zu ihnen senkrechten Ebenen in gegenüberliegenden Ecken je eines Parallelogramms geschnitten.

Es giebt ferner eine einzige duale Schiebung T, die Φ_1 in Φ_2 überführt, und diese ist identisch mit der, die Φ_1' in Φ_2' überführt. Sie steht zu der zuerst genannten Schiebung S in der Beziehung

$$S = T^2,$$

*und sie ist die einzige duale Schiebung, der diese Eigenschaft zukommt**).

Die Zusammensetzung der Transformationen von G_8 kann hiernach mit Hülfe der Parallelogrammconstruction bewirkt werden: In jedem einzelnen Parallelenbündel werden die dualen Schiebungen nach derselben Regel wie gewöhnliche Schiebungen zusammengesetzt, was wir übrigens schon früher (S. 235) erkannt haben.

Die Gleichungen der involutorischen Anticollineation, die mit einer gegebenen aplanaren Kettencongruenz (q_{ik}) verbunden ist, lassen sich sehr leicht aufstellen. Sie sind, in Coordinaten erster Art geschrieben, $\mathfrak{X}'_{0k} = \mathfrak{X}_{0k}$, und

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}'_{23} &= -\mathfrak{X}_{23} - 2q_{11}\mathfrak{X}_{01} - 2q_{12}\mathfrak{X}_{02} - 2q_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\
\mathfrak{X}'_{31} &= -\mathfrak{X}_{31} - 2q_{21}\mathfrak{X}_{01} - 2q_{22}\mathfrak{X}_{02} - 2q_{23}\mathfrak{X}_{03}, \\
\mathfrak{X}'_{12} &= -\mathfrak{X}_{12} - 2q_{31}\mathfrak{X}_{01} - 2q_{32}\mathfrak{X}_{02} - 2q_{33}\mathfrak{X}_{03}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

(Vgl. Nr. 12.) Setzt man $\mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{23}$ u. s. f., so erhält man wieder die Gleichungen der Congruenz selbst (§ 30, Nr. 6). Unterwirft man die Spiegelung (13) allen Transformationen von G_{17}, so erhält man, als Transformationen der Parameter q_{ik}, die Transformationen derselben Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$, die unmittelbar durch Einführung der aplanaren Kettencongruenz als Raumelement aus G_{17} hervorgeht. (Vgl. § 35.)

Ableitung der radialen Collineationen aus einer primitiven projectiven Gruppe.

Betrachten wir die Aehnlichkeitstransformationen mit ihren invarianten continuirlichen Untergruppen (vgl. S. 292)

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{g}_6 & \\
\mathfrak{g}_7 & & \mathfrak{g}_3 \\
 & \mathfrak{g}_4 &
\end{array}
$$

als ein System von vier projectiven Gruppen, so können wir dieses in Parallele setzen mit der Eingangs des Paragraphen angeführten Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ und ihren invarianten Untergruppen, also mit dem System von projectiven Gruppen

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{G}_{16} & \\
\mathfrak{G}_{17} & & \mathfrak{G}_8, \\
 & \mathfrak{G}_9 &
\end{array}
$$

---

*) Allgemein ist, wie bei den gewöhnlichen Schiebungen $S' = \sqrt[n]{S}$ innerhalb der Gruppe aller dualen Schiebungen eine eindeutig bestimmte Operation: $\alpha'_{ik} = \frac{1}{n}\,\alpha_{ik}$.

deren letzte ebenfalls von vertauschbaren Transformationen gebildet wird. Es lohnt sich, auf das Wesen dieser Analogie noch näher einzugehen, da uns eine solche Betrachtung zu besserem Verständniss der Bedeutung unserer Gruppen G_{17}, G_{16}, G_9, G_8 verhilft.

Beachten wir zunächst, dass man die zuerst genannten Gruppen auf eine einfache Weise aus der allgemeinen projectiven Gruppe eines *binären* Gebietes ableiten kann. Es ist nämlich die Adjungirte dieser letzten Gruppe (vermöge imaginärer Collineationen) projectiv-ähnlich zur Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt. Setzt man nun diese Gruppe mit den trivialen Gruppen $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_3$ zusammen, so entstehen die primitiven Gruppen $\mathfrak{g}_7$, $\mathfrak{g}_6$. Es ist ferner zu bemerken, dass eine mit der Gruppe $\mathfrak{g}_7$ holoëdrisch-isomorphe imprimitive Gruppe g_7 in einem Raume von niederer Dimension, in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit existirt. Man braucht, um diese Gruppe g_7 zu erhalten, als Raumelemente nur die ∞^2 Ebenen einzuführen, die den sogenannten absoluten Kegelschnitt berühren: denn diese Ebenen werden durch die Transformationen von $\mathfrak{g}_7$ nur unter einander vertauscht*).

Alle diese Verhältnisse finden sich nun mutatis mutandis in unserer gegenwärtigen Theorie wieder: An Stelle des binären Gebietes ist ein *ternäres* zu setzen, und ausserdem fallen die imaginären Transformationen weg, alle zu betrachtenden Zuordnungen sind *reell*, oder können es doch sein.

Wir wollen zunächst ein System von neun nicht-homogenen Grössen q_{ik}, die der Bedingung $q_{11} + q_{22} + q_{33} = 0$ unterworfen sind, ansehen als System der canonischen Parameter der allgemeinen projectiven Gruppe einer Ebene**). Deuten wir sie als Cartesische Punktcoordinaten in einem Raume R_8, so erhalten wir in diesem Raume zunächst eine achtgliedrige Untergruppe der von S. Lie sogenannten speciellen linearen homogenen Gruppe, die Adjungirte der allgemeinen projectiven Gruppe des ternären Gebietes. Diese Gruppe erweitern wir nun dadurch, dass wir mit ihren Transformationen entweder alle perspectiven Aehnlichkeitstransformationen ($\mathfrak{G}_9$) oder nur die Schiebungen ($\mathfrak{G}_8$) des Raumes R_8 zusammensetzen. Dadurch entstehen zwei primitive Gruppen $\mathfrak{G}_{17}$, $\mathfrak{G}_{16}$; die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ umfasst die Gruppen $\mathfrak{G}_{16}$, $\mathfrak{G}_9$, $\mathfrak{G}_8$. Wir behaupten nun:

Die primitive projective Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$, die durch den geschilderten Erweiterungsprocess aus der Adjungirten der allgemeinen projectiven

*) Man vergleiche darüber S. 309, 348.

**) Vgl. des Verfassers „Methoden zur Theorie der ternären Formen", Leipzig 1889, § 15.

Gruppe eines ternären Gebietes hervorgeht, ist identisch mit der bereits erörterten Gruppe, die durch Einführung der aplanaren Kettencongruenz als Raumelement aus der Gruppe G_{17} der radialen Collineationen entsteht.

Mit Bezug auf die Untergruppen $\mathfrak{G}_8$ und G_8 haben wir den behaupteten Zusammenhang bereits nachgewiesen. Allgemein kann man zu der genannten Einsicht durch Aufstellung der Transformationsgleichungen kommen, aber auch ohne wirkliche Ausführung einer solchen Rechnung durch folgende Ueberlegung.

Man betrachte zunächst die Grössen q_{ik} nicht mehr als canonische Parameter der ternären Collineationen, sondern als (natürlich ebenfalls canonische) Parameter der Gruppe G_8, oder, was nach dem Früheren auf Dasselbe hinauskommt, als Coordinaten je einer der ∞^8 aplanaren Congruenzen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{23} &= -q_{11}\mathfrak{X}_{01} - q_{12}\mathfrak{X}_{02} - q_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{31} &= -q_{21}\mathfrak{X}_{01} - q_{22}\mathfrak{X}_{02} - q_{23}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{12} &= -q_{31}\mathfrak{X}_{01} - q_{32}\mathfrak{X}_{02} - q_{33}\mathfrak{X}_{03}, \end{aligned}$$

die aus der aplanaren Congruenz

$$\mathfrak{X}_{23} = 0, \quad \mathfrak{X}_{31} = 0, \quad \mathfrak{X}_{12} = 0$$

durch die Transformationen $\alpha_{ik} = -q_{ik}$ von G_8 hervorgehen. Unterwirft man nun die dualen Schiebungen $(-q_{ik})$ den Transformationen von G_{16}, z. B. denen, die das zuletzt genannte Strahlenbündel (dessen Scheitel wir o nennen wollen) in Ruhe lassen, so werden sie, wegen des bereits festgestellten Isomorphismus der Gruppe G_{16} mit den ternären Collineationen, genau so unter einander vertauscht, wie bei der ersten Auffassung. Man kommt also wieder zur Adjungirten der allgemeinen projectiven Gruppe einer Ebene. Unterwirft man ferner die duale Schiebung $(-q_{ik})$ der perspectiven Aehnlichkeitstransformation mit dem Parameter k, die den Punkt o in Ruhe lässt, so erhält man die Schiebung $(-kq_{ik})$, d. h. der genannten Aehnlichkeitstransformation wird eine ebenfalls perspective Aehnlichkeitstransformation mit demselben Vergrösserungsverhältniss k im Raume R_8 zugeordnet, die dort den Anfangspunkt der Cartesischen Coordinaten (q_{ik}) in Ruhe lässt. Da nun die dreierlei betrachteten Gruppen des Raumes R_8 die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ erzeugen, und die ihnen entsprechenden Gruppen des Strahlenraumes die Gruppe G_{17}, so ist der ausgesprochene Satz bewiesen. —

Die Bilder der Strahlen im Raume R_8.

Das gefundene Ergebniss lässt sich noch tiefer fassen: Wir fragen jetzt, ob nicht im Raume R_8 eine einfache Figur sich nachweisen lässt, die der Figur des eigentlichen Strahls im Strahlenraume entspricht, und durch deren Einführung als Raumelement in R_8 mithin die Zuordnung zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}_{17}$ und G_{17} ebenfalls bewirkt werden kann. Wir werden nachweisen, dass zwei verschiedene Figuren der verlangten Eigenschaft vorhanden sind.

Den Vertauschungen der eigentlichen Punkte (q_{ik}) des R_8 durch $\mathfrak{G}_{17}$ entsprechen im Strahlenraume offenbar solche Vertauschungen der aplanaren Kettencongruenzen, die *erstens* den Inbegriff aller aplanaren Kettencongruenzen, die denselben Strahl $\mathfrak{X}$ gemein haben, in einen Inbegriff gleicher Art überführen, *zweitens* dieselbe Eigenschaft haben in Bezug auf den Inbegriff aller aplanaren Kettencongruenzen, deren reciproke denselben Strahl $\mathfrak{U}$ enthalten, oder die, was dasselbe ist, das Normalennetz eines eigentlichen Strahles $\mathfrak{U}$ in einer Kette durchdringen.

Wir haben nun bereits in § 30 unter Nr. (7) die Bedingungen für die zuerst genannte Lagenbeziehung aufgestellt. Wir bezeichnen sie, mit einer für unseren augenblicklichen Zweck genügenden Abkürzung, durch das Symbol

$$[q_{ik}, \mathfrak{X}] = 0. \tag{15}$$

Die Bedingungen für die zweite genannte Lagenbeziehung sind dann

$$[-q_{ki}, \mathfrak{U}] = 0. \tag{16}$$

Jede dieser beiden symbolischen Gleichungen ist mit zwei linearen Gleichungen für die Grössen q_{ik} äquivalent; jede bestimmt also, bei gegebenem $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{U}$, einen *ebenen* Raum von *sechs* Dimensionen, und es entstehen auf diese Weise zwei Schaaren von je ∞^4 Räumen R_6, R_6', deren Individuen den ∞^4 eigentlichen Strahlen $\mathfrak{X}$ des ersten Blattes, und den ∞^4 eigentlichen Strahlen $\mathfrak{U}$ des zweiten Blattes zugeordnet sind.

Unterwerfen wir jetzt die Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ discordanten radialen Collineationen, so werden dadurch gewisse der Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ angehörige Vertauschungen der Punkte q_{ik}, der Bilder der aplanaren Kettencongruenzen ersten Blattes, bewirkt, ebenso aber auch, vermöge der discordanten Transformationen der Kettencongruenzen (r_{ik}) zweiten Blattes, andere Vertauschungen der Punkte r_{ik} des Raumes R_8, die wiederum der Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ angehören, und zu den ersten *discordant* genannt

werden sollen. Diese letzten Vertauschungen lassen unverändert die Beziehungen

$$[r_{ik}, \mathfrak{U}] = 0 \tag{17}$$

und

$$[-r_{ki}, \mathfrak{X}] = 0. \tag{18}$$

Man wird also auch den Raum R_8 mit zwei Blättern *I*, *II* überdecken; diese Blätter *I*, *II* werden auf verschiedene Art, „discordant", transformirt; in jedem Blatt bleiben die beiden Schaaren von je ∞^4 Räumen R_6, R_6' in Ruhe; jeder Strahl $\mathfrak{X}$ im ersten Blatte des Strahlenraums hat als Bild *erstens* einen der Räume R_6 des Blattes *I* von R_8, *zweitens* einen der Räume R_6' des Blattes *II*; ebenso jeder Strahl $\mathfrak{U}$ im zweiten Blatte des Strahlenraumes *erstens* einen der Räume R_6' des Blattes *I* von R_8, *zweitens* einen der Räume R_6 des Blattes *II*. Ordnen wir durch die involutorische Transformation

$$r_{ik} + q_{ki} = 0$$

jeder aplanaren Kettencongruenz ihre reciproke und damit jedem Punkte des Blattes *I* von R_8 einen Punkt des Blattes *II* zu, so wird dadurch die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ isomorph auf sie selbst bezogen, indem discordante Transformationen einander zugeordnet werden, und zugleich werden die beiden Schaaren R_6, R_6' derart vertauscht, dass jeder Raum R_6 des Battes *I* in den Raum R_6' des Blattes *II* übergeht, der zu *demselben* Strahl $\mathfrak{X}$ gehört und ebenso jeder Raum R_6' des Blattes *I* in den Raum R_6 des Blattes *II*, der zu *demselben* Strahl $\mathfrak{U}$ gehört.

Wir heben zunächst das Wesentlichste hiervon in folgender Fassung hervor:

Die primitive Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ des Raumes R_8, die durch den beschriebenen Erweiterungsprocess aus der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene entstanden ist, wird durch die involutorische Transformation

$$r_{ki} + q_{ik} = 0 \tag{19}$$

zu einer projectiven sogenannten gemischten Gruppe ($\mathfrak{G}_{17}$, $\mathfrak{H}_{17}$) erweitert. Die genannte Transformation paart die Transformationen von $\mathfrak{G}_{17}$, und je zwei zusammengehörigen, „discordanten" Transformationen entsprechen im Strahlenraume ebenfalls gepaarte, nämlich discordante Transformationen von G_{17}.

In dem Raume R_8 giebt es zwei (und wie sich noch zeigen wird, nur zwei) invariante Schaaren von je ∞^4 Räumen R_6, R_6, und diese

werden, wenn man (dem Auftreten discordanter Transformationen entsprechend) den Raum R_8 mit zwei Blättern I, II überdeckt, zu vier Schaaren

$$ {}_{I}R_6,\ {}_{I}R_6';\quad {}_{II}R_6,\ {}_{II}R_6' $$

erweitert. Die Individuen dieser Schaaren werden durch die Transformation (19) *natürlich ebenfalls in bestimmter Weise gepaart, und diese Paare lassen sich den eigentlichen Strahlen ersten und zweiten Blattes des Strahlenraumes derart zuordnen, dass auch durch diese Beziehung der Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}_{17}$, G_{17} bewirkt wird:*

$$ [\mathfrak{X};\ {}_{I}R_6,\ {}_{II}R_6'],\quad [\mathfrak{U};\ {}_{II}R_6,\ {}_{I}R_6']. $$

Besonders bemerkt zu werden verdient wohl, dass die Transformationen der Schaar $\mathfrak{H}_{17}$, zu denen (19) gehört, *nicht* als Transformationen von Strahlen aufgefasst werden können, und dass daher diese Collineationen des R_8 auch nicht etwa Bilder der radialen *Correlationen* sind. Diese werden vielmehr dargestellt durch solche Vertauschungen der beiden Blätter *I*, *II*, die jede einzelne der beiden Schaaren von sechsfach ausgedehnten Räumen in Ruhe lassen. Die duale Correlation $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}$ z. B., die jeden Strahl des ersten Blattes mit dem darüber liegenden Strahl des zweiten Blattes zur Deckung bringt, wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$ r_{ik} = q_{ik}, \tag{20} $$

und durch diese Transformation werden jene Mannigfaltigkeiten auf andere Art gepaart als zuvor, nämlich selbstverständlicher Weise so:

$$ [{}_{I}R_6,\ {}_{II}R_6],\quad [{}_{I}R_6',\ {}_{II}R_6']. $$

Wir sehen von der Betrachtung der radialen Correlationen weiterhin ab.

Führen wir in die Gleichungen (15)...(19) an Stelle der Cartesischen Coordinaten q_{ik}, r_{ik} homogene Coordinaten $q_{ik} : q$, $r_{ik} : r$ ein, und setzen wir nachträglich $q = 0$, $r = 0$, so erhalten wir die Durchschnitte der betrachteten sechsfach ausgedehnten Räume mit dem unendlich-fernen R_7 des R_8. So erkennen wir:

Durch jede der beiden betrachteten Abbildungen werden den ∞^2 eigentlichen Strahlen eines Parallelenbündels des ersten (zweiten) Blattes ∞^2 ebene sechsfach ausgedehnte Räume zugeordnet, die ebenfalls parallel sind, also den mit zwei Blättern I, II überdeckten unendlich fernen R_7 des R_8 in je einem ebenen Raume ${}_{I}R_5$, ${}_{II}R_5'$ (${}_{II}R_5$, ${}_{I}R_5'$) durchdringen.

Die radial-projective Geometrie als Verallgemeinerung der Euklidischen Geometrie.

Auf den geschilderten Thatsachen, die wir im nächsten Paragraphen noch wesentlich ergänzen werden, beruht es nun, dass die radial-projective (dual-projective) Geometrie in Parallele gestellt werden kann zur Euklidischen Geometrie, genauer zur Geometrie der Aehnlichkeitstransformationen (Bewegungen). Dass die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ angesehen werden kann als das *zweite Glied* einer unbegrenzten Folge von primitiven projectiven Gruppen, in der als *erstes Glied* die Gruppe $\mathfrak{g}_7$ der Aehnlichkeitstransformationen erscheint, ist nach dem Vorhergehenden selbstverständlich. Die Gruppen $\mathfrak{G}_{17}$ und G_{17} aber unterscheiden sich von einander nur durch die Wahl des Raumelementes, beide Gruppen werden durch Wechsel des Raumelementes zu einander ähnlich. Den ∞^2 Ebenen von besonderer Lage, die durch eine zu $\mathfrak{g}_7$ holoëdrisch isomorphe Gruppe g_7 vertauscht werden, können gegenübergestellt werden die $2 \cdot 2 \cdot \infty^4$ sechsfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, die durch eine zu $\mathfrak{G}_{17}$ holoëdrisch-isomorphe Gruppe vertauscht werden, also auch die Strahlen ersten oder zweiten Blattes. Beim Uebergang zum Strahl als Raumelement vereinfacht sich diese Beziehung noch etwas, da die Transformation (19) dann in Wegfall kommt. Wir haben also gesehen:

Die Geometrie der radialen Projectivitäten lässt sich derart in Parallele setzen zur Euklidischen Geometrie des Raumes, dass unter Anderen die folgenden Gebilde als Analoga aufgefasst werden:

Der eigentliche Punkt.	*Die aplanare Kettencongruenz.*
Eigentliche Ebene, die den absoluten Kegelschnitt berührt.	*Eigentlicher Strahl* (ersten *oder* zweiten Blattes).
Büschel solcher Ebenen.	Parallelenbündel.
Die Gruppe $\mathfrak{g}_7$ aller Aehnlichkeitstransformationen.	Die Gruppe G_{17} der radialen Collineationen (im ersten *oder* zweiten Blatte).
Die Gruppe $\mathfrak{g}_6$ der Euklidischen Bewegungen.	*Die Gruppe G_{16} der dualen Collineationen.*
Die Schaar der ∞^6 Umlegungen.	Die Schaar der ∞^{16} dualen Anticollineationen.
Die Gruppe $\mathfrak{g}_4$ der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen.	Die Gruppe G_9, die alle Parallelenbündel in Ruhe lässt.
Die Gruppe $\mathfrak{g}_3$ der gewöhnlichen Schiebungen.	Die Gruppe G_8 der dualen Schiebungen.
Die ∞^3 Spiegelungen an Punkten.	Die ∞^8 Spiegelungen an aplanaren Kettencongruenzen.

Natürlich haben solche Analogieen ihre Grenzen. Z. B. entsprechen dem einen Continuum der ∞^2 eigentlichen Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren, im Raume R_8 *zwei* getrennte Continua von ebenen Mannigfaltigkeiten R_6, R_6'. Auch wird es, bei dem Uebergang von der geringeren Dimensionenzahl zur höheren, nicht überraschen, wenn sich etwa zu einem und demselben Gebilde der Euklidischen Geometrie mehrere der Art nach ganz verschiedene Analoga finden sollten. In der That werden wir sehen, dass mit den ∞^2 eigentlichen Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren, nicht nur die ∞^4 eigentlichen Strahlen, sondern ebensowohl auch die ∞^4 Parallelenbüschel verglichen werden können. —

Auf die beschriebenen Analogieen und damit auf die principielle Bedeutung der radial-projectiven Geometrie lässt sich schliesslich noch von einer anderen Seite her Licht werfen.

Die aplanaren Kettencongruenzen, die mit ihren reciproken zusammenfallen, sind die ∞^3 Strahlenbündel mit eigentlichen Scheiteln, und die Coordinaten q_{ik} dieser Kettencongruenzen lassen sich linear ausdrücken durch die (nicht-homogenen) Cartesischen Coordinaten z_1, z_2, z_3 der zugehörigen Punkte des Euklidischen Raumes:

$$(21)\qquad \begin{array}{llll} q_{11} = 0, & q_{12} = z_3, & q_{13} = -z_2, \\ q_{21} = -z_3, & q_{22} = 0, & q_{23} = z_1, \\ q_{31} = z_2, & q_{32} = -z_1, & q_{33} = 0. \end{array}$$

(Vgl. § 28, Nr. 17.)

Deuten wir die Grössen q_{ik}, wie zuvor, als Cartesische Punktcoordinaten in R_8, so entsteht bei Beschränkung auf die angeführten Werthsysteme ein ebener R_3; es ergiebt sich also:

Hält man im Raume R_8 eine geeignete ebene dreifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit R_3 fest, so wird damit die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ auf eine siebengliedrige Gruppe reducirt, die holoëdrisch isomorph ist zur Gruppe $\mathfrak{g}_7$ der Aehnlichkeitstransformationen; und zwar werden die in R_3 selbst gelegenen Figuren durch eine projective Gruppe vertauscht, die zur Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen projectiv-ähnlich (collinear) ist.

Nichts hindert, den Raum R_3 mit dem Punktraum der Elementargeometrie, und die gefundene Gruppe mit der Gruppe $\mathfrak{g}_7$ selbst zu identificiren. Damit aber erweist sich die Geometrie der Aehnlichkeitstransformationen als ein Ausschnitt aus der Theorie der projectiven Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$. Die Thatsache, dass die Gruppe $\mathfrak{g}_7$ eine Untergruppe von G_{17} ist (vgl. S. 292), erscheint hiermit in einem neuen Lichte:

Es besteht zwischen der Euklidischen Geometrie und der dual-projectiven Geometrie ein ähnliches Verhältniss, wie zwischen der projectiven Geometrie in einer einfach-ausgedehnten und der projectiven Geometrie in einer zweifach-ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Es giebt sogar zwei wesentlich verschiedene Analoga zu dem eingeführten R_3 in der ebenen projectiven Geometrie. Man kann nämlich einmal in der Ebene einen irreducibelen Kegelschnitt festhalten, also eine *krumme* Curve: Damit reduciren sich die ∞^8 collinearen Transformationen der Ebene auf die ∞^3 unter ihnen, die diesen Kegelschnitt in Ruhe lassen. Die gefundene Gruppe ist *holoëdrisch* isomorph zur projectiven Gruppe eines binären Gebietes, als dessen Träger man den Kegelschnitt betrachten kann. Man kann zweitens eine gerade Linie (oder einen Punkt), also eine *ebene* Mannigfaltigkeit festhalten. Die dann entstehende sechsgliedrige Gruppe ist zwar *meroëdrisch* isomorph zur projectiven Gruppe des binären Gebietes auf der eingeführten Geraden, vertauscht aber deren Punkte eben durch diese Gruppe selbst.

Den Inhalt des vorliegenden Paragraphen rechnen wir zu den *wichtigsten* Ergebnissen unserer Untersuchung. Es wird dadurch den radialen Collineationen ein Platz innerhalb der von S. Lie geschaffenen Systematik der Transformationsgruppen angewiesen, und zwar an bevorzugter Stelle: Die radial-projective Geometrie kann aufgefasst werden als eine besonders einfache Interpretation der Geometrie einer ohnehin interessanten, nämlich *primitiven* Gruppe; einer Gruppe, von deren Theorie, nach dem Wenigen, was bis jetzt darüber bekannt war, nicht angenommen werden konnte, dass sie enge Beziehungen zur Geometrie im gewöhnlichen Raume, und zwar zur Elementargeometrie haben würde. Besonders scheint uns die Thatsache, dass der Begriff „aplanare Kettencongruenz" sich als eine (gruppentheoretisch-) *nothwendige* Erweiterung des einfachsten elementar-geometrischen Begriffs, des Begriffs „Punkt" erweist, von systematischer Bedeutung zu sein. Uebrigens können noch einige andere geometrisch-interessante Gruppen aus primitiven eines höheren Raumes durch Wechsel des Raumelementes abgeleitet werden.

Anhangsweise mag noch eines Problems gedacht werden, mit dem wir, bei der Fülle des Stoffs, uns sonst gar nicht haben befassen können. Die Frage nach allen möglichen continuirlichen Untergruppen von G_{17} ist nach dem Vorgetragenen von einer, wenn auch verwickelteren, so doch ähnlichen Natur wie die Frage nach den Untergruppen von $\mathfrak{g}_7$. Dass die Gruppen G_{16}, G_9, G_8 die einzigen *invarianten* continuirlichen Untergruppen von G_{17} sind, haben wir gelegentlich schon wiederholt erwähnt. Die Bestimmung der übrigen Untergruppen wird wesentlich dadurch erleichtert, dass die der allgemeinen projectiven Gruppe in der Ebene schon bekannt sind. Eine weitere Erleichterung ergiebt sich aus dem folgenden Satz, der den soeben angeführten umfasst, und, wie dieser, mit den von S. Lie geschaffenen Methoden begründet werden kann: „Jede continuirliche Untergruppe von G_{17},

die die Punktstrahlen in allgemeinster Weise vertauscht, ist entweder identisch mit der Gruppe G_{16}, oder mit einer der beiden Gruppen von neun und acht Parametern, die durch ein Paar reciproker aplanarer Kettencongruenzen definirt werden."

Man vergleiche hierzu: Lie und Engel, Theorie der Transformationsgruppen, insbes. Bd. III, Kap. 11.

§ 34.

Das Parallelenbüschel als Raumelement. Reciproke Figuren.

Die einfachste von eigentlichen Strahlen gebildete Figur ist nächst dem einzelnen Strahl das Parallelenbüschel, das wie der Strahl selbst von nur vier Constanten abhängt. Es ist daher für unsere Theorie die Frage von principieller Bedeutung, ob es gelingt, auch dieses Gebilde in einfacher Weise durch Coordinaten darzustellen. Wir gehen auch auf diesen Gegenstand noch ein.

Es sei, im ersten Blatte des ersten natürlichen Continuums, ein eigentlicher Strahl $\mathfrak{X}$ gegeben durch seine Coordinaten zweiter Art $\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_{kk}$, und ein zu diesem paralleler Punktstrahl $\mathfrak{X}'$ durch seine Coordinaten $0, \mathfrak{X}'_{kk}$, so dass

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0, \\ &\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}'_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}'_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}'_{33} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Irgend ein eigentlicher Strahl des durch beide bestimmten Parallelenbüschels hat dann Coordinaten der Form

$$\mathfrak{X}_k, \quad \mathfrak{X}_{kk} + \lambda\mathfrak{X}'_{kk} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Der willkürliche Parameter λ wird entbehrlich, wenn man an Stelle des letzten Systems von drei Grössen die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{X}_{11} & \mathfrak{X}_{22} & \mathfrak{X}_{33} \\ \mathfrak{X}'_{11} & \mathfrak{X}'_{22} & \mathfrak{X}'_{33} \end{matrix} \right\|$$

setzt. Zufolge (1) unterscheiden sich aber diese Determinanten von den Grössen $\mathfrak{X}_k$ nur um einen Proportionalitätsfactor Ω (der auch gleich Null sein kann). Man kann daher statt dieser drei Determinanten auch die eine Grösse Ω einführen. Sind umgekehrt die Grössen $\Omega, \mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}'_{kk}$ gegeben, so sind dadurch die Grössen $\mathfrak{X}_{kk}$, die man zur Festlegung des Strahls $\mathfrak{X}$ kennen muss, bis auf ein willkürliches Vielfaches des Grössensystems $\mathfrak{X}'_{kk}$ bestimmt. Man ergänzt diese Bemerkungen leicht zu dem Satze:

Als Coordinaten eines Parallelenbüschels (im ersten Blatte des Strahlenraumes) können sieben Grössen

$$(3a) \qquad \Omega;\ \Xi_1,\ \Xi_2,\ \Xi_3,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$$

betrachtet werden, die durch die Gleichung

$$(4) \qquad (\Phi\,|\,\Xi) = \Phi_1\Xi_1 + \Phi_2\Xi_2 + \Phi_3\Xi_3 = 0$$

verbunden sind. Diese sind homogen in dem Sinne, dass Multiplication der Grössen Ξ_i, Ω mit demselben Factor, und ebenso Multiplication der Grössen Φ_i, Ω mit einem und demselben Factor das dargestellte Parallelenbüschel nicht ändert. Weder die Grössen Ξ_i noch die Grössen Φ_i dürfen gleichzeitig verschwinden, wenn umgekehrt ein gegebenes System von Coordinaten $(\Omega;\ \Xi,\ \Phi)$ ein (eigentliche Strahlen enthaltendes) Parallelenbüschel darstellen soll.

Ist das Parallelenbüschel, wie soeben, bestimmt durch einen eigentlichen Strahl $\mathfrak{X}$ und einen zu diesem parallelen Punktstrahl $\mathfrak{X}'$, so sind zulässige Coordinaten des Büschels diese:

$$(5) \qquad \begin{array}{llll} \Xi_1 = \mathfrak{X}_1\,, & \Xi_2 = \mathfrak{X}_2\,, & \Xi_3 = \mathfrak{X}_3\,, & \Omega = \dfrac{(\mathfrak{X}\underline{\mathfrak{X}}'\mathfrak{B})}{(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})}; \\ \Phi_1 = \mathfrak{X}'_{11}, & \Phi_2 = \mathfrak{X}'_{22}, & \Phi_3 = \mathfrak{X}'_{33}, & \end{array}$$

$\mathfrak{B}_1 : \mathfrak{B}_2 : \mathfrak{B}_3$ sind Hülfsgrössen, die, übrigens beliebig, so gewählt sind, dass $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) \neq 0$ ausfällt.

Die Bedingung dafür, dass ein Parallelenbüschel $(\Omega;\ \Xi,\ \Phi)$ einen eigentlichen oder Punktstrahl $\mathfrak{X}$ enthält, ist also:

$$(6) \qquad (\mathfrak{X}\Xi\mathfrak{Y}) = 0, \quad (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})^2 \cdot \Omega - (\mathfrak{B}\,|\,\Xi)(\underline{\mathfrak{X}}\,\Phi\,\mathfrak{B}) = 0.$$

Parallelenbüschel desselben Bündels stimmen in den Coordinatenverhältnissen $\Xi_1 : \Xi_2 : \Xi_3$ überein. Sind zwei solche Büschel überdies *parallel*, d. h. haben sie einen Punktstrahl mit einander gemein, so sind ausserdem auch die Coordinatenverhältnisse $\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$ dieselben. Man kann dann die sechs letzten Coordinaten zur völligen Uebereinstimmung bringen:

Variirt man allein die erste Ω der Parallelbüschelcoordinaten, so verschiebt sich das Büschel parallel zu sich selbst, und es entsteht ein gestreiftes Parallelenbündel (s. S. 267).

Ferner ergiebt sich unmittelbar:

Hält man die Verhältnisse der drei letzten Φ_1, Φ_2, Φ_3 *unter den Parallelbüschelcoordinaten fest, so enstehen die* ∞^2 *Büschel (eines planaren Strahlencomplexes), die denselben Punktstrahl (den singulären Strahl des genannten Complexes) enthalten.*

Wir nennen diese Figur ein *Netz* von Parallelenbüscheln.

Da Parallelenbüschel, die zu den beiden verschiedenen Blättern des Strahlencontinuums gehören, von den radialen Collineationen in verschiedener Weise, nämlich *discordant*, vertauscht werden, so müssen wir, neben der Bezeichnung (3a), die sich auf Büschel des ersten Blattes bezieht, noch eine andere Bezeichnung der Parallelbüschelcoordinaten benutzen, die zu den Büscheln des zweiten Blattes gehört:

$$(3b) \qquad \mathfrak{O};\ H_1, H_2, H_3,\ \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3.$$

Beide Arten von Büscheln sind in bestimmter Weise gepaart, oder, wie wir sagen, zu einander *reciprok*; irgend zwei Strahlen reciproker Büschel schneiden einander rechtwinklig (S. 298).

Die Parallelenbüschel $(\Omega; \Xi, \Phi)$ *und* $(\mathfrak{O}; H, \Psi)$ *sind zu einander reciprok, wenn*

$$(7) \qquad \Omega + \mathfrak{O} = 0, \quad \Xi_i = \Psi_i, \quad \Phi_i = H_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Allgemein ist die Bedingung der Reciprocität:

$$(7b) \qquad \Omega : \Xi_i \Phi_k : \Xi_i \Phi_m = -\mathfrak{O} : H_k \Psi_i : H_m \Psi_l.$$

Reciprok zu den Parallelenbüscheln eines Bündels sind die eines Netzes. Parallele Parallelenbüschel gehören zugleich einem Bündel und einem Netz an, und sind zu einer gleichartigen Figur reciprok.

Die Bedingung dafür, dass die Strahlen eines Parallelenbüschels $(\Omega; \Xi, \Phi)$ *einen eigentlichen oder Punktstrahl* $\mathfrak{U}$ *senkrecht schneiden, ist*

$$(8) \qquad (\mathfrak{U}\Phi\mathfrak{V}) = 0, \quad (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{V})^2 \cdot \Omega + (\Phi\,|\,\mathfrak{V})(\mathfrak{U}\Xi\mathfrak{V}) = 0.$$

Einfachste Aufgaben über Parallelenbüschel.

1) *Man soll den gemeinsamen Strahl zweier verschiedener Parallelenbüschel desselben Bündels finden.*

Die beiden Büschel seien

$$(\Omega_1; \Xi_1, \Phi_1), \quad (\Omega_2; \Xi_2, \Phi_2),$$

und es werde der einfacheren Darstellung wegen die unwesentliche Specialisirung $\Xi_1 = \Xi_2 = \Xi$ vorgenommen. Man kann dann auch noch

$\Xi = \mathfrak{X}$, d. h. $\Xi_k = \mathfrak{X}_k$ setzen, und erhält somit zur Bestimmung der Grössen $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$ die folgenden Gleichungen:

$$(\mathfrak{X}\,|\,\underline{\mathfrak{X}}) = 0; \quad \Omega_1(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) - (\underline{\mathfrak{X}}\,\Phi_1\,\mathfrak{B}) = 0; \quad \Omega_2(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) - (\underline{\mathfrak{X}}\,\Phi_2\,\mathfrak{B}) = 0.$$

Setzen wir vorübergehend $\widehat{\Phi_1}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{Y}$, $\widehat{\Phi_2}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{Y}'$, so entstehen hieraus die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_{33} = 0,\\
&\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{Y}_3\mathfrak{X}_{33} = \Omega_1 \cdot (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}).\\
&\mathfrak{Y}'_1\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{Y}'_2\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{Y}'_3\mathfrak{X}_{33} = \Omega_2 \cdot (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}).
\end{aligned}$$

Die Determinante $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')$ dieser drei linearen Gleichungen hat den Werth $(\Phi_1\Phi_2\mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})$. Ist also $(\Phi_1\Phi_2\mathfrak{B}) \neq 0$, so erhält man, unter $\mathfrak{Z}_1 : \mathfrak{Z}_2 : \mathfrak{Z}_3$ willkürliche Parameter verstehend, die Auflösung in der Form

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')(\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\mathfrak{Z}) = -\{\Omega_1(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}') - \Omega_2(\mathfrak{Z}\mathfrak{X}\mathfrak{Y})\}\,(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}),$$

oder — da $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) \neq 0$ — in der Form

$$\begin{aligned}
&(\Phi_1\Phi_2\mathfrak{B})(\underline{\mathfrak{X}}\,|\,\mathfrak{Z}) =\\
&= -(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}) \cdot \{\Omega_1(\Phi_2\,|\,\mathfrak{Z}) - \Omega_2(\Phi_1\,|\,\mathfrak{Z})\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Der Quotient $(\Phi_1\Phi_2\mathfrak{B}) : (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})$ ist eine von $\mathfrak{B}$ unabhängige Zahl, die nicht verschwinden kann, so lange die beiden Parallelenbüschel nicht parallel sind. Tritt der hiermit ausgeschlossene Fall $(\Phi_1\Phi_2\mathfrak{B}) = 0$ ein, so haben die Büschel statt eines eigentlichen Strahls den Punktstrahl

$$(0,\ \Omega_2\Phi_1 - \Omega_1\Phi_2)$$

gemein. Wird auch dieses System von drei Verhältnissgrössen unbestimmt, so sind die beiden Parallelenbüschel identisch.

2) *Man soll das Normalennetz von Strahlen finden, das durch zwei (nicht parallele) Parallelenbüschel desselben Netzes bestimmt ist.*

Diese Aufgabe lässt sich auf die vorhergehende zurückführen. Wir stellen die beiden Parallelenbüschel, die nach Voraussetzung denselben Punktstrahl enthalten, in der Form

$$(\Omega_1;\ \Xi_1,\ \Phi), \quad (\Omega_2;\ \Xi_2,\ \Phi)$$

dar, und setzen $\Phi_k = \mathfrak{U}_k$. Die reciproken Büschel haben dann den Strahl $\mathfrak{U}$ gemein, dessen Coordinaten die Grössen $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{U}_{kk}$ sind, wobei die Grössen $\mathfrak{U}_{kk}$ zu bestimmen bleiben. Diese Grössen erhalten nach Obigem endliche Werthe, wenn die beiden vorgelegten Büschel nicht parallel sind, d. h. wenn $(\Xi_1\Xi_2\mathfrak{Y}) \neq 0$. Die Auflösung ergiebt sich dann in der Form

$$(10)\qquad \begin{aligned}&(\Xi_1\,\Xi_2\,\mathfrak{Y})\,(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{W}) = \\ &= (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{Y})\,\{\Omega_1(\mathfrak{W}\,|\,\Xi_2) - \Omega_2(\mathfrak{W}\,|\,\Xi_1)\}\,.\end{aligned}$$

Der Quotient $(\Xi_1\,\Xi_2\,\mathfrak{Y}) : (\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{Y})$ ist eine von $\mathfrak{Y}$ unabhängige Zahl.

3) *Man soll die Bedingung dafür aufstellen, dass drei Parallelenbüschel* $(\Omega_k;\ \Xi,\ \Phi_k)$ *desselben Bündels einen gemeinsamen Strahl (eigentlichen oder Punktstrahl) enthalten.*

Die Lösung ergiebt sich leicht von dem unter 1) Gesagten:

$$(11)\qquad \Omega_1(\Phi_2\,\Phi_3\,\mathfrak{V}) + \Omega_2(\Phi_3\,\Phi_1\,\mathfrak{V}) + \Omega_3(\Phi_1\,\Phi_2\,\mathfrak{V}) = 0\,.$$

D. h., zwischen den drei Grössen Ω_k muss, nachdem die Ξ-Coordinaten der drei Büschel identificirt worden sind, dieselbe lineare Gleichung bestehen, die zufolge des Bestehens der Gleichungen $(\Phi_k\,|\,\Xi) = 0$ zwischen den drei linearen Formen $(\Phi_k\,|\,\mathfrak{Y})$ stattfindet. Ebenso ergiebt sich die Lösung der Aufgabe:

4) *Man soll die Bedingung dafür finden, dass drei Parallelenbüschel* $(\Omega_k,\ \Xi_k,\ \Phi)$ *desselben Netzes demselben Normalennetz (eines eigentlichen oder Punktstrahls) angehören:*

$$(12)\qquad \Omega_1(\Xi_2\,\Xi_3\,\mathfrak{Y}) + \Omega_2(\Xi_3\,\Xi_1\,\mathfrak{Y}) + \Omega_3(\Xi_1\,\Xi_2\,\mathfrak{Y}) = 0\,.$$

Natürlich kann man die Bedingungen (11), (12) auch leicht in allgemeinster Form aufstellen.

5) *Man soll die Ebene finden, in der ein reelles Parallelenbüschel* $(\Omega;\ \Xi,\ \Phi)$ *enthalten ist.*

Diese Aufgabe gehört nicht der radial-projectiven Geometrie, sondern der Euklidischen Geometrie an, soll aber darum nicht übergangen werden. Streicht man in der angegebenen Formulirung das Wort „reell", so hat die Aufgabe auch dann noch einen klaren Sinn, so lange $(\Xi\,|\,\Xi) \neq 0$ ist. Man findet unter dieser Voraussetzung, mit Hülfe der Gleichungen (16) des § 28, die homogenen Cartesischen Coordinaten der gesuchten Ebene:

$$(13)\qquad \begin{aligned}&u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \\ &= \Omega : \begin{vmatrix}\Xi_2 & \Xi_3\\ \Phi_2 & \Phi_3\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\Xi_3 & \Xi_1\\ \Phi_3 & \Phi_1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}\Xi_1 & \Xi_2\\ \Omega_1 & \Phi_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Die Transformation $\Omega' = k\Omega,\ \Xi' = \Xi,\ \Phi' = \Phi$, die jedes Parallelenbüschel parallel verschiebt, wird hiermit als perspective Aehnlichkeitstransformation erkannt.

Für den Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten von der gefundenen Ebene ergiebt sich der Ausdruck

$$(14) \qquad \text{dist}\,(u,\ o) = \frac{u_0}{\sqrt{u \mid u}} = \frac{\Omega}{\sqrt{\Xi \mid \Xi}\sqrt{\Phi \mid \Phi}}.$$

Abbildung der ∞^4 Parallelenbüschel auf Punkte eines vierdimensionalen Kegels $\mathfrak{M}_4$.

Deuten wir die Producte $\Xi_i \Phi_k$ von zweimal drei Grössen, die durch die Gleichung (4) verbunden sind, als überzählige homogene Punktcoordinaten eines Gebietes $\mathfrak{R}_7$ achter Stufe, so entstehen alle Punkte einer dreidimensionalen sogenannten *Normalmannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}_3$, von der sechsten Ordnung*), die eindeutig umkehrbar abgebildet ist auf die ∞^3 Linienelemente eines ternären Gebietes, von zwei Schaaren von je ∞^2 geraden Linien beschrieben wird, und eine zu sich selbst correlative Gruppe $(\bar{\mathfrak{g}}_8, \bar{\mathfrak{h}}_8)$ von Collineationen zulässt, die holoëdrisch isomorph ist zur Gruppe der Collineationen und Correlationen des ternären Gebietes. Fügen wir Ω als weitere Coordinate hinzu, so erkennen wir:

Die ∞^4 Parallenbüschel lassen sich eindeutig-umkehrbar und stetig zuordnen den vom Scheitel verschiedenen Punkten eines Normalkegels $\mathfrak{M}_4$, sechster Ordnung, der in einem Raume R_8 liegt, und dessen ∞^3 geradlinige Erzeugende eindeutig umkehrbar den Linienelementen in der unendlich fernen Ebene, oder den gestreiften Parallelenbündeln zugeordnet sind.

Punkten irgend einer Erzeugenden entsprechen also parallele Parallelenbüschel. Punkten irgend einer von ∞^2 den Kegel erzeugenden Ebenen einer ersten Schaar entsprechen die Parallelenbüschel eines Bündels, Punkten irgend einer Ebene einer zweiten Schaar ebenso Parallelenbüschel desselben Netzes, und umgekehrt.

Es hat natürlich keine Schwierigkeit, die Gruppe aller collinearen Transformationen des R_8 zu bestimmen, die den Kegel $\mathfrak{M}_4$ in Ruhe lassen:

Der Normalkegel $\mathfrak{M}_4$ gestattet eine sogenannte gemischte projective Gruppe $(\bar{\mathfrak{G}}_{17}, \bar{\mathfrak{H}}_{17})$ mit siebzehn Parametern, deren continuirliche Untergruppe $\bar{\mathfrak{G}}_{17}$ durch die bezeichnete Abbildung aus der Gruppe G_{17} der radialen Collineationen hervorgeht.

Die letzte Behauptung werden wir weiterhin noch genauer fassen und auf verschiedene Arten begründen. Einstweilen führen wir sie

*) Diese Zahl, die zu kennen hier übrigens nicht unerlässlich ist, lässt sich ableiten mit Hülfe des Bézout'schen Satzes über ebene Curven 3. O.

ohne Beweis an, um den innezuhaltenden Gedankengang besser kenntlich zu machen. — Nehmen wir sie vorläufig als richtig an, so können wir sogleich eine wichtige Folgerung ziehen.

Die vom Scheitel verschiedenen Punkte von $\mathfrak{M}_4$ werden nämlich zu einem abgeschlossenen Continuum ergänzt, wenn man den Scheitel selbst hinzufügt. Es besteht also die Möglichkeit, auch die Mannigfaltigkeit der ∞^4 Parallelenbüschel dadurch zu einem abgeschlossenen Continuum zu ergänzen, dass man *ein „uneigentliches"*, oder besser *„singuläres" Parallelenbüschel* den bereits definirten (nunmehr *„eigentlichen"*) Parallelenbüscheln hinzufügt. Diese neue Art von „Parallelenbüschel" wird dann natürlich durch Systeme von Coordinaten dargestellt, die wir bisher ausgeschlossen hatten, nämlich durch jedes beliebige System von Coordinaten $(\Omega;\ \Xi,\ \Phi)$, das den Bedingungen $\Omega \neq 0$, $\Xi_i\, \Phi_k = 0$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ genügt. Da das hiermit erklärte Continuum eindeutig-umkehrbar und stetig auf eine Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ mit projectiver zu G_{17} isomorpher continuirlicher Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ abbildbar ist, so wollen wir es ein (zur Gruppe G_{17} gehöriges) „natürliches" Continuum nennen; und wir bezeichnen es insbesondere als *das erste natürliche Continuum von Parallelenbüscheln*, da wir weiterhin noch andere im gleichen Sinne „natürliche" Continua zu betrachten haben werden.

In dem erklärten Continuum verlaufen analytische Mannigfaltigkeiten von ∞^1, ∞^2 und ∞^3 Parallelenbüscheln, die wir *Bänder*, *Congruenzen* und *Complexe von Parallelenbüscheln* nennen. Diese Figuren werden in dem Raume $\mathfrak{M}_4$ abgebildet als analytische Curven, Flächen und dreidimensionale Räume.

Es ist klar, dass das Studium aller dieser Mannigfaltigkeiten und ihrer auf $\mathfrak{M}_4$ gelegenen Bilder zu umfangreichen Erörterungen Anlass geben muss, ähnlich denen, deren einige wir in Bezug auf Mannigfaltigkeiten von Strahlen und deren Bilder auf der früher betrachteten Mannigfaltigkeit M_4 durchgeführt haben. Man kann z. B. einen Begriff der Abhängigkeit von Parallelenbüscheln erklären, ähnlich dem der Abhängigkeit von Strahlen (S. 351), und kann daraus entsprechende Folgerungen ziehen. Wir haben aber leider nicht Raum zu einer eingehenden Behandlung dieses Gegenstandes: Wir werden uns auf einige Sätze beschränken, die wir weiterhin brauchen, und im übrigen werden wir nur solche *Beispiele* behandeln, die zu unserer Theorie der Ketten in Beziehung stehen. Nur um auf die schon behandelten Fragen noch von einer anderen Seite her Licht zu werfen, betrachten wir überhaupt die Figur des Parallelenbüschels.

Zunächst heben wir den folgenden grundlegenden, aber leicht zu beweisenden Satz hervor:

*Im ersten natürlichen Continuum von Parallelenbüscheln kann jeder algebraische Complex solcher Figuren dadurch rein dargestellt werden, dass man eine ganze rationale und im erklärten Sinne homogene Function der Coordinaten Ω, Ξ_i, Φ_k gleich Null setzt**).

Jeder solche Complex kann daher, im Wesentlichen auf eine einzige Weise, dargestellt werden durch die Verbindung der Gleichung $(\Phi\ \Xi) = 0$ mit einer Gleichung der folgenden besonderen Form:

$$\begin{aligned}(15)\qquad &\Omega^l \cdot (\mathfrak{A}_0 \,|\, \Xi)^m (\Phi \,|\, \mathfrak{P}_0)^n + \Omega^{l-1} \cdot (\mathfrak{A}_1 \,|\, \Xi)^{m+1} (\Phi \,|\, \mathfrak{P}_1)^{n+1} + \cdots \\ &\cdots + \Omega^0 \cdot (\mathfrak{A}_l \,|\, \Xi)^{m+l} (\Phi \,|\, \mathfrak{P}_l)^{n+l} = 0.\end{aligned}$$

Hier bedeutet der Coefficient irgend einer Potenz von Ω eine ternäre Normalform: $(\mathfrak{A}_k \,|\, \mathfrak{P}_k)(\mathfrak{A}_k\ \Xi)^{m+k-1} (\Phi \,|\, \mathfrak{P}_k)^{n+k-1} = 0$. Alle zu denselben Zahlen l, m, n gehörigen Complexe bilden, wie wir sagen wollen, ein *lineares*, und zwar, wie sich weiterhin ergeben wird, gegenüber Transformationen von G_{17} *invariantes* System von Complexen. Die um die Einheit vermehrte Constantenzahl dieses Systems ist

$$\begin{aligned}N_{l,m,n} &= \sum_0^l{}_k \tfrac{1}{2}(m+k+1)(n+k+1)(m+n+2k+2) = \\ (15)\qquad &= \binom{m+l+2}{2}\binom{n+l+2}{2} - \binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2} = \\ &= \tfrac{1}{4}(l+1)(m+n+l+2)\left\{\begin{matrix}(m+1)(n+l+1)+ \\ +\,l(l+1)+ \\ +\,(n+1)(m+l+1)\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

Ist $m = n$, so ist das Bild des Complexes (15) auf $\mathfrak{M}_4$ ein vollständiger Durchschnitt, und umgekehrt. Ist $l = 0$, so lassen sich die ∞^3 Parallelenbüschel des Complexes zu ∞^2 Schaaren von parallelen Büscheln anordnen, und umgekehrt. Solche Complexe nennen wir *singulär*, die übrigen *regulär*.

Ist $l = 1$, $m = n = 0$, so nennen wir den Complex *regulär-bilinear*. Das Continuum der ∞^8 bilinearen Complexe wird abgeschlossen, wenn man die der Annahme $l = 0$, $m = n = 1$, entsprechenden ∞^7 „singulären bilinearen" Complexe hinzufügt. Die Theorie dieser letzten

---

*) Man vergleiche den analogen auf das erste Strahlencontinuum bezüglichen Satz S. 274.

Art von speciellen Complexen ist offenbar zu einem grossen Theil in der bekannten Theorie der bilinearen Normalformen, oder der ebenen Connexe (1, 1) enthalten. — Wir gehen nur auf die regulären bilinearen Complexe etwas näher ein. (S. S. 420).

Reciproke Figuren in der radial-projectiven Geometrie.

Betrachtet man das Parallelenbüschel als Raumelement, so erscheinen die Reciprocitätsbeziehungen, die uns wiederholt begegnet sind, in reinster Form. Jeder beliebige Ort eigentlicher Strahlen lässt sich auf die eine oder andere Weise als Ort von Parallelenbüscheln auffassen, und die so erklärten Figuren gehören unter *allen* Umständen paarweise als *reciprok* zusammen, ebenso wie die Parallelenbüschel selbst. Reciproke analytische Oerter von Parallelenbüscheln haben selbstverständlich stets die nämliche Dimensionenzahl, während die entsprechenden Strahlenörter verschiedene Dimensionenzahlen haben können. Es ergiebt sich aber auch eine ganz neue Art von Figuren: Die in einem Complex von Parallelenbüscheln enthaltenen Strahlen werden nur unter besonderen Umständen *nicht* den ganzen Strahlenraum erfüllen.

Die Fülle von interessanten Problemen, die hier entstehen, können wir kaum streifen: Wir beschränken uns auf einige wenige summarische Bemerkungen über die Darstellung von Strahlenörtern, die zur Vorbereitung der folgenden speciellen Betrachtungen dienen sollen.

Ein von einem Parallelenbüschel verschiedenes analytisches *Strahlenband*, Ort von ∞^1 *eigentlichen* Strahlen, ist entweder Cylinder (S. 300) oder nicht. Im ersten Falle kann das Band als Enveloppe eines „*Bandes*“ von ∞^1 Parallelenbüscheln aufgefasst werden, denen ∞^2 andere reciprok sind. Die letzten definiren im Strahlenraume eine *cylindrische Congruenz*. (Vgl. S. 305.) Im zweiten und allgemeinen Falle kann das Strahlenband betrachtet werden als Congruenz, als Ort von ∞^2 Parallelenbüscheln, deren jedes einzelne (mindestens) einen seiner Strahlen enthält. Die ∞^2 reciproken Büschel definiren einen zum Band „*reciproken*“ Strahlencomplex, Ort der durch die Strahlen des Bandes (ersten Blattes) definirten Normalennetze (zweiten Blattes).

Die eigentlichen Strahlen einer von einem Parallelenbündel verschiedenen analytischen *Strahlencongruenz* lassen sich entweder zu einem Band von ∞^1 Parallelenbüscheln zusammenfassen, oder zu ∞^1 Cylindern, die nicht Parallelenbüschel sind, oder endlich, es tritt keine dieser beiden Besonderheiten ein.

Im ersten Falle gehört dazu ein zweites Band von ∞^1 Parallelen-

büscheln, die im Allgemeinen wieder eine solche Strahlencongruenz, *reciprok* der ersten, definiren. Wenn aber die vorgelegte Congruenz cylindrisch ist, so reducirt sich die zweite Strahlencongruenz auf ein Parallelenbündel.

Im zweiten Falle kann man nach dem über die Cylinder Gesagten der Strahlencongruenz eine Congruenz von ∞^2 Parallelenbüscheln zuordnen. Die Strahlen der ∞^2 reciproken Büschel sind orthogonal zu consecutiven parallelen Strahlen der gegebenen Strahlencongruenz. Sie definiren einen Strahlencomplex von besonderer Beschaffenheit.

Im dritten Falle definirt die Strahlencongruenz einen (sehr speciellen) Complex von ∞^3 Parallelenbüscheln, deren jedes (mindestens) einen ihrer Strahlen enthält. Dieser Complex, und ebenso sein reciproker, erfüllt den ganzen Strahlenraum (oder einen vierfach ausgedehnten Theil davon).

Die eigentlichen Strahlen eines analytischen *Strahlencomplexes* lassen sich entweder auf ∞^1 Parallelenbündel, oder auf ∞^2 Parallelenbüschel, oder auf ∞^2 Cylinder vertheilen, die nicht Parallelenbüschel sind. Die Complexe der ersten Art sind zugleich Complexe von Parallelenbüscheln, die zu je ∞^2 auf ∞^1 Bündel vertheilt sind. Die reciproken Complexe erfüllen den ganzen Strahlenraum; ihre Büschel sind zu ∞^2 auf ∞^1 Netze vertheilt. Die Complexe der zweiten Art sind Congruenzen von Parallelenbüscheln. Die reciproke Congruenz von Parallelelenbüscheln definirt in solchem Falle einen neuen Strahlencomplex, der zu dem ersten *reciprok* ist, ihn auf gleiche Weise bestimmt, wenn er nicht ein Strahlencomplex der zuerst genannten Familie ist, wenn also seine Strahlen nicht zu Bündeln angeordnet werden können. Im dritten Falle lassen sich die ∞^2 Complexcylinder als Enveloppen von Bändern von Parallelenbüscheln auffassen; man erhält wiederum einen mit dem Strahlencomplex invariant verbundenen Complex von Parallelenbüscheln. Die reciproken Parallelenbüschel erfüllen wiederum den ganzen Strahlenraum.

Betrachten wir jetzt umgekehrt Bänder, Congruenzen und Complexe von Parallelenbüscheln als die gegebenen Figuren.

Zwei reciproke analytische *Bänder* von Parallelenbüscheln definiren zwei Strahlencongruenzen. Diese sind entweder beide Parallelenbündel; oder es ist die eine ein Parallelenbündel, und die andere cylindrisch, oder ein Normalennetz eines eigentlichen Strahls, oder endlich, wenn keiner dieser Fälle eintritt, beide Congruenzen sind zu einander *reciprok*: Jede kann dann erklärt werden als Ort der Parallelenbüschel, die zu denen der anderen Strahlencongruenz reciprok sind.

Ist von zwei reciproken analytischen *Congruenzen* von Parallelen-

büscheln die eine ein Bündel und die andere das zugehörige Netz, so definirt die erste ein Bündel paralleler Strahlen, die zweite einen planaren Complex (im anderen Blatt).

Lassen sich die Büschel der einen Congruenz auf ∞^1 Bündel und die der anderen auf ∞^1 Netze vertheilen, so umhüllen je ∞^1 zusammengehörige Büschel der ersten Congruenz einen Cylinder, und diese Cylinder erfüllen eine zu der Congruenz von Parallelenbüscheln gehörige Strahlencongruenz; oder es umhüllen je ∞^1 zusammengehörige Büschel der ersten Congruenz einen einzelnen Strahl (oder deren mehrere), und die Congruenz gehört zu einem Strahlenband. Die reciproke Congruenz gehört in beiden Fällen zu einem Strahlencomplex (s. oben).

Sind die Büschel der ersten Congruenz auf ∞^2 Bündel und also die der reciproken auf ∞^2 Netze vertheilt, so hat man entweder den Fall vor sich, der zu dem zuvor behandelten reciprok ist, oder es lassen sich auch die Büschel der ersten Congruenz auf ∞^2 Netze, und also die der zweiten auf ∞^2 Bündel vertheilen. Die Punktstrahlen der reciproken Büschel beider Congruenzen definiren dann eine Transformation im Feld aller Punktstrahlen. Beide Congruenzen definiren reciproke Strahlencomplexe von besonderer Beschaffenheit (s. oben).

Lassen sich von zwei reciproken analytischen *Complexen* von Parallelenbüscheln die des einen auf ∞^1 Bündel und also die des anderen auf ∞^1 Netze vertheilen, so gehört zu dem ersten ein von Parallelenbündeln beschriebener Strahlencomplex (s. oben). Im anderen Falle kann es eintreten, dass die ∞^3 Büschel beider Complexe sich auf ∞^2 Bänder paralleler Parallelenbüschel vertheilen lassen, so dass von *beiden* Complexen der ganze Strahlenraum (oder ein Theil davon) erfüllt wird. Die genannten drei Fälle haben das Gemeinsame, dass die Gleichungen der Complexe frei sind von der Veränderlichen $\Omega(\mathfrak{v})$, und alle Transformationen der Gruppe G_9 zulassen. Wir wollen, wie bereits gesagt, diese besonderen Complexe von Parallelenbüscheln als *singulär*, die übrigen als *regulär* bezeichnen. (S. 409.) Bei einem jeden regulären Complex umhüllen dann die in einem Bündel gelegenen Büschel beider reciproker Complexe entweder die Cylinder eines Strahlencomplexes, oder die Strahlen einer Strahlencongruenz (s. oben).

Die eingeführte neue Art von geometrischen Oertern steht also zu den sonst von uns betrachteten Figuren in einer principiell sehr einfachen Beziehung:

Mit jeder analytischen Strahlencongruenz, deren Strahlen nicht auf Cylinder vertheilt werden können, und mit jedem analytischen Strahlencomplex, dessen Strahlen nicht auf Parallelenbüschel vertheilt werden

können, ist ein regulärer Complex von Parallelenbüscheln invariant verbunden. Die Strahlencongruenz oder der Strahlencomplex kann als Umhüllungsgebilde des Complexes von Parallelenbüscheln aufgefasst werden.

Umgekehrt definirt jeder reguläre analytische Complex von Parallelenbüscheln einen Strahlencomplex oder eine Strahlencongruenz. Das Gleiche gilt von dem reciproken Complex von Parallelenbüscheln: Auch dieser ist regulär. Die genannten von ∞^2 oder ∞^3 Strahlen gebildeten Figuren sind also paarweise reciprok.

Ferner erkennt man ohne Mühe:

Stehen eine analytische Strahlencongruenz und ein Strahlencomplex in der genannten Reciprocitätsbeziehung, so wird der Complex von den gemeinsamen Normalen zwischen consecutiven Congruenzstrahlen allgemeiner Lage und von deren Grenzlagen gebildet.

Man vergleiche hierzu den auf S. 384 angeführten Hamilton'schen Satz.

Für unseren besonderen Gegenstand kommt der noch speciellere Fall in Betracht, wo man statt des zur Congruenz reciproken Complexes ebenfalls eine Congruenz erhält. Man folgert aus früher Gesagtem unmittelbar den ersten Theil des Satzes:

Stehen zwei analytische Strahlencongruenzen in der genannten Reciprocitätsbeziehung, sind sie also Umhüllungsgebilde reciproker Complexe von Parallelenbüscheln, so sind sie reciproke aplanare Kettencongruenzen. Die zugehörigen Complexe von Parallelenbüscheln aber sind reguläre bilineare Complexe. (S. 409.)

Der zweite Theil der Behauptung wird alsbald nachgewiesen werden.

Es versteht sich, dass die vorausgehenden Betrachtungen sich auf eine Umgebung solcher Stellen der betrachteten geometrischen Oerter beziehen, in denen diese sich regulär verhalten; es ist natürlich nicht ausgeschlossen, und ist sogar die Regel, dass z. B. einem irreducibelen algebraischen Ort von Strahlen, wenn man ihn von vorn herein in seiner ganzen Erstreckung betrachtet, ein reducibeler Ort von Parallelenbüscheln zugeordnet wird.

Einfachste Mannigfaltigkeiten von Parallelenbüscheln.

Das zuvor über die Abbildung des Parallelbüschelcontinuums auf den Normalkegel $\mathfrak{M}_4$ Gesagte kann so vervollständigt werden:

∞^2 eigentliche Parallelenbüschel eines Bündels (∞^2).	∞^2 „eigentliche“ (vom Scheitel verschiedene) Punkte einer Ebene erster Art auf dem Kegel $\mathfrak{M}_4$ (∞^2).
∞^2 eigentliche Parallelenbüschel eines Netzes (∞^2).	∞^2 eigentliche Punkte einer Ebene zweiter Art auf dem Kegel $\mathfrak{M}_4$ (∞^2).
∞^1 parallele eigentliche Parallelenbüschel (∞^3).	∞^1 eigentliche Punkte einer Erzeugenden von $\mathfrak{M}_4$ (∞^3).

Die genannten drei Arten, Parallelenbüschel zusammenzufassen, bezeichnen alle *Systeme der Imprimitivität* in dem den Transformationen von G_{17} unterworfenen Parallelbüschelcontinuum.

∞^1 Parallelenbüschel durch denselben eigentlichen Strahl (∞^4).	∞^1 Punkte einer Geraden allgemeiner Lage auf einer Ebene erster Art (∞^4).
∞^1 Parallelenbüschel eines eigentlichen Normalennetzes (∞^4).	∞^1 Punkte einer Geraden allgemeiner Lage auf einer Ebene zweiter Art (∞^4).

Die Geraden specieller Lage auf $\mathfrak{M}_4$ sind die bereits genannten ∞^3 Geraden durch den Scheitel, die zu Bildern im Strahlenraume die ∞^3 Bänder paralleler Parallelenbüschel haben, und sowohl auf Ebenen erster Art als auch auf Ebenen zweiter Art liegen.

Ueberdecken wir $\mathfrak{M}_4$ mit zwei Blättern *I*, *II*, und unterscheiden wir die Geraden auf Ebenen zweiter Art von denen auf Ebenen erster Art durch einen Accent, so lässt sich die letzte Gegenüberstellung so fassen:

Eigentlicher Strahl $\mathfrak{X}$ im ersten Blatt.	Gerade ${}_I\mathfrak{R}_1$ im Blatte *I*. Gerade ${}_{II}\mathfrak{R}_1'$ im Blatte *II*.
Eigentlicher Strahl $\mathfrak{U}$ im zweiten Blatt.	Gerade ${}_I\mathfrak{R}_1'$ im Blatte *I*. Gerade ${}_{II}\mathfrak{R}_1$ im Blatte *II*.

Die hiermit gefundene Beziehung der Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ zu Geraden $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1'$ von specieller Lage im ebenen Raume $\mathfrak{R}_8$ ist vollkommen analog zu der Beziehung derselben Strahlen zu sechsfach ausgedehnten Räumen R_6, R_6' eines Raumes R_8, die wir im vorigen Paragraphen erörtert hatten (s. insbesondere S. 398). Und es ist auch nicht schwer, den Grund dieser Beziehung einzusehen. Es wird nämlich in R_8 der unendlich ferne R_7, dessen Punkte als Bilder der infinitesimalen Collineationen einer Ebene betrachtet werden können, von $(\mathfrak{G}_{17}, \mathfrak{H}_{17})$ derart transformirt, dass eine Normalmannigfaltigkeit M_3 in Ruhe bleibt, und $(\mathfrak{G}_{17}, \mathfrak{H}_{17})$ ist durch diese Eigenschaft definirt. Da die

achtgliedrige Gruppe von M_3, wie man sich unschwer überzeugt, zu sich selbst correlativ ist, so folgt:

Die projective Gruppe $(\mathfrak{G}_{17}, \mathfrak{H}_{17})$ *eines Raumes* $\mathfrak{R}_8$, *die durch Einführung der aplanaren Kettencongruenz als Raumelement definirt wurde, ist correlativ zu der Gruppe* $(\mathfrak{G}_{17}, \bar{\mathfrak{H}}_{17})$ *des Normalkegels* $\mathfrak{M}_4$, *dessen Punkte nach Obigem eindeutig umkehrbar den Parallelenbüscheln des ersten Continuums entsprechen.*

Die hervorgehobene Analogie ist eine besondere Folge dieser wichtigen Thatsache: Durch die fragliche Correlation werden nothwendig die $2 \cdot \infty^4$ Räume R_8, R_6' den $2 \cdot \infty^4$ Geraden $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_1'$ zugeordnet. Es ergeben sich nun aber sogleich noch mehrere bemerkenswerthe Folgerungen. Den Punkten des Normalkegels $\mathfrak{M}_4$ des $\mathfrak{R}_8$ müssen im Raume R_8 ∞^4 Räume R_7 entsprechen, und diese Mannigfaltigkeit muss ebenfalls, durch unmittelbare Zuordnung ihrer Elemente zu den Parallelenbüscheln, zum Uebergang aus dem R_8 in den Strahlenraum benutzt werden können. Ferner folgt, dass die ebenen $\mathfrak{R}_7$ in $\mathfrak{R}_8$, die den Scheitel von $\mathfrak{M}_4$ nicht enthalten, übergehen in die eigentlichen Punkte von R_8. Das heisst aber, dass die regulären bilinearen Complexe von Parallelenbüscheln (S. 409) identisch sein müssen mit den Complexen, die zu aplanaren Kettencongruenzen gehören. (S. 413.)

Wir werden diese Schlüsse durch wirkliche Ausführung der nöthigen Rechnungen bestätigen, und werden auch den zuletzt hervorgehobenen Satz noch präciser fassen. Zunächst fahren wir fort in der Betrachtung specieller Schaaren von Parallelenbüscheln und ihrer Bilder auf $\mathfrak{M}_4$.

Der planare Strahlencomplex.

Der planare Strahlencomplex $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}) = 0$ ist Ort von ∞^1 Parallelenbündeln, und daher nicht Congruenz, sondern Complex von Parallelenbüscheln

$$(\mathfrak{A} \mid \Xi) = 0. \tag{17}$$

Der reciproke Complex (zweiten Blattes) von Parallelenbüscheln

$$(\mathfrak{A} \mid \Psi) = 0 \tag{18}$$

umfasst den ganzen Strahlenraum, und unendlich oft noch die Strahlen des Parallelenbündels

$$\mathfrak{U}_1 : \mathfrak{U}_2 : \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3. \tag{19}$$

Die Untergruppe von $\bar{\mathfrak{G}}_{17}$, deren Transformationen den Complex (17) des Blattes I in Ruhe lassen, ist identisch mit der Untergruppe,

deren Transformationen die Ebene (19) *zweiter* Art des Blattes I in Ruhe lassen.

Bringt man die Gleichungen (17), (18) auf die Form $\Xi_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$, so erkennt man unschwer die Richtigkeit der folgenden Zusammenstellung (vgl. S. 337, 349):

Complex von Parallelenbüscheln, die einen planaren Strahlencomplex (des ersten Blattes) erfüllen.	Normalkegel dritter Ordnung $\mathfrak{M}_3'$ eines ebenen $\mathfrak{R}_5$, dessen Leitebene eine Ebene *zweiter* Art von $\mathfrak{M}_4$ ist (gelegen im Blatt I).
Der reciproke Complex (des zweiten Blattes).	Normalkegel $\mathfrak{M}_3$ dritter Ordnung (des Blattes II), dessen Leitebene eine Ebene *erster* Art von $\mathfrak{M}_4$ ist.

Natürlich sind die ∞^1 weiteren Ebenen von $\mathfrak{M}_3'$ ($\mathfrak{M}_3$) Ebenen erster (zweiter) Art von $\mathfrak{M}_4$.

Irgend zwei Kegel $\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_3'$ (desselben Blattes), deren es je ∞^2 giebt, bilden zusammen einen vollständigen Durchschnitt von $\mathfrak{M}_4$.

In § 31 hatten wir gefunden, dass die ∞^3 *Strahlen* eines planaren Complexes den Punkten eines Normalkegels 3. Ordnung eines ebenen R_5 eindeutig-umkehrbar und stetig zugeordnet werden können. Vergleicht man dieses Ergebniss mit dem soeben erhaltenen, so gelangt man zu einer sehr merkwürdigen Folgerung, deren Begründung im Einzelnen wir übrigens dem Leser überlassen müssen.

Die Strahlen eines jeden planaren Complexes (im ersten natürlichen Strahlencontinuum) lassen sich eindeutig umkehrbar und durchaus stetig den im Complex enthaltenen Parallelenbüscheln des ersten Continuums zuordnen. Die zwölfgliedrige Gruppe von radial-collinearen Vertauschungen der Strahlen oder Parallelenbüschel des Complexes wird dadurch isomorph auf sie selbst bezogen.

Dabei entsprechen einander u. A. folgende Gebilde:

Der singuläre Punktstrahl des Complexes.	Das singuläre Parallelenbüschel.
Die ∞^2 Punktstrahlen.	Das im Complex enthaltene Netz von Parallelenbüscheln.
Die ∞^2 Punktketten allgemeiner Lage.	Die ∞^2 Normalennetze eigentlicher Strahlen im Complex, aufgefasst als Bänder von Parallelenbüscheln.

Die ∞^1 Punktketten durch den singulären Punktstrahl.	Die durch den singulären Punktstrahl definirten ∞^1 Bänder paralleler Parallelenbüschel. (Gestreifte Bündel.)
Die ∞^2 Parallelenbüschel, die den singulären Punktstrahl enthalten.	Die ∞^2 Bänder paralleler Parallelenbüschel im Complex oder die ∞^2 gestreiften Parallelenbündel des Complexes.
Die ∞^3 Parallelenbüschel allgemeiner Lage im Complex.	Die ∞^3 eigentlichen Complexstrahlen, aufgefasst als Bänder von Parallelenbüscheln.

Die besprochene Beziehung ist also wechselseitig: Ordnet man zwei verschiedene planare Complexe einander zu, so entsprechen den Strahlen des ersten Complexes die Parallelenbüschel des zweiten, und den Parallelenbüscheln des ersten die Strahlen des zweiten Complexes.

Einem eigentlichen Strahl und einem hindurchgehenden Parallelenbüschel werden zugeordnet ein eigentliches Parallelenbüschel und ein darauf gelegener Strahl.

Wegen des bewirkten Isomorphismus der beiden zwölfgliedrigen Gruppen giebt es ∞^{12} Abbildungen der bezeichneten Art. Eine von ihnen, die den Complex $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\Xi_1 = 0$ überführt in denselben Complex $\Xi_1' = 0$, $\mathfrak{X}_1' = 0$, findet ihren analytischen Ausdruck in den Formeln:

(20)

$$\left\{\begin{array}{lll} \Omega' = \mathfrak{X}_{11}, & \Xi_3'\Phi_1' = \mathfrak{X}_{22}, & -\Xi_2'\Phi_1' = \mathfrak{X}_{33}, \\ -\Xi_2'\Phi_3' = \mathfrak{X}_2^2, & \Xi_2'\Phi_2' = -\Xi_3'\Phi_3' = \mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3, & \Xi_3'\Phi_2' = \mathfrak{X}_3^2; \\ \mathfrak{X}_{11}' = \Omega\ , & \mathfrak{X}_{22}' = -\Xi_3\Phi_1, & \mathfrak{X}_{33}' = \Xi_2\Phi_1, \\ \mathfrak{X}_2'^2 = -\Xi_2\Phi_3, & \mathfrak{X}_2'\mathfrak{X}_3' = \Xi_2\Phi_2 = -\Xi_3\Phi_3, & \mathfrak{X}_3'^2 = \Xi_3\Phi_2. \end{array}\right.$$

Durch die erörterte Abbildung werden einander ferner u. A. zugeordnet:

Die ∞^5 Strahlenketten im planaren Complex.	Die ∞^5 planaren Kettencongruenzen im Complex.
Complexcylinder.	*Complexcylinder.*

Den Strahlen und Parallelenbüscheln eines im Complex gelegenen Bündels werden die Büschel und Strahlen eines anderen vermöge einer *Berührungstransformation*, nämlich correlativ, zugeordnet.

Die betrachteten Transformationen sind der Geometrie im planaren Complex eigenthümlich, und können nicht auf den Strahlenraum überhaupt ausgedehnt werden. Da die Imprimitivität der Parallelenbüschel verschieden ist von der der Strahlen, so giebt es keinen Isomorphismus der Gruppen G_{17} oder G_{16} zu ihnen selbst, bei dem den Strahlen die Parallelenbüschel entsprächen.

Der reguläre quadratische Strahlencomplex.

Für die Singularitätencongruenz (ersten Blattes) eines quadratischen Complexes (des zweiten Blattes) $\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_{11} = 0$ haben wir in § 31 unter Nr. (24) eine Parameterdarstellung angegeben. Man kann daher leicht die tangirenden Parallelenbüschel dieser von ∞^1 Cylindern gebildeten Congruenz bestimmen. Sie haben die Coordinaten:

$$(21)\qquad \Omega = -\sigma_1^2, \quad \begin{matrix} \Xi_1 = 0\,, & \Xi_2 = \sigma_2\,, & \Xi_3 = \sigma_3 \\ \Phi_1 = \sigma_1, & \Phi_2 = \sigma_3, & \Phi_3 = -\sigma_2\,. \end{matrix}$$

Also haben die ∞^2 Parallelenbüschel des Complexes selbst die Coordinaten

$$(22)\qquad \mathfrak{O} = \sigma_1^2, \quad \begin{matrix} H_1 = \sigma_1, & H_2 = \sigma_3, & H_3 = -\sigma_2\,, \\ \Psi_1 = 0, & \Psi_2 = \sigma_2\,, & \Psi_3 = \sigma_3\,. \end{matrix}$$

Dazu gehört das singuläre Parallelenbüschel $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, das innerhalb des Complexes durch dessen Punktkette vertreten wird. Durch Elimination der Parameter $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ erhält man die Gleichungen dieser Congruenz von Parallelenbüscheln:

$$(23)\qquad \Psi_1 = 0, \quad \mathfrak{O} H_2 - H_1^2 \Psi_3 = 0, \quad \mathfrak{O} H_3 + H_1^2 \Psi_2 = 0.$$

Es ergiebt sich folgende Gegenüberstellung:

Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Complexes.	Normalfläche 4. Ordnung, die auf einem Normalkegel $\mathfrak{M}_3'$ *zweiter* Art (S. 416) liegt.
Regulärer quadratischer Strahlencomplex, als Congruenz von Parallelenbüscheln betrachtet.	Normalfläche 4. Ordnung, die auf einem Normalkegel $\mathfrak{M}_3$ *erster* Art liegt.

Der Inbegriff der Parallelenbüschel in einem regulären quadratischen Complex ist Träger eines ternären Gebietes.

Kettencomplex und Strahlenkette.

Die eigentlichen Strahlen des Kettencomplexes $\mathfrak{U}_{11} = 0$, mit Ausschluss der zum singulären Strahl parallelen, werden dargestellt durch die Formeln

$$(24)\qquad \begin{matrix} \mathfrak{U}_1 = \tau_1, & \mathfrak{U}_2 = \tau_2, & \mathfrak{U}_3 = \tau_3, \\ \mathfrak{U}_{11} = 0, & \mathfrak{U}_{22} = \tau_0\tau_3, & \mathfrak{U}_{33} = -\tau_0\tau_2; \end{matrix} \qquad (\tau_2 : \tau_3 \neq 0 : 0),$$

während das im Complex enthaltene Parallelenbündel dargestellt wird durch die Formeln

$$(24a)\qquad \begin{matrix} \mathfrak{U}_1 = \tau_1', & \mathfrak{U}_2 = 0, & \mathfrak{U}_3 = 0, \\ \mathfrak{U}_{11} = 0, & \mathfrak{U}_{22} = \tau_0'\tau_3', & \mathfrak{U}_{33} = -\tau_0'\tau_2, \end{matrix} \qquad (\tau_1' \neq 0).$$

(Vgl. § 31, Nr. 9.) (24) liefert eine Congruenz von Parallelenbüscheln

$$(25)\qquad \mathfrak{V} = 0, \quad \begin{matrix} H_1 = \tau_1, & H_2 = \tau_2, & H_3 = \tau_3, \\ \Psi_1 = 0, & \Psi_2 = \tau_3, & \Psi_3 = -\tau_2, \end{matrix}$$

zu denen als Grenzlagen noch die ∞^1 Büschel

$$(25b)\qquad \mathfrak{V} = 0, \quad \begin{matrix} H_1 = \tau_1', & H_2 = 0, & H_3 = 0, \\ \Psi_1 = 0, & \Psi_2 = \tau_3, & \Psi_3 = -\tau_2 \end{matrix}$$

zu rechnen sind. (24a) liefert eine andere Congruenz (ein Bündel) $H_2 = H_3 = 0$. Die zu (25) reciproke Congruenz

$$(26)\qquad \Omega = 0, \quad \Xi_1 = 0$$

umfasst die ∞^2 Parallelenbüschel, die Strahlen der zum Kettencomplex reciproken Kette $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_{11} = \mathfrak{X}_{22} = \mathfrak{X}_{33} = 0$ enthalten, und definirt diese Kette.

Es findet also beim Uebergang vom regulären quadratischen Strahlencomplex zum Kettencomplex ein Zerfallen der zugehörigen Congruenz von Parallelenbüscheln und ihres Bildes auf dem Normalkegel $\mathfrak{M}_4$ statt. — Wir können gegenüberstellen:

Parallelenbündel im Kettencomplex.	Ebene erster Art auf dem Kegel $\mathfrak{M}_4$.
Congruenz der zu Strahlen der reciproken Kette orthogonalen Parallelenbüschel.	Normalregelfläche *dritter* Ordnung, deren Leitlinie auf der genannten Ebene *erster* Art von $\mathfrak{M}_4$ liegt.
Congruenz der Parallelenbüschel, die Strahlen einer Kette enthalten.	Normalregelfläche dritter Ordnung, deren Leitlinie auf einer Ebene *zweiter* Art von $\mathfrak{M}_4$ liegt.

Die beiden letzten, den Kettencomplex und die reciproke Kette definirenden Congruenzen tragen also *nicht* ternäre Gebiete.

Wir betrachten nunmehr als letztes und in unserem Zusammenhange wichtigstes Beispiel für die Darstellung geometrischer Figuren durch Parallelenbüschel:

Die aplanare Kettencongruenz.

Irgend eine aplanare Kettencongruenz mit den Coordinaten q_{ik} sei dargestellt durch die Gleichungen (7) des § 30, die wir im vorigen Paragraphen so abgekürzt hatten $[q_{ik}, \mathfrak{X}] = 0$. Drücken wir nun aus, dass ein Parallelenbüschel $(\Omega; \Xi, \Phi)$ irgend einen Congruenzstrahl mit den Coordinaten $\mathfrak{X}_k = \Xi_k$, $\mathfrak{X}_{kk}$ enthält, $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})\,\Omega - (\mathfrak{X}\Phi\mathfrak{B}) = 0$, so muss sich dieses System von drei linearen Gleichungen auf eine einzige reduciren. In der That zeigt eine kurze Rechnung, dass sich von der linken Seite der angeführten Gleichung der nicht identisch verschwindende Factor $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X})$ abtrennen lässt. So ergiebt sich:

Das Parallelenbüschel $(\Omega; \Xi, \Phi)$ *enthält einen Strahl der aplanaren Kettencongruenz* (q_{ik}) *unter der Bedingung*

$$\Omega - \Sigma q_{ik} \Phi_i \Xi_k = 0. \tag{27}$$

Wir schreiben hierfür abkürzend $\{q_{ik}, \Omega\} = 0$, und können dann, analog den Gleichungen (15)...(18) des vorigen Paragraphen, im Ganzen vier Gleichungen dieser Form bilden:

$$(27)\quad \{q_{ik}, \Omega\} = 0, \qquad (28)\quad \{-q_{ki}, \mathfrak{O}\} = 0,$$

$$(29)\quad \{r_{ik}, \mathfrak{O}\} = 0, \qquad (30)\quad \{-r_{ki}, \Omega\} = 0.$$

Die durch diese Gleichungen ausgedrückten Beziehungen lassen sich folgendermassen in Worte fassen:

Jeder reguläre bilineare Complex von Parallelenbüscheln besteht aus ∞^3 *Büscheln, die je einen Strahl einer aplanaren Kettencongruenz enthalten, und ebenso aus den* ∞^3 *Büscheln, die zu je einem Strahl einer (der reciproken) Kettencongruenz orthogonal sind. Der reciproke Complex hat die umgekehrte Beziehung zu denselben Congruenzen.*

Durch discordante radiale Collineationen, und insbesondere durch eine völlig bestimmte Schiebung, lassen sich die Gleichungen reciproker regulärer bilinearer Complexe in die einfache Form

$$\Omega = 0, \quad \mathfrak{O} = 0$$

setzen: Bild eines regulären bilinearen Complexes auf $\mathfrak{M}_4$ ist ein beliebiger ebener Schnitt von $\mathfrak{M}_4$, der den Scheitel dieses Kegels nicht enthält, also eine Normalmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3$ (S. 407).

Deutet man die Coordinaten q_{ik} *einer aplanaren Kettencongruenz als Cartesische Coordinaten in einem Raume* R_8, *so werden dadurch den* ∞^7

aplanaren Kettencongruenzen, die je einen Strahl eines (eigentlichen) Parallelenbüschels $(\Omega; \Xi, \Phi)$ *enthalten, zugeordnet die Punkte eines ebenen* R_7, *dessen homogene (überzählige) Coordinaten diese sind:*

$$(31) \qquad -\Omega, \quad \Phi_i \Xi_k \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Der Inbegriff dieser Räume R_7 *bildet eine Mannigfaltigkeit* M_4, *die nach Erweiterung durch den unendlich fernen* R_7 *des* R_8 *eindeutig-umkehrbar abgebildet werden kann auf einen Normalkegel* $\mathfrak{M}_4$, *und zwar durch eine correlative Transformation.*

Stellt man die Gleichungen (27)...(30) mit den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln, insbesondere mit den Gleichungen (15) ...(18) zusammen, so ergiebt sich weiter:

Ueberdeckt man den Raum R_8 *mit zwei Blättern I, II, so wird dadurch auch* M_4 *doppelt überdeckt und es entstehen zwei Schaaren von* ∞^4 *Räumen* ${}_IR_7$, ${}_{II}R_7$. *Jeder dieser Räume ist auf zwei verschiedene Arten gestreift:* ${}_IR_7$ *z. B. kann beschrieben werden von* $2 \cdot \infty^1$ *ebenen Räumen* ${}_IR_6$ *und* ${}_IR_6'$. *Die Figuren beider Blätter lassen sich ferner paaren durch die involutorische Collineation*

$$(32) \qquad r_{ki} + q_{ik} = 0$$

oder

$$(33) \qquad \mathfrak{v} + \Omega = 0, \quad H_i = \Phi_i, \quad \Psi_k = \Xi_k.$$

Gepaarte Räume: ${}_IR_7$, ${}_{II}R_7$ *werden dadurch reciproken Parallelenbüscheln* $(\Omega; \Xi, \Phi)$, $(\mathfrak{v}; H, \Psi)$ *zugeordnet; und gleichzeitig werden die auf* ${}_IR_7$ *und* ${}_{II}R_7$ *gelegenen Schaaren von* ∞^1 *speciellen Mannigfaltigkeiten in folgender Weise zugeordnet den eigentlichen Strahlen* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$, *die die reciproken Büschel erfüllen:*

$$(34) \qquad [\mathfrak{X}; {}_IR_6, {}_{II}R_6']; \quad [\mathfrak{U}; {}_{II}R_6, {}_IR_6'].$$

Unterwirft man die beiden Blätter I, II gepaarten (discordanten) Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$, *so werden die genannten Beziehungen nicht zerstört. Gleichzeitig entstehen durch Einführung der Parallelenbüschel als Raumelemente die discordanten Transformationen der Gruppe* G_{17}.

Diese Sätze enthalten die im vorigen Paragraphen in Aussicht genommene Ergänzung zu den dort begründeten Beziehungen. Es ist namentlich nunmehr deutlich geworden, dass neben den Strahlen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ auch die Parallelenbüschel der radial-projectiven Geometrie aufgefasst

werden können als *Analoga zu den Ebenen der Euklidischen Geometrie, die den absoluten Kegelschnitt berühren.*

Zugleich aber können wir nunmehr noch einen tieferen Einblick in das Wesen der besprochenen Analogieen selbst gewinnen. Es beruht das darauf, dass wir jetzt bei der Abbildung auf Punkte des Raumes R_8 die aplanaren Kettencongruenzen durch reguläre bilineare Complexe von Parallelenbüscheln ersetzen können, diese aber mit den singulären zusammen ein *abgeschlossenes Continuum* bilden, das von dem projectiven Punktcontinuum in R_8 nicht wesentlich verschieden ist. Die analytischen durchaus-eindeutigen und stetigen Transformationen in diesem Continuum bilden die allgemeine projective Gruppe $\mathfrak{G}_{80}$ in R_8. Verlangt man, dass der Inbegriff der singulären bilinearen Complexe in Ruhe bleiben soll, so reducirt sich diese Gruppe auf die $\mathfrak{G}_{72}$ aller affinen Transformationen im R_8. Unter den genannten speciellen Complexen befinden sich nun insbesondere ∞^3, zerfallende, die den ∞^3 Linienelementen im Feld aller Punktstrahlen eindeutig zugeordnet sind. Sollen auch diese nur unter einander vertauscht werden, so reducirt sich die Gruppe $\mathfrak{G}_{72}$ weiter auf die erörterte Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$.

Das Continuum der ∞^3 genannten ganz speciellen Complexe kann daher angesehen werden als ein *Analogon zum Continuum der* ∞^1 *Punkte des absoluten Kegelschnittes in der Euklidischen Geometrie*, sofern nämlich, wie hier überall, die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen (oder Bewegungen) als *projective* Gruppe aufgefasst wird.

Ein ebener R_7 in R_8, der Bild eines eigentlichen Parallelenbüschels ist, schneidet die im unendlich Fernen gelegene Normalmannigfaltigkeit M_3 (S. 407), deren Punkte die Bilder der genannten speciellen Complexe sind, in zwei Normalregelflächen 3. Ordnung, deren jede die Leitlinie der anderen enthält (Vgl. S. 337). Der R_7 *berührt* also die M_3 längs zwei einander schneidender gerader Linien (deren durch jeden Punkt von M_3 *ein* Paar bestimmt ist); und zwar ist die Lage des R_7 gegen M_3 hierdurch charakterisirt.

Ferner enthält irgend einer der besonderen ebenen R_6 oder R_6' im betrachteten R_7, die Bilder eigentlicher Strahlen sind, eine der beiden genannten Normalregelflächen 3. O. (deren es $2 \cdot \infty^2$ verschiedene auf M_3 giebt) ganz. Die andere Fläche durchdringt er in ihrer eigenen Leitlinie, und er berührt sie in der Leitlinie der ersten Fläche. Also auch ein solcher ebener Raum R_6 oder R_6' hat eine ganz specielle Lage gegen die M_3, die als eine *Berührung* von besonderer Art zu bezeichnen ist, und übrigens ebenso charakteristisch ist für die $2 \cdot \infty^4$ Räume R_6, R_6', wie die zuerst besprochene Lagenbeziehung für die ∞^4 Räume R_7.

Eine Begründung dieser Behauptungen, die wir dem Leser überlassen müssen, lässt sich erbringen, wenn man die M_3 in folgender Weise durch 2 . 3 homogene Parameter darstellt:

$$(35) \qquad q = 0, \quad q_{ik} = \mathfrak{A}_k \cdot \mathfrak{P}_i \quad \{(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{P}) = 0\}. \; —$$

Offenbar hat man in den angeführten Sätzen verschiedene Analoga zu der Aussage: „Eine Ebene, die bei den Aehnlichkeitstransformationen nur ∞^2 verschiedene Lagen einnimmt, berührt den absoluten Kegelschnitt."

In der Theorie der affinen Transformationen liegt es ebenfalls nahe, Parallelenbüschel als Raumelemente einzuführen. Es hat Interesse, diese Figuren mit den im Texte ebenso benannten Figuren der radial-projectiven Geometrie zu vergleichen.

Schneiden sich eine eigentliche Gerade $\mathfrak{X}$ und eine uneigentliche Gerade $\mathfrak{X}'$, so kann man aus deren Plücker'schen Coordinaten sieben durch die Relation

$$(36) \qquad \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3 = 0$$

verbundene und in zwei homogene Systeme φ_i und ξ_k gegliederte Grössen ableiten und als Coordinaten des zugehörigen Parallelenbüschels betrachten:

$$(37) \qquad \begin{array}{ll} \xi_1 = \mathfrak{X}_{01}, & \varphi_1 = \mathfrak{X}'_{23}, \\ \xi_2 = \mathfrak{X}_{02}, & \varphi_2 = \mathfrak{X}'_{31}, \\ \xi_3 = \mathfrak{X}_{03}, & \varphi_3 = \mathfrak{X}'_{12}, \end{array} \qquad \varphi_0 = -\frac{\left\| \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{23} & \mathfrak{X}_{31} & \mathfrak{X}_{12} \\ \mathfrak{X}'_{23} & \mathfrak{X}'_{31} & \mathfrak{X}'_{12} \end{array} \right\|}{\left\| \mathfrak{X}_{01} \; \mathfrak{X}_{02} \; \mathfrak{X}_{03} \right\|}.$$

Lässt man auch das zunächst ausgeschlossene gleichzeitige Verschwinden von φ_1, φ_2, φ_3 zu, so entsteht ein *abgeschlossenes Continuum* von ∞^4 „eigentlichen" und ∞^2 „uneigentlichen" Parallelenbüscheln: Die Grössen 0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind die homogenen Coordinaten des Scheitels, die Grössen φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 die homogenen Coordinaten der Ebene des Büschels.

Deutet man die Producte $\varphi_i \xi_k$ als homogene Punktcoordinaten, so wird das hiermit erklärte vierdimensionale algebraische Gebilde eindeutig-umkehrbar abgebildet auf einem Punktraum M_4 mit projectiver Gruppe g_{12}. Diese Mannigfaltigkeit M_4 hat *verwickeltere* algebraische Eigenschaften als der Kegel $\mathfrak{M}_4$ des Textes. (M_4 verläuft in einem Raum von *zehn* Dimensionen und hat die Ordnung *zehn**), M_4 wird von ∞^3 Geraden R_1 und von ∞^2 Ebenen R_2 beschrieben, enthält aber ausserdem noch eine *nicht* zu diesen gehörige Ebene, u. s. w.)

Zwischen den Punkten von M_4 und denen von $\mathfrak{M}_4$, oder also zwischen beiden Arten von „Parallelenbüscheln" besteht eine Zuordnung, *die gegenseitig-eindeutig ist, so lange* $(\xi \mid \xi)$ *und* $(\Xi \mid \Xi)$ *nicht verschwinden, und auch die Grössen* φ_1, φ_2, φ_3 *sowie* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *nicht gleichzeitig den Werth Null haben:* Schliesst man diese singulären Stellen der Abbildung entsprechenden

*) Diese Zahl hat der Verfasser nur mit Hülfe des „Princips von der Erhaltung der Anzahl" bestimmt. Sie ist also bis auf Weiteres hypothetischer Natur (vgl. S. 378).

Fälle aus, so kann die Zuordnung zwischen den Coordinaten einander überdeckender (oder identischer) Parallelenbüschel beider Arten durch das eine oder andere der beiden Gleichungssysteme ausgedrückt werden:

$$(38) \qquad \Omega = -(\xi\,|\,\xi)\cdot\varphi_0\,, \quad \Xi_k = \xi_k\,, \quad \Phi_1 = \xi_2\varphi_3 - \xi_3\varphi_2\,, \quad \text{u. s. w.}$$

$$(39) \qquad \varphi_0 = \Omega\,, \quad \varphi_1 = \Xi_2\Phi_3 - \Xi_3\Phi_2 \text{ u. s. f.}, \quad \xi_k = \Xi_k\,. \quad -$$

Auf verschiedene sich hier anschliessende Probleme — Betrachtungen über andere (endliche oder unendliche) Gruppen, als deren Raumelement das Parallelenbüschel aufgefasst werden kann — können wir, da sie unserem sonstigen Stoff zu ferne liegen, leider gar nicht eingehen.

§ 35.

Verschiedenartige Ergänzungen.

Bei den Ueberlegungen der §§ 33 und 34 haben wir mit Absicht den Rechnungsapparat möglichst eingeschränkt, um die begrifflichen Beziehungen desto reiner hervortreten zu lassen. Es würde aber doch eine fühlbare Lücke bleiben, wollten wir die Gleichungen der Gruppen $\mathfrak{G}_{17}$, $\mathfrak{H}_{17}$ (oder $\mathfrak{G}_{17}$, $\bar{\mathfrak{H}}_{17}$), von denen die Rede war, nicht wirklich aufstellen. Wir nehmen daher nunmehr eine Ergänzung dieser Art vor.

Darstellung der radialen Collineationen in Coordinaten von Parallelenbüscheln und von aplanaren Kettencongruenzen.

Um zu sehen, wie sich die Coordinaten eines Parallelenbüschels $(\Omega;\ \Xi,\ \Phi)$ oder $(\mathfrak{O};\ H,\ \Psi)$ bei irgend einer radialen Collineation verhalten, ist es zweckmässig, die bisher benutzten expliciten und daher umständlichen Formeln durch concisere zu ersetzen.

Deuten wir vorübergehend durch einen den Symbolen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ beigesetzten Stern an, dass in den zu bildenden Ausdrücken die Indices 01, 02, 03 ersetzt werden sollen durch 23, 31, 12, und setzen wir fest, dass die symbolischen Producte $\mathfrak{P}_i\mathfrak{A}_k = \mathfrak{P}_i'\mathfrak{A}_k' = \cdots$ die Bedeutung a_{ik} und die Producte $\mathfrak{Q}_i\mathfrak{A}_k = \mathfrak{Q}_i'\mathfrak{A}_k' = \cdots$ die Bedeutung α_{ik} (S. 237, Nr. 5) haben sollen, so lassen sich mit Hülfe von willkürlichen Grössen $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{Y}_i$ die Gleichungen der radialen Collineationen in Coordinaten *erster* Art so zusammenfassen:

(1)

$$\text{I.} \quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}), \\ (\mathfrak{B}\,|\,\overline{\mathfrak{X}}') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{Q})\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}) + k\cdot(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})\,(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}^*); \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} (\mathfrak{U}'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U}), \\ (\mathfrak{U}'\,|\,\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Y})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U}) + k\cdot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U}^*). \end{cases}$$

Die Zeichen I, II bedeuten die beiden Schichten des irregulären Strahlencontinuums, so dass die Formeln I und II contragredient sind;

$$(2) \qquad \nabla = \tfrac{1}{6}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'')(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'') = |a_{ik}|$$

ist als von Null verschieden anzunehmen. — Aus (1) erhält man ohne Mühe die entsprechenden Transformationsgleichungen der Strahlencoordinaten *zweiter* Art; sie lauten für beide Blätter des ersten natürlichen Strahlencontinuums:

(3a)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{X}}') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}), \\ (\underline{\mathfrak{X}}'\,|\,\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{A}'\,|\,\mathfrak{X}) + k\cdot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\underline{\mathfrak{X}}), \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{U}'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U}), \\ (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}') = -(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''')(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U})(\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''\mathfrak{U}) + \\ \qquad\qquad + k\cdot\nabla\cdot(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}). \end{cases}$$

Wir führen jetzt zunächst den Uebergang zu Parallelbüschelcoordinaten mit Hülfe von deren Definitionsgleichungen § 34 Nr. (5) aus. Bei der anzustellenden Rechnung berücksichtige man die leicht abzuleitende Congruenz

$$(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{W}) \equiv -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}''\,|\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{W}) \text{ mod. } (\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{Z}).$$

Man kommt dann zunächst zu den Formeln

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\Xi') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Xi), \quad (\Phi'\,|\,\mathfrak{Y}) = k\cdot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\Phi), \\ \Omega' = k^2\cdot\nabla\cdot\Omega + k\cdot(\mathfrak{A}\,|\,\Xi)(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\Phi), \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (H'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'H), \quad (\mathfrak{B}\,|\,\Psi') = k\cdot\nabla\cdot(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Psi), \\ \mathfrak{O}' = k^2\cdot\nabla^2\cdot\mathfrak{O} - k\cdot\nabla\cdot(\mathfrak{A}\,|\,\Psi)(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''H), \end{cases}$$

die sich nach dem über die Homogeneität der Parallelbüschelcoordinaten Gesagten in die einfachere Form

(4a)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\Xi') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Xi), \quad (\Phi'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\Phi), \\ \Omega' = k\cdot\nabla\cdot\Omega + (\mathfrak{A}\,|\,\Xi)(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\Phi), \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (H'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'H), \quad (\mathfrak{B}\,|\,\Psi') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Psi), \\ \mathfrak{O}' = k\cdot\nabla\cdot\mathfrak{O} - (\mathfrak{A}\,|\,\Psi)(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''H) \end{cases}$$

bringen lassen.

Führen wir schliesslich noch eine neue Bezeichnung ein vermöge der simultan auszuführenden Substitutionen

$$(5)\quad \begin{array}{l} \nabla\cdot(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{Z}) \equiv (\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'')(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{W}) \text{ mod. } (\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{Z}), \\ (\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z}) \equiv -(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{Z}) \text{ mod. } (\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z}), \end{array}$$

so nehmen die Gleichungen (3a) und (4a) die mit ihnen äquivalenten Formen an:

(3b)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{X}') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{X}), \\ (\underline{\mathfrak{X}}'\,|\,\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{A}'|\,\mathfrak{X})(\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{X}) + k\cdot\tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\underline{\mathfrak{X}}), \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{U}'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{U}), \\ (\mathfrak{B}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}') = -\nabla\cdot(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{U})(\mathfrak{U}\,|\,\mathfrak{R}) + k\cdot\nabla\cdot(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\underline{\mathfrak{U}}); \end{cases}$$

(4b)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} (\mathfrak{B}\,|\,\Xi') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Xi), \quad (\Phi'|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\Phi), \\ \mathfrak{G}' = \nabla\cdot\{k\cdot\mathfrak{Q} + (\Phi\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{C}\,|\,\Xi)\}, \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} (H'\,|\,\mathfrak{Y}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'H), \quad (\mathfrak{B}\,|\,\Psi') = (\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\Psi), \\ \mathfrak{G}' = \nabla\cdot\{k\cdot\mathfrak{G} - (H\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{C}\,|\,\Psi)\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3a) *oder* (3b) *stellen also die radialen Collineationen in Strahlencoordinaten zweiter Art dar. Dieselben Collineationen werden durch die Formeln* (4a) *oder* (4b) *in Parallelbüschelcoordinaten ausgedrückt.*

Die in den Formeln (a) auftretende bilineare Form $(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{Q})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})$ ist bestimmt bis auf ein willkürliches Vielfaches von $(\mathfrak{B}\,|\,\mathfrak{P})(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{Z})$, ebenso die in (b) auftretende Form $(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{R})(\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{Z})$ bestimmt bis auf ein Vielfaches von $(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{Z})$. Der Zusammenhang zwischen den Parametern $a_{ik} = \mathfrak{P}_i\mathfrak{A}_k$, $\alpha_{ik} = \mathfrak{Q}_i\mathfrak{A}_k$ der Gleichungen (a) und den Parametern $a_{ik} = \mathfrak{P}_i\mathfrak{A}_k$, $c_{ik} = \mathfrak{R}_i\mathfrak{C}_k$ der Gleichungen (b) ist gegeben durch die Congruenzen (5).

Um zu sehen, wie die aplanaren Kettencongruenzen ersten und zweiten Blattes von den discordanten radialen Collineationen unter einander vertauscht werden, mögen wir etwa eine solche Congruenz zunächst als einen bilinearen Complex von Parallelenbüscheln auffassen. Diese Complexe können wir uns aus den Complexen $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{G} = 0$ durch duale Schiebungen entstanden denken; wir wollen daher ihre Gleichungen so bezeichnen:

$$(6)\quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & \mathfrak{Q} - (\Phi\,|\,\overline{\mathfrak{R}})(\overline{\mathfrak{C}}\,|\,\Xi) = 0 \qquad \{(\overline{\mathfrak{C}}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}) = 0\}, \\ \text{(II)} & \mathfrak{G} + (H\,|\,\overline{\mathfrak{R}})(\overline{\mathfrak{C}}\,|\,\Psi) = 0 \qquad \{(\overline{\mathfrak{C}}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}) = 0\}. \end{array}$$

Wir führen also für die Coordinaten q_{ik} und r_{ik} der Kettencongruenzen ersten und zweiten Blattes die symbolischen Beziehungen ein

$$q_{ik} = \overline{\mathfrak{R}}_i \overline{\mathfrak{C}}_k, \quad r_{ik} = -\overline{\mathfrak{C}}_i \overline{\mathfrak{R}}_k.$$

(Vgl. § 34, Nr. 27, 29.) Die bilinearen Complexe (6) und die zugehörigen Kettencongruenzen werden dann reciprok, wenn identisch

$$(7) \qquad (\mathfrak{W} \mid \overline{\mathfrak{R}})(\overline{\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{Z}) = (\mathfrak{W} \mid \overline{\mathfrak{R}})(\overline{\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{Z}).$$

Durch Ausführung discordanter radialer Collineationen müssen die Gleichungen (6) in solche von gleicher Form übergehen. Daraus ergeben sich die gesuchten Transformationsformeln, die bei der hier gewählten Bezeichnung nothwendig übereinstimmend ausfallen für *beide* Arten von bilinearen Formen in den Ausdrücken (6):

(8a)

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\mathfrak{W} \mid \overline{\mathfrak{R}}')(\overline{\mathfrak{C}}' \mid \mathfrak{Z}) = k \cdot \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{R}})(\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{P})(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{Z}) + \\ + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{P})(\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}''\mathfrak{Z}) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'') \cdot (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{Z}), \end{cases}$$

(8b)

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\mathfrak{W} \mid \overline{\mathfrak{R}}')(\overline{\mathfrak{C}}' \mid \mathfrak{Z}) = k \cdot \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{R}})(\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{P})(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{Z}) + \\ + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{R})(\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{P})(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{Z}). \end{cases}$$

Diese Gleichungen und die gleichlautenden Transformationsformeln (II) für die bilinearen Formen $(\mathfrak{W} \mid \overline{\mathfrak{R}})(\overline{\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{Z})$ *stellen also die radialen Collineationen in Coordinaten aplanarer Kettencongruenzen dar.*

Dass man die Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ vor sich hat, die durch den bezeichneten Erweiterungsprocess aus der Adjungirten der allgemeinen projectiven Gruppe einer Ebene entsteht, setzen die Gleichungen (8) unmittelbar in Evidenz.

Das letzte Glied in (8) ist eine (übrigens beliebige) ternäre Normalform, deren Coefficienten ebenfalls an Stelle der Parameter α_{ik} eingeführt werden können.

Aus den angeführten Gleichungen entstehen die der *radialen Correlationen*, wenn man die absolute Correlation hinzufügt, die alle Figuren in Ruhe lässt, und lediglich beide Blätter *I*, *II* vertauscht,

$$(9) \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{U}; \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{V}, \ \Xi = H, \ \Phi = \Psi; \quad \overline{\mathfrak{R}}_i \mathfrak{C}_k = -\overline{\mathfrak{C}}_i \mathfrak{R}_k.$$

Ferner werden aus den Transformationen (4) und (8) der Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$ (oder $\overline{\mathfrak{G}}_{17}$) die der Gruppe $\mathfrak{G}_{17}$, $\mathfrak{H}_{17}$ (oder $\mathfrak{G}_{17}$, $\overline{\mathfrak{H}}_{17}$) erhalten, wenn man die involutorische Transformation hinzufügt, die reciproke aplanare Kettencongruenzen und Parallelenbüschel mit einander vertauscht:

$$(10) \qquad \mathfrak{Q} + \mathfrak{V} = 0, \ \Xi = \Psi, \ H = \Phi; \quad \overline{\mathfrak{R}}_i \overline{\mathfrak{C}}_k = \mathfrak{R}_i \overline{\mathfrak{C}}_k.$$

Die Transformationen (8) sind, wie gesagt, analog zu den Aehnlichkeitstransformationen im Euklidischen Raume, wenn man als deren Objecte, wie es gewöhnlich geschieht, die Punkte betrachtet. Die Parameterdarstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_{16}$, die man erhält, wenn man in den Formeln (8a) $k = 1$ und $\frac{1}{3}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'') = 0$ setzt (vgl. S. 240, Nr. 12), ist das Analogon zu der in § 21 abgehandelten Parameterdarstellung der Euklidischen Bewegungen. Auch die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter mehrerer nach einander ausgeführter Transformationen haben eine analoge einfache Structur. Diese Operation kann mit Hülfe eines Systems complexer Grössen erfolgen, die man etwa als „Binonionen" würde bezeichnen können. In Strahlencoordinaten erster Art können die *dualen* Collineationen natürlich dargestellt werden durch Gleichungen des einfachen Typus

$$(11) \qquad (VX') = (AX)(VP), \quad (U'Y) = \tfrac{1}{2}(AA'U)(PP'Y).$$

Die Gesammtheit der natürlichen Continua von Parallelenbüscheln.

Von zahlreichen Anwendungen der soeben entwickelten Formeln führen wir nur eine einzige an.

Die Gleichungen (4) zeigen, dass die im vorigen Paragraphen gefundenen linearen Systeme (der Stufen $N_{l,m,n}$, S. 409) von Parallelbüschelcomplexen die einzigen gegenüber Transformationen von G_{17} *invarianten* linearen Systeme sind. Hieraus aber schliesst man ohne Mühe (vgl. S. 278):

Jedem System von drei ganzen Zahlen l, m, n ($l > 0$, $m \geq 0$, $n \geq 0$) entspricht eine (von projectiven Umformungen abgesehen) einzige Lösung der Aufgabe: Eine Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ zu finden, deren Punkte allgemeiner Lage derart den ∞^4 eigentlichen Parallelenbüscheln zugeordnet sind, dass durch diese Abbildung die dualen (und dann auch die radialen) Collineationen in eine projective Gruppe übergeführt werden.

Jede solche Punktmannigfaltigkeit ist, wie sich einsehen lässt, rational und im Allgemeinen eindeutig-umkehrbar auf die ∞^4 Parallelenbüschel bezogen. Betrachtet man aber die genannten Mannigfaltigkeiten in ihrer ganzen Erstreckung, so treten singuläre Stellen dieser Abbildungen auf: Man erkennt, dass es vier verschiedene Familien von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4$ giebt, deren jede sich in dieser Hinsicht anders verhält, deren Individuen aber sich gleichartig verhalten (vgl. die ganz analogen Betrachtungen S. 278...279). Wir drücken dies so aus:

Es giebt vier (in Bezug auf die Gruppe G_{17} oder G_{16}) natürliche Continua von Parallelenbüscheln.

Die zugehörigen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4$ unterscheiden sich wie folgt:

A. $m = 0$, $n = 0$, $\quad B_1$. $m > 0$, $n = 0$,

C. $m > 0$, $n > 0$, $\quad B_2$. $m = 0$, $n > 0$.

Das erste A dieser Continua ist das von uns bereits betrachtete. Es wird am einfachsten repräsentirt durch den der Annahme $l = 1$ entsprechenden Normalkegel eines Gebietes neunter Stufe. Zu den eigentlichen Parallelenbüscheln tritt ein einziges „uneigentliches“ oder singuläres Büschel. Im Continuum B_1 werden die eigentlichen Parallelenbüschel ergänzt durch ∞^2 „uneigentliche Büschel“, nämlich durch die ∞^2 Punktketten (gleichen Blattes), deren jedes einem bestimmten Parallelen*bündel* angehört. Im Continuum B_2 werden sie ergänzt oder können sie ergänzt werden durch die ∞^2 Punktstrahlen (gleichen Blattes), deren jeder in einem bestimmten *Netz* von Parallelenbüscheln enthalten ist. Das Continuum C endlich entsteht, wenn man zu den ∞^4 eigentlichen Parallelenbüscheln, die man sich zu ∞^3 parallelen Bändern geordnet denken mag, die ∞^3 Grenzstrahlen, oder die Linienelemente der unendlich fernen Ebene (immer im selben Blatt) hinzufügt. (Vgl. S. 267 u. ff.)

Bei Vertauschung reciproker Parallelenbüschel (Nr. 10) bleiben die Continua A und C in Ruhe, B_1 und B_2 werden in einander übergeführt. Die durch die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4$ definirten projectiven Gruppen sind in den Fällen B_1 und B_2 continuirlich und isomorph zu $\mathfrak{G}_{17}$, in den Fällen A und C gemischt, und isomorph zu $(\mathfrak{G}_{17}, \mathfrak{H}_{17})$.

Durch Einführung neuer überzähliger Coordinaten (nämlich von Producten $\Xi_0 \cdot \Xi_k$ an Stelle von Ξ_k u. s. w.) gelingt es, alle vier Continua erschöpfend darzustellen und die in ihnen enthaltenen algebraischen Complexe auf einfache Weise durch Gleichungen auszudrücken*).

Die absolute Strahlencongruenz als Band von Parallelenbüscheln.

Die Parallelenbüschel in dieser Congruenz werden dargestellt durch die zu $(\Phi \mid \Xi) = 0$ hinzutretenden Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad (\Xi \mid \Xi) = 0, \quad (\Phi \mid \Phi) = 0, \tag{12}$$

*) Ganz analoge Betrachtungen findet man durchgeführt Leipz. Ber. 1901, S. 363—370.

oder etwa durch die beiden ersten von diesen Gleichungen zusammen mit der Forderung, dass die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{matrix} \right\|$$

verschwinden soll. Die absolute Congruenz und jede zu ihr radialprojective conische Congruenz (also jede conische Congruenz des auf S. 293 bezeichneten von 10 Parametern abhängigen allgemeinen Typus) enthält also nur *eigentliche* Parallelenbüschel.

Den Gleichungen (12) lässt sich der auch auf andere Weise unschwer zu begründende Satz entnehmen:

Die absolute Strahlencongruenz ist, als Band von Parallelenbüscheln betrachtet, partieller Durchschnitt bilinearer Complexe von Parallelenbüscheln. Sie ist nämlich Basis eines linearen Systems vierter Stufe, das von allen solchen Complexen gebildet wird, die zu sich selbst reciprok sind.

In diesem Band von ∞^1 Parallelenbüscheln durchdringen sich also insbesondere die ∞^3 regulären bilinearen Complexe, die Strahlenbündel zu Umhüllungsgebilden haben (S. 413).

Ferner natürlich auch alle ∞^4 Congruenzen von Parallenbüscheln, die Durchschnitte solcher bilinearer Complexe sind, und die, als Oerter von Strahlen aufgefasst, im reellen Gebiete identisch sind mit den Secantencomplexen eigentlicher Strahlen (oder gerader Linien).

Bild des Bandes auf dem Normalkegel $\mathfrak{M}_4$ ist eine rationale (sog. Normal-)Curve 4. O. eines Gebietes 5. Stufe, eine von ∞^{10} gegenüber Transformationen von $(\mathfrak{G}_{17}, \bar{\mathfrak{H}}_{17})$ äquivalenten Curven*).

Synektische Congruenzen als Bänder von Parallelenbüscheln.

Eine nahe liegende Frage wird beantwortet durch den folgenden unschwer zu beweisenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein analytisches Band von Parallelenbüscheln, als Ort von Strahlen betrachtet,

*) Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch erwähnen, dass die Theorie der absoluten Congruenz zu einem System von Strahlencoordinaten führt, die den in der Flächentheorie benutzten sogenannten *symmetrischen* Coordinaten der Punkte einer Kugel verwandt, für manche Anwendungen von grosser Bedeutung sind. Hier können sie indessen bei Seite gelassen werden. — Der folgende Absatz kann unbeschadet des Zusammenhangs überschlagen werden.

eine synektische Congruenz ist, besteht darin, dass die Punktstrahlen der ∞^1 *Parallelenbüschel, mit den absoluten Polaren der Punktstrahlen der* ∞^1 *reciproken Büschel zu Linienelementen zusammengefasst, einen Verein bilden, der nicht gerade ist, d. h. nicht aus den Linienelementen einer Punktkette (eines uneigentlichen Strahls) besteht.*

Dieser Satz hat in unserem Zusammenhange deshalb ein gewisses Interesse, weil sich daraus einige bemerkenswerthe Eigenschaften der von uns betrachteten speciellen Complexe ergeben:

Die Parallelenbüschel irgend einer synektischen Congruenz, die in einem planaren Complex liegt, enthalten sämmtlich den singulären Punktstrahl des Complexes. Jede solche Congruenz ist also eine, übrigens beliebige, cylindrische Congruenz im Complex (im besonderen Falle ein Normalennetz).

Der reguläre quadratische Strahlencomplex enthält keine anderen synektischen Congruenzen, als die ∞^1 *ihm angehörigen cylindrischen Kettencongruenzen.*

Die einzigen synektischen Congruenzen im Kettencomplex sind die ∞^1 *Normalennetze der Strahlen der reciproken Kette.*

Die diesen Sätzen zu Grunde liegenden Gedanken lassen übrigens noch allgemeinere Anwendungen zu.

Involutorische radiale Projectivitäten.

Mehrere der von uns betrachteten Figuren stehen mit involutorischen radialen Projectivitäten im Zusammenhang. Wir werfen daher einen Blick auf diese auch sonst wichtige Classe von Transformationen. Ihre erschöpfende Bestimmung bietet gar keine Schwierigkeit: Wir geben daher nur ganz kurz solche Beziehungen an, die hier einiges Interesse haben.

Involutorische duale Collineationen giebt es ∞^8. Jede lässt im ersten (wie im zweiten) Blatt des Strahlenraumes einen eigentlichen Strahl, und alle Strahlen des Normalennetzes eines eigentlichen Strahls in Ruhe, der den ersten nicht rechtwinklig kreuzt oder schneidet; jede ist durch diese beiden Figuren, also durch einen eigentlichen Strahl des ersten Blattes und einen eigentlichen Strahl des zweiten Blattes vollkommen bestimmt. Sie ist, wie man sagen kann, *dual-perspectiv.* Beide Strahlen können durch discordante radiale Collineationen zum Zusammenfallen gebracht werden: Jede involutorische duale Collinea-

tion ist innerhalb G_{16} gleichberechtigt mit der Spiegelung an einem Strahl, oder mit einer Umwendung.

Die involutorischen dualen Collineationen interessiren uns hier höchstens insofern, als alle dualen Collineationen aus ihnen zusammengesetzt werden können. —

Es giebt zwei verschiedene Schaaren von je ∞^8 involutorischen dualen Anticollineationen („Antinvolutionen").

Eine solche kann nämlich alle Punktstrahlen einzeln in Ruhe lassen; sie ist dann eine der bereits betrachteten Spiegelungen an aplanaren Kettencongruenzen. Als einfachster Typus dient die Spiegelung an einem reellen Punkt. Die Transformationen der zweiten Schaar vertauschen die Punktstrahlen selbst involutorisch. Die Spiegelung an einer reellen Ebene, betrachtet als Zuordnung zwischen Strahlen *desselben* Blattes, ist eine solche duale Anticollineation, und jede involutorische Transformation der zweiten Schaar ist zu dieser besonderen dual-collinear (mit ihr innerhalb G_{16} gleichberechtigt).

Jede involutorische Anticollineation, die die Punktstrahlen involutorisch paart, lässt in beiden Blättern alle Strahlen zweier reciproker planarer Kettencongruenzen, und alle Strahlen der sie begleitenden Parallelenbündel einzeln in Ruhe. Umgekehrt bestimmt jede solche Figur eine Schaar von ∞^1 (gleichberechtigten) Paaren discordanter dualer Antinvolutionen).*

Wir kommen auf diese Thatsachen sogleich zurück.

Es giebt ∞^{10} involutorische duale Correlationen („Polaritäten"), deren jede als „Spiegelung" an einer irreducibelen conischen Congruenz, oder besser an einem Paar reciproker conischer Congruenzen bezeichnet werden kann.

Jede kann in Coordinaten erster Art dargestellt werden durch die gleich Null gesetzte Polare $(AX)(AY)$ einer dualen quadratischen Form $(AX)^2$ $\{S\frac{1}{6}(AA'A'')^2 \neq 0\}$; wie die zugehörigen conischen Congruenzen ist jede zu jeder dual-projectiv. Zur absoluten Congruenz gehört *die absolute Correlation* $(XY) = 0$ oder

$$U' = X, \quad X' = U, \tag{13}$$

die über einander liegende Strahlen beider Blätter vertauscht. — Im reellen Gebiete giebt es noch einen zweiten Typus involutorischer

---

*) Es hat also keinen Sinn, von einer „Spiegelung an einer *planaren* Kettencongruenz" zu reden.

radialer Correlationen, die dem bereits bezeichneten zweiten Typus conischer Congruenzen entsprechen (S. 294). Hierhin gehört die Spiegelung an einem reellen Strahl, betrachtet als Zuordnung von Strahlen *verschiedener* Blätter. Die mit einer involutorischen dualen Correlation verbundenen reciproken conischen Congruenzen sind Oerter aller eigentlichen Strahlen, die die ihnen zugeordneten rechtwinklig schneiden.

Endlich giebt es ∞^8 involutorische duale Anticorrelationen („duale Antipolaritäten").

Auch diese bilden, im complexen Gebiete, ein Continuum, und jede ist zu jeder dual-projectiv. *Ort der eigentlichen Strahlen, die die ihnen zugeordneten senkrecht schneiden, ist ein irreducibeler conischer Complex. Jeder von diesen ist also mit ∞^3 involutorischen Anticorrelationen verbunden.* Ein reeller conischer Complex wird gebildet von allen Strahlen, die mit einer reellen Ebene den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden; die Spiegelung an dieser Ebene, betrachtet als Zuordnung von Strahlen *verschiedener* Blätter, ist eine der zugehörigen ∞^3 involutorischen Anticollineationen, die alle gegenüber der reellen Gruppe G_{16} gleichberechtigt sind. Eine zweite Familie reeller dualer Anticorrelationen ist mit der zweiten Art reeller conischer Complexe (S. 359) verbunden, zu denen der accessorische Complex gehört. Auf diesen letzten bezieht sich der Satz:

Fasst man die ∞^3 Spiegelungen an Punkten als Zuordnungen von Strahlen verschiedener Blätter auf, d. h. setzt man sie mit der absoluten Correlation zusammen, so hat man damit alle dualen involutorischen Anticorrelationen gefunden, die mit dem accessorischen Complex verbunden sind.

Es hat sich also ergeben, dass alle Typen involutorischer radialer Projectivitäten bereits in der Theorie der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen auftreten; und es besteht, nach dem hier oder auch schon nach dem in § 26 Gesagten; der Satz, dass jede duale Collineation oder Correlation, die mit der absoluten Correlation vertauschbar ist, eine der ∞^4 Umwendungen sein muss, und dass jede duale Anticollineation oder Anticorrelation gleicher Eigenschaft mit einer der ∞^3 Spiegelungen an Punkten oder mit einer der ∞^3 Spiegelungen an Ebenen zusammenfällt.

Als ein weiteres Beispiel für Ueberlegungen dieser Art heben wir noch den folgenden Satz hervor.

Wenn ein quadratischer nicht-conischer Strahlencomplex bei der Spiegelung an einer aplanaren Kettencongruenz in Ruhe bleibt, so ist der

Complex ein Kettencomplex, und die Congruenz ist irgend eine der ∞^3 in ihm enthaltenen aplanaren Kettencongruenzen. —

Pseudopolaritäten und quadratische Strahlencomplexe.

Die behandelten Fragen lassen sich natürlich bedeutend verallgemeinern. Wir begnügen uns indessen damit, noch einige sogenannte ausgeartete Transformationen zu betrachten, die gewissermassen ebenfalls involutorisch sind.

Stellen wir zunächst irgend eine duale Anticollineation zwischen eigentlichen Strahlen dar durch eine bilineare Gleichung der Form

$$(14) \qquad (AX)(B\bar{Y}) = 0, \quad \{\tfrac{1}{6}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'')(\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'') \neq 0\},$$

indem wir durch den über das Zeichen Y gesetzten Strich andeuten, dass die Grössen $\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{Y}_{23}\varepsilon$, u. s. w., ersetzt werden sollen durch die conjugirten $\mathfrak{Y}_{01} - \mathfrak{Y}_{23}\varepsilon$, u. s. f. Die Gleichung sagt dann aus, dass der Strahl Y den Strahl U' senkrecht schneidet, der dem Strahl X zugeordnet wird. Verlangen wir also, dass die durch (14) dargestellte Anticollineation involutorisch wird, so heisst das, dass (14) dasselbe aussagt, wie die durch Vertauschung von X und Y entstehende Gleichung

$$(15) \qquad (AY)(B\bar{X}) = 0.$$

Man kann nun aber diese Forderung auch stellen, wenn man die bei (14) zugefügte Ungleichung fallen lässt, wenn man also nicht-umkehrbare, sogenannte ausgeartete Transformationen, in den Bereich der Betrachtung zieht. Es zeigt sich dann, dass die Forderung der Aequivalenz der Gleichungen (14) und (15) durch *zwei* verschiedene Schaaren von Zuordnungen erfüllt werden kann, deren jede von acht wesentlichen Parametern abhängt. Die Gleichung (14) ist nämlich äquivalent mit einem Gleichungspaar der Form

$$(16) \qquad \begin{gathered} \Sigma a_{ki}\mathfrak{X}_{0i}\mathfrak{Y}_{0k} = 0, \\ \Sigma \alpha_{ki}\mathfrak{X}_{0i}\mathfrak{Y}_{0k} - \Sigma a_{ki}(\mathfrak{X}^*_{0i}\mathfrak{Y}_{0k} - \mathfrak{X}_{0i}\mathfrak{Y}^*_{0k}) = 0, \end{gathered}$$

worin der den Zeichen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ beigefügte Stern andeutet, dass $\mathfrak{X}_{01}$ durch $\mathfrak{X}_{23}$ (u. s. w.) ersetzt werden soll:

$$\{a_{ki} = \mathfrak{A}_{0i}\mathfrak{B}_{0k}, \quad -\alpha_{ki} = \mathfrak{A}_{0i}\mathfrak{B}^*_{0k} + \mathfrak{A}^*_{0i}\mathfrak{B}_{0k}\}.$$

Vertauschen wir jetzt $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, und verlangen wir die Aequivalenz beider so erhaltenen Paare von Gleichungen, so erkennen wir, dass sowohl die Werthsysteme

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad \alpha_{ik} = -\alpha_{ki}, \tag{17}$$

als auch die Werthsysteme

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{18}$$

dieser Forderung genügen, und in allgemeinster Weise die Werthsysteme, die sich aus diesen bei Aenderung der Matrix $\|\alpha_{ik}\|$ um ein Vielfaches der Matrix $\|a_{ik}\|$ ergeben.

Die Werthsysteme der Form (17) liefern die bereits betrachteten involutorischen dualen Anticollineationen, und ausserdem ausgeartete Grenzfälle von solchen. Die Werthsysteme der Form (18) aber liefern eine neue Art „involutorischer" Zuordnungen. Wir wollen diese, also die Zuordnungen der durch die Relationen (18) näher bestimmten Formen $\overline{U}' = (AX)B$ oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}'_{01} &= a_{11}\mathfrak{X}_{01} + a_{12}\mathfrak{X}_{02} + a_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{U}'_{23} &= \alpha_{11}\mathfrak{X}_{01} + \alpha_{12}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{13}\mathfrak{X}_{03} - a_{11}\mathfrak{X}_{23} - a_{12}\mathfrak{X}_{31} - a_{13}\mathfrak{X}_{12}, \end{aligned} \tag{19}$$

(u. s. f.), unter der Voraussetzung, dass die Grössen a_{23}, a_{31}, a_{12} nicht sämmtlich verschwinden, kurz *Pseudopolaritäten* nennen.

Drücken wir nun aus, dass bei einer ausgearteten Anticorrelation dieser besonderen Art der Strahl $\mathfrak{X}$ auf dem ihm zugeordneten Strahl $\mathfrak{U}'$ senkrecht steht, oder lassen wir, was auf dasselbe hinauskommt, in den Gleichungen (16) die Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zusammenfallen, so ergiebt sich der Strahlencomplex

$$\Sigma \alpha_{ik}\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}_k - 2a_{23}\cdot\mathfrak{X}_{11} - 2a_{31}\cdot\mathfrak{X}_{22} - 2a_{12}\cdot\mathfrak{X}_{33} = 0. \tag{20}$$

Der Gleichung dieses Complexes aber können umgekehrt sämmtliche in den Gleichungen (19) auftretende Coefficienten entnommen werden. Es ist also der Satz bewiesen:

Ort aller eigentlichen Strahlen, die die ihnen durch eine Pseudopolarität zugewiesenen senkrecht schneiden, ist ein regulärer quadratischer oder ein Kettencomplex. Umgekehrt ist mit jeder solchen Figur eine einzige Pseudopolarität verbunden.

Auf eine nähere Untersuchung der Pseudopolaritäten können wir uns nicht einlassen; wir wollen aber doch zwei specielle Sätze hervorheben, die uns bemerkenswerth zu sein scheinen.

Die mit dem Rotationscomplex $\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_{11} = 0$ verbundene Pseudopolarität hat in Coordinaten zweiter Art die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_1' = 0, \qquad \mathfrak{X}_2' = -\mathfrak{U}_3, \quad \mathfrak{X}_3' = \mathfrak{U}_2, \\ &\mathfrak{X}_{11}' = -\mathfrak{U}_{11}, \quad \mathfrak{X}_{22}' = 2\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{X}_{33}' = 2\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Hieraus schliesst man:

Die mit einem regulären quadratischen Strahlencomplex verbundene Pseudopolarität ordnet jedem eigentlichen Strahl, der nicht dem ausgezeichneten Parallelenbündel angehört, einen Strahl des Singularitätencomplexes des quadratischen Complexes zu, jedem der ausgeschlossenen Strahlen aber einen unbestimmten Strahl. Alle Strahlen der zuerst genannten Art, denen derselbe Strahl zugeordnet wird, bilden ein Parallelenbüschel. Jedem im quadratischen Complex selbst enthaltenen Parallelenbüschel wird auf diese Weise zugeordnet der Strahl der Singularitätencongruenz des Complexes, der zu dem Parallelenbüschel gehört.

(Man vergleiche die Formeln (21) mit denen Nr. (24) in § 31.)

Zum Kettencomplex $\mathfrak{U}_{11} = 0$ gehört die Pseudopolarität

$$(22) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_1' = 0, \quad \mathfrak{X}_2' = -\mathfrak{U}_3, \quad \mathfrak{X}_3' = \mathfrak{U}_2, \\ &\mathfrak{X}_{11}' = -\mathfrak{U}_{11}, \quad \mathfrak{X}_{22}' = 0, \quad \mathfrak{X}_{33}' = 0. \end{aligned}$$

Die mit einem Kettencomplex verbundene Pseudopolarität ordnet jedem eigentlichen Strahl, der nicht dem im Complex enthaltenen Parallelenbündel angehört, einen Strahl der Singularitätencongruenz des Complexes, also des Normalennetzes zu, dem die reciproke Kette angehört. Die Strahlen, die zu demselben Strahl des Normalennetzes führen, bilden im Allgemeinen eine cylindrische Kettencongruenz (S. 353)*; im Besonderen aber wird jedem im Complex enthaltenen Normalennetz dessen Hauptaxe, der zugehörige Strahl der reciproken Kette, zugeordnet.*

Radial-projective Erzeugung der planaren Kettencongruenzen.

Betrachten wir einen reellen eigentlichen Strahl $\mathfrak{X}$, der mit einer Ebene einen mod. π von Null und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel bildet, und dessen Spiegelbild $\mathfrak{X}'$ in Bezug auf die Ebene, so erscheint jeder in der Ebene selbst gelegene eigentliche Strahl als gemeinsame Normale zweier Strahlen, die den Netzen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ angehören, und diese Normalennetze sind dadurch dual-antiprojectiv auf einander bezogen. Verbindet man hiermit den angeführten Satz, dass alle involutorischen dualen Anticollineationen zweiter Art mit einander äquivalent sind, so kommt man, durch Ueberlegungen, die wir nicht mehr im Einzelnen wiedergeben wollen, zu folgenden Sätzen:

„Sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ zugeordnete eigentliche Strahlen in einer der ∞^1 involutorischen dualen Anticollineationen, die mit einer planaren Kettencongruenz verbunden sind, und gehört $\mathfrak{X}$ (und folglich auch $\mathfrak{X}'$) weder dem die Congruenz begleitenden Parallelenbündel, noch dem die Con-

gruenz enthaltenden planaren Complex an, so werden die Congruenzstrahlen aus $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ durch dual-antiprojective Normalennetze projicirt."

„Jede planare Kettencongruenz wird zusammen mit dem sie begleitenden Parallelenbündel auf ∞^5 Arten durch zwei antiprojective Normalennetze erzeugt, als Ort der gemeinsamen Normalen einander zugeordneter Strahlen."

„Die Hauptaxe $\mathfrak{X}$ des ersten Netzes kann, abgesehen von der genannten Beschränkung, willkürlich angenommen werden. Die Hauptaxe $\mathfrak{X}'$ des zweiten Netzes ist dann unbestimmt in einem Parallelenbüschel, das folgendermaassen construirt wird:

Der zu $\mathfrak{X}$ orthogonale Strahl $\mathfrak{U}$ der reciproken Congruenz wird senkrecht getroffen erstens von den Strahlen eines Parallelenbüschels, das $\mathfrak{X}$ enthält; zweitens von den Strahlen eines der gegebenen Congruenz angehörigen Parallelenbüschels; drittens von den Strahlen eines Büschels, das in dem die Congruenz begleitenden Parallelenbündel liegt. Das gesuchte Parallelenbüschel liegt in demselben Netz, wie die drei construirten, und wird von dem ersten Büschel harmonisch getrennt durch das zweite und dritte."

Hierzu gehört als Umkehrung:

Wenn zwei Normalennetze nicht paralleler eigentlicher Strahlen derart dual-antiprojectiv auf einander bezogen sind, dass sie einen Strahl entsprechend gemein haben, so erzeugen sie eine planare Kettencongruenz. D. h., die gemeinsamen Normalen zugeordneter eigentlicher nicht paralleler Strahlen und ihre Grenzlagen erfüllen eine solche Congruenz. Die gemeinsamen Normalen der zugeordneten parallelen Strahlen erfüllen ebenso das die Congruenz begleitende Parallelenbündel.

Die Axen der beiden erzeugenden Netze können in dem sie verbindenden Normalennetz parallel verschoben werden.

Wir überlassen den unschwer zu führenden Beweis dem Leser, und bemerken nur noch, dass eine ähnliche Erzeugungsweise der aplanaren Kettencongruenz *nicht* existirt. Entsprechen sich die Strahlen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ in der Spiegelung an einer aplanaren Kettencongruenz, so werden zwar ebenfalls die Congruenzstrahlen aus $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ durch antiprojective Normalennetze projicirt. Aber in diesem Falle sind entsprechende Strahlen beider Netze stets parallel; sie erzeugen daher nicht eine Congruenz, sondern einen Strahlencomplex; zwei antiprojective Netze in der genannten besonderen Lage gehören in gleicher Weise zu ∞^3 aplanaren Kettencongruenzen. —

Haben zwei dual-antiprojective Normalennetze nicht paralleler Strahlen eine solche Lage, dass die Strahlen zweier zugeordneter Paral-

lelenbüschel parallel sind, ein entsprechend-gemeinsamer Strahl aber *nicht* vorhanden ist, so erzeugen sie *ebenfalls* eine planare Kettencongruenz. Als Nebenerzeugniss stellt sich dann statt des Parallelenbündels eine cylindrische Kettencongruenz ein.

Singularitätencongruenzen quadratischer Complexe und aplanare Kettencongruenzen in perspectiver Lage.

Man erkennt unschwer, dass die Rotationscongruenz § 31, Nr. 24 *perspectiv* liegt zu dem Strahlenbündel

$$(23)\quad \mathfrak{U}_1 = \sigma_1, \quad \mathfrak{U}_2 = 2\sigma_3, \quad \mathfrak{U}_3 = -2\sigma_2, \quad \mathfrak{U}_{11} = \mathfrak{U}_{22} = \mathfrak{U}_{33} = 0,$$

d. h. dass (durch proportionale Parameterwerthe) zugeordnete Strahlen beider Congruenzen einander senkrecht schneiden. Die reciproke der Kettencongruenz (23) (dasselbe Strahlenbündel) hat mit der Singularitätencongruenz eine Kette gemein. Diese Bemerkung lässt sich nun umkehren. Man kann unschwer alle Singularitätencongruenzen finden, die zu einem Strahlenbündel perspectiv liegen, und es ergiebt sich dann:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen der Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Strahlencomplexes und einer aplanaren Kettencongruenz perspective Lage stattfindet, besteht darin, dass die Reciproke der Kettencongruenz mit der Singularitätencongruenz eine Kette gemein hat. Unter dieser Voraussetzung also können die ternären Gebiete beider Congruenzen projectiv (und mithin ausnahmslos eindeutig) einander so zugeordnet werden, dass entsprechende Strahlen einander senkrecht schneiden.

Unmittelbar ergiebt sich hieraus:

Zu jeder Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Complexes liegen ∞^5 aplanare Kettencongruenzen perspectiv, und ebenso zu jeder aplanaren Kettencongruenz ∞^5 Singularitätencongruenzen.

Da entsprechende Strahlen zweier gleichartiger Congruenzen, die auf diese Weise auch auf einander projectiv bezogen sind, nicht nothwendig parallel sein müssen, so ergiebt sich weiter:

Jede Singularitätencongruenz eines regulären quadratischen Strahlencomplexes kann auf ∞^{10} Arten durch projectiv auf einander bezogene aplanare Kettencongruenzen erzeugt werden, und ebenso jede aplanare Kettencongruenz auf ∞^{10} Arten durch projectiv-bezogene Singularitätencongruenzen.

D. h. construirt man die gemeinsame Normale zwischen zwei nicht parallelen entsprechenden Strahlen z. B. zweier solcher Singularitätencongruenzen, die zur Erzeugung brauchbar sind, so erhält man bei Variation der zugeordneten Strahlen mit Hülfe des Processes der analytischen Fortsetzung alle Strahlen der Kettencongruenz. —

Die angeführten Sätze enthalten ein *sehr merkwürdiges* Beispiel für radial-projective Erzeugungen von Strahlenörtern: Es erscheint wünschenswerth, die gefundenen Figuren noch genauer zu untersuchen, und namentlich die erschöpfende und präcise Form der beiden Umkehrungen des letzten Satzes festzustellen. Zwei projectiv-bezogene Congruenzen der einen Art, die eine Congruenz der anderen Art erzeugen, hängen nicht von 24, sondern nur von 18 Constanten ab; es bestehen zwischen diesen Congruenzen Beziehungen, die theils durch Gleichungen, theils durch Ungleichungen sich ausdrücken lassen.

Wir übergehen verwandte Sätze über dual-projective Erzeugungen conischer Congruenzen, da diese zu unserem eigentlichen Gegenstande nur entferntere Beziehungen haben*).

Wir haben nunmehr von der radial-projectiven Geometrie soviel vorgetragen, als ohne allzugrossen Zwang im Rahmen einer „Geometrie der Dynamen“ Platz zu finden schien. Das ist freilich nur Bruchstück eines Bruchstücks; doch dürfen wir vielleicht hoffen, die Behandlung der hier auftretenden grundsätzlichen Fragen so weit gefördert zu haben, dass ein sicheres Vorwärtsschreiten auf gebahntem Wege möglich sein wird. Den Schluss unserer Untersuchung soll nunmehr eine genauere Betrachtung der bisher in den Hintergrund gestellten *metrischen* Eigenschaften der Figuren bilden, die wir aus linearen Mannigfaltigkeiten von Gewinden oder auch von Dynamen abgeleitet und als ein- und mehrdimensionale *Ketten* bezeichnet haben. Bevor wir aber dazu übergehen, wünschen wir noch eine Reihe von Bemerkungen über die radial-projective Geometrie selbst zu machen, die im Texte nicht wohl Platz finden konnten, theils wegen ihres historischen Inhaltes, theils deshalb, weil wir an die Vorkenntnisse unserer Leser zu weitgehende Anforderungen nicht stellen wollten. —

Sätze, die im Grunde der radial-projectiven Geometrie angehören, finden sich, in übrigens geringer Zahl, und in mehr oder (meistens) minder correcter Fassung, verstreut in der Litteratur. Sie sind aber in das Gewand der projectiven Geometrie gekleidet, und in ihrem Wesen nicht erkannt worden. Eine Ausnahme hiervon bildet, bis zu einem gewissen Grade, eine Arbeit eines dänischen Geometers, des Herrn Johannes Petersen**). Sieht man von der nahezu werthlosen auf S. 208 besprochenen Arbeit ab, so werden hier zuerst — wie es scheint — radial-projective Eigenschaften

*) Vgl. darüber Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1902, S. 114.

**) *Nouveau principe pour études de géométrie des droites.* Verhandlungen der Dänischen Academie der Wissenschaften, Kopenhagen, 1898. S. 283—344.

geometrischer Figuren systematisch betrachtet. Indessen ist der Inhalt dieser verdienstvollen Schrift noch mit einer Reihe von Unklarheiten behaftet, die uns veranlasst haben, von einem Citiren von Einzelheiten abzusehen, da das zu nutzlosen kritischen Erörterungen geführt haben würde. Namentlich fehlen die präcisen Grundbegriffe: Strahl, Punktstrahl, radiale und duale Collineation*).

Da der Verfasser von dieser Arbeit erst zu einer Zeit Kenntniss erhalten hat, wo seine eigenen Untersuchungen den im Vorhergehenden dargelegten Stand bereits im Wesentlichen erreicht hatten**), so hat er bei Ausbildung der radial-projectiven Geometrie eine *directe* Anregung von anderer Seite nicht erfahren. Dagegen sind ihm, namentlich in einem älteren Stadium seiner eigenen Untersuchungen, Arbeiten von wesentlichem Nutzen gewesen, die sich auf einen anderen Zweig der Geometrie beziehen, nämlich auf die gewöhnliche *projective Geometrie im imaginären Gebiet,* und auf die *Geometrie in zwei getrennten projectiven Punktcontinuis*, insbesondere solchen von zwei Dimensionen. Dieser Stoff erfreut sich bereits einer ziemlich ausgedehnten Litteratur — es gehören dahin, oder können dazu in Beziehung gesetzt werden, Arbeiten von Hesse, Clebsch, R. Sturm, Rosanes, Pasch und Anderen — von besonderem Werthe aber ist dem Verfasser Kenntniss von Arbeiten des Herrn C. Segre gewesen***), dem dieser Gegenstand eine grundsätzliche Förderung verdankt.

Die Möglichkeit z. B., Untersuchungen über die projective ebene Geometrie für die Liniengeometrie zu verwerthen, beruht darauf, dass man die reellen und imaginären Punkte eines ternären Gebietes *durchaus-eindeutig* den reellen im Inneren des sogenannten hyperbolischen Raumes verlaufenden Geraden zuordnen kann, sobald man das von diesen gebildete Continuum dadurch abschliesst, dass man die *Punkte* der zugehörigen absoluten Fläche hinzufügt. Die Gruppe der ∞^{16} reellen und imaginären Collineationen in der Ebene definirt dann eine isomorphe Gruppe von Vertauschungen der genannten Linienstücke (und Punkte) oder „Strahlen", eine Gruppe, die die Bewegungen im Nicht-Euklidischen Raume umfasst; jeder bekannte Satz der imaginären ebenen Geometrie liefert ohne Weiteres einen liniengeometrischen Satz, der sich auf *reelle* „Strahlen" bezieht. Der benutzte Begriff „Strahl" aber ist von dem gewöhnlichen Begriff der Geraden völlig verschieden, und ebenso die zugehörige Strahlengeometrie von der Liniengeometrie Plücker's,

---

*) Herr Petersen selbst hat in einem Briefe an den Verfasser das Vorhandensein solcher Dunkelheiten in liebenswürdigster Weise anerkannt.

**) Man vergleiche einen auf der Naturforscherversammlung zu Hamburg (Sept. 1901) gehaltenen Vortrag: *Ein neuer Zweig der Geometrie*, Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1902, S. 97—123.

***) C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Atti di Torino 1890; insgesammt vier Aufsätze. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piane o spazi*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891. *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici.* Math. Ann. Bd. 40, 1892, S. 413. (Nicht so weit geht eine Arbeit verwandten Inhalts von C. Juel: *Einige Grundgebilde der projectiven Geometrie.* Acta Math. Bd. 14, 1890.)

Die invariantentheoretische Seite des Stoffes behandelt eine Dissertation von Benedetti, *Sulla teoria delle forme iperalgebriche*, Pisa 1899.

was besonders scharf bei Einführung imaginärer „Strahlen“ hervortritt. Gleichzeitig ergiebt sich, wie hier nicht weiter auseinandergesetzt werden kann, ein Zusammenhang dieser Strahlengeometrie mit der *Geometrie der Gewinde*. Zu ähnlichen oder bei allgemeinster Auffassung identischen Resultaten kommt man, wenn man von der projectiven Geometrie in zwei Ebenen ausgeht.

Es liegt nun nahe, mit der so begründeten Strahlengeometrie*) einen *Grenzübergang* vorzunehmen, indem man aus dem „Nicht-Euklidischen Raum“ einen Euklidischen hervorgehen lässt. Auf diese Weise sind eine ganze Reihe der hier aufgestellten Sätze gefunden worden. Insbesondere ergab sich auch die Möglichkeit, die von Herrn Segre eingeführte Terminologie in ziemlichem Umfang auf den neuen Gegenstand zu übertragen. Wir haben das Vorhandensein derartiger Beziehungen bereits in der Einleitung zu unserem III. Abschnitt (S. 229) hervorgehoben. Hinzufügen aber wollen wir nunmehr, dass das Bild, das man sich auf dem beschriebenen Wege von der radialprojectiven Geometrie im *Euklidischen* Raume mit nicht allzugrosser Mühe machen kann, weder hinreichend scharf umschrieben noch vollständig ist. Die Handhabung des bezeichneten Grenzübergangs, desselben, den wir bereits im I. Abschnitt verwerthet hatten, ist nicht mühelos; man findet auf diese Art, ohne besondere Anstrengung, in der Regel nur Sätze, die „im Allgemeinen“ richtig sind, und deren präcise Form erst noch festgestellt werden muss. Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Classen „äquivalenter“ Figuren ist im Grenzfall beinahe immer grösser und die grundsätzlichen Schwierigkeiten z. B., mit denen wir uns in § 27 haben herumschlagen müssen, treten überhaupt erst im Grenzfall auf. Eine directe Begründung und gesonderte Behandlung der radial-projectiven Geometrie im Euklidischen Raume, wie wir sie ausgeführt haben, ist *keinenfalls* zu entbehren — schon deshalb, weil von den radialen Projectivitäten nur die *dualen* Projectivitäten und Antiprojectivitäten im Nicht-Euklidischen Raume Analoga haben.

Wir müssen es uns versagen, diese Grenzübergänge, über die sich eine lange Abhandlung schreiben liesse, und deren Brauchbarkeit sich weit über die hier behandelten Gegenstände hinaus erstreckt, einer näheren Betrachtung zu unterziehen. So können wir nur beiläufig erwähnen, dass die Theorie der von uns als *synektisch* bezeichneten Congruenzen im engsten Zusammenhange steht mit der Theorie der *ebenen Curven*, der Theorie der *conformen Abbildung*, und der Theorie der von Bianchi untersuchten *Flächen von der Krümmung Null* im Nicht-Euklidischen Raume; dass eine ähnliche Beziehung stattfindet zwischen unseren quadratischen Strahlencomplexen und den ternären sogenannten *Hermite'schen Formen*; dass z. B. die Aufgabe „Einen Kettencomplex aus sieben seiner Strahlen zu bestimmen“, einen Grenzfall bildet von der anscheinend recht verschiedenartigen Aufgabe, die unter dem Namen *Problem der Projectivitäten* bekannt ist. Doch wollen wir noch einen Punkt

*) S. des Verfassers Aufsatz: *Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie*, Festschrift der Greifswalder Philosophischen Facultät, 1900. Mit einem Nachtrag abgedruckt im Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1902; ferner: Joh. Petersen, *Géométrie des droites dans l'espace non euclidien.* (Verh. der Dän. Ak. 1900, S. 305.) Die zuerst genannte Arbeit geht wesentlich weiter, enthält aber keine Beweise.

wenigstens kurz besprechen, der uns von besonderer Bedeutung zu sein scheint.

Man kann der durchgeführten Untersuchung eine Reihe von Analogieen entnehmen zwischen Sätzen, in denen der Begriff „Strahl" und solchen, in denen der Begriff „Parallelenbüschel" vorkommt.

Zunächst haben beide Figuren die gleiche Constantenzahl vier. Durch jeden eigentlichen Strahl gehen ∞^1 Parallelenbüschel, und jedes eigentliche Parallelenbüschel enthält ∞^1 Strahlen. Jede der ∞^7 Ketten besteht aus ∞^1 Strahlen, und jede der ∞^7 planaren Kettencongruenzen aus ∞^1 Parallelenbüscheln. Durch jede Kette gehen ∞^2 planare Kettencongruenzen, in jeder planaren Kettencongruenz liegen ∞^2 Ketten. Es giebt ∞^8 reguläre quadratische Strahlencomplexe, die Oerter von je ∞^3 Strahlen, ∞^2 Parallelenbüscheln und ∞^2 planaren Kettencongruenzen sind; und es giebt ∞^8 aplanare Kettencongruenzen, die Oerter von je ∞^3 Parallelenbüscheln, ∞^2 Strahlen und ∞^2 Ketten sind. Es lassen sich ferner z. B. folgende Sätze einander gegenüberstellen, deren zweiten wir im Texte nicht besonders erwähnt haben:

Es giebt einen einzigen quadratischen Strahlencomplex, der acht Strahlen allgemeiner Lage) enthält.*

Es giebt eine einzige aplanare Kettencongruenz, die in acht eigentlichen Parallelenbüscheln allgemeiner Lage) je einen Strahl hat.*

Wiewohl nun diese formalen Analogieen, ähnlich wie die in unseren früheren Abschnitten besprochenen, nicht in alle Einzelheiten verfolgt werden können, so liegt doch auch hier viel mehr als eine äusserliche, sozusagen zufällige Uebereinstimmung vor. — Zur Erklärung betrachten wir einen sogenannten elliptischen Raum von der Krümmung Eins. Wir bezeichnen dann, indem wir uns der Kürze halber auf *reelle* Figuren beschränken, ein Paar von Geraden, oder Strahlen, die in dem zugehörigen absoluten Polarsystem einander entsprechen, als Linienkreuz oder wohl besser als *Strahlenkreuz*. Die Gesammtheit dieser Strahlenkreuze lässt sich dann, wie der Verfasser a. a. O. näher auseinandergesetzt hat, eindeutig und überall-stetig auf die Punktepaare zweier Ebenen abbilden, und ebenso auf die Paare von Geraden in diesen Ebenen, derart, dass in jeder Ebene im Bild desselben Strahlenkreuzes Punkt und Gerade erscheinen, die einander wieder in einem gewissen Polarsystem entsprechen. Durch collineare Transformationen beider Ebenen kann man dann eine halb-einfache Gruppe G_{16} „dual-collinearer" Transformationen der Strahlenkreuze definiren, von der die doppelt gesetzten und auf zwei Blätter vertheilten Strahlenkreuze „contragredient" vertauscht werden, so dass orthogonales Schneiden von Strahlenkreuzen ver-

---

*) Es müssen in dem Satze links die acht Strahlen unabhängig sein in Bezug auf quadratische Complexe (S. 351), im Satze rechts die acht Büschel „unabhängig" in Bezug auf bilineare Complexe von Parallelenbüscheln und so beschaffen, dass das singuläre Büschel von ihnen unabhängig ist. Die analytischen Kriterien hierfür und die Lösung der im Texte bezeichneten Aufgaben lassen sich ohne Weiteres mit Hülfe der Strahlencoordinaten zweiter Art und der Parallelenbüschelcoordinaten herstellen; während bisherigen Methoden die Aufgabe rechts wenigstens kaum zugänglich sein dürfte.

schiedener Blätter (entsprechend der vereinigten Lage ihrer Bilder) erhalten bleibt. In die Theorie dieser Gruppe G_{16} nun (die, wie man unschwer erkennt, zu einer sogenannten gemischten Gruppe mit *acht* Schaaren von Transformationen erweitert werden kann) lassen sich als Raumelemente gewisse Figuren einführen, die unserem *Parallelenbüschel* analog sind, und als *Bänder linksseitig- oder rechtsseitig-parataktischer Strahlenkreuze* bezeichnet werden können. Bilder der einen Art dieser in $2 \cdot \infty^4$ Exemplaren vorhandenen paarweise „reciproken" Figuren sind die Punkte der ersten Bildebene verbunden mit den Geraden der zweiten, Bilder der anderen Art die Geraden der ersten Ebene verbunden mit den Punkten der zweiten. Die genannten Figuren selbst aber bestehen aus Erzeugenden gewisser ∞^4 Flächen zweiten Grades, sogenannter Clifford'scher Flächen, die zugleich *Minimalflächen* sind, und aus den Strahlen oder Strahlenkreuzen durch eine Dilatation mit dem Radius $\frac{\pi}{4}$ (also durch eine specielle *Berührungstransformation*) hervorgehen. Man erkennt unschwer, dass sich zwischen den ∞^4 Strahlenkreuzen und z. B. den ∞^4 linksseitig-parataktischen Strahlenbändern eine durchaus-eindeutige analytische Zuordnung herstellen lässt, und dass dadurch die Gruppe G_{16} isomorph auf sie selbst bezogen wird.

In der dual-projectiven Geometrie im Nicht-Euklidischen Raume positiver Krümmung existirt also ein Uebertragungsprincip, wonach man aus jedem Satz, in dem der Begriff Strahlenkreuz vorkommt, (mindestens) einen anderen ableiten kann, in dem der Begriff linksseitig- (oder rechtsseitig-) parataktisches Strahlenband erscheint.

Gehen wir nun zum Euklidischen Raume über, so tritt an Stelle des Strahlenkreuzes das Linienkreuz oder besser noch der Strahl, an Stelle des parataktischen Bandes das Parallelenbüschel; *das zugehörige Uebertragungsprincip, sammt dem genannten Isomorphismus aber hört zu existiren auf. Damit gehen indessen die Spuren seines einstigen Vorhandenseins nicht sämmtlich verloren: Es erklären sich daraus die angeführten Analogieen.* Zu diesen Trümmern einer den ganzen Strahlenraum umfassenden Beziehung gehört z. B. die auf S. 416 nachgewiesene Beziehung zwischen den Strahlen und Parallelenbüscheln im planaren Complex, die vom Verfasser ursprünglich gerade auf *diesem* Wege gefunden worden ist.

Wir glauben, dass derartige Betrachtungen, die ja natürlich noch weiter verfolgt werden müssen, nicht entbehrt werden können, wenn nicht eine *wesentliche* Seite der Sache fehlen soll. Ausserdem können sie anregend wirken, wenigstens auf den, der nicht blos dieses oder jenes Specialgebiet wie etwas für sich Existirendes zu bearbeiten sucht, sondern sich Rechenschaft ablegen will von dem mannigfach verschlungenen Zusammenhang der Erscheinungen, den die mathematische Wissenschaft überall erkennen lässt. Auch dürfte wohl keine Meinungsverschiedenheit darüber möglich sein, dass Der seinen Fachgenossen einen schlechten Dienst erweist, der ihnen die Kenntniss der von ihm selbst betretenen Forschungswege — sie mögen beschaffen sein wie auch immer — vorzuenthalten sucht. Aus allen diesen Gründen ist uns eine wenn auch fragmentarische Erörterung einer Untersuchungsmethode angemessen erschienen, die auch sonst noch mit ähnlichem Erfolg vielfach verwendet werden kann.

§ 36.

Fortsetzung der Classification der linearen Systeme von Gewinden.

Die von uns vorgenommene Untersuchung über ein- und mehrdimensionale Ketten stützt sich auf die ausgeführte Classification dieser Figuren in Bezug auf die Gruppen G_{17}, G_{16}. Es ist offenbar völlig unmöglich, auch nur die wesentlichsten Eigenschaften z. B. der aplanaren und der planaren Kettencongruenzen in einem einzigen Ausdruck zusammenzufassen, oder selbst die Theorie des „allgemeinen" Falles als vorbildlich für die Theorie des „speciellen" Falles anzusehen. Wollen wir nun dazu übergehen, metrische, der *Euklidischen* Geometrie angehörige Eigenschaften dieser Gebilde zu betrachten, so werden wir aus Gründen derselben Art zunächst eine weitergehende Classification vorzunehmen haben. Indem wir der Kürze halber weitere zwischen G_{17} und die Gruppe der Bewegungen einzuschaltende Untergruppen von G_{17} bei Seite lassen, werden wir sogleich nur solche Figuren in eine Classe stellen, als *äquivalent* betrachten, die durch Euklidische Bewegungen zur Deckung gebracht werden können, also im üblichen Sinne des Wortes *congruente* Figuren.

Das hiermit bezeichnete Problem ist umfangreicher als die in § 29 gelöste Aufgabe: Wir lassen deshalb nunmehr eine Einschränkung eintreten, indem wir vorläufig nur *reelle* Figuren, und *durchweg* nur Aequivalenz in Bezug auf *reelle* Bewegungen betrachten, wie wir es in den beiden ersten Abschnitten überall gethan hatten. Damit werden nur solche Fälle ausgeschlossen, denen von vorn herein ein geringeres Interesse zukommt, als denen, die wir wirklich behandeln werden. Die anzuwendende Methode reicht übrigens für alle Fälle aus.

Wir nehmen nunmehr die in § 29 abgebrochene Untersuchung wieder auf, um sie, unter Benutzung des dort eingeführten Systems von Bezeichnungen, in der angedeuteten Richtung weiterzuführen. Jede der aufgeführten Classen *reeller* linearer Systeme von Gewinden werden wir also jetzt in eine endliche oder unendliche Zahl neuer Classen zerlegen.

Ein wesentliches Hülfsmittel der Classification wird für uns sein die Aufsuchung der mit irgend einem Paar reciproker Systeme von Gewinden verbundenen *Hauptstrahlen. So werden wir allgemein Strahlen nennen, die Hauptaxen sind für reelle eigentliche Gewinde beider zu einander reciproken Systeme.* Sie werden zugleich *Hauptstrahlen* der zugehörigen Paare von Ketten genannt, sofern diese (wie auf S. 327 näher angegeben) in einem ausgesprochenen Reciprocitätsverhältniss zu einander stehen.

I, V. *Systeme erster und fünfter Stufe.* (S. S. 313.)

a) ∞^1 Classen. Aequivalent gegenüber Bewegungen sind alle eigentlichen Gewinde, die denselben Parameter p haben, und deren jedes also durch eine geeignete Bewegung auf die canonische Form

Ia) $$\{1+p\varepsilon,\ 0,\ 0\}$$

gebracht werden kann. Umgekehrt sind Gewinde, die zu verschiedenen Werthen von p gehören, niemals äquivalent. Nehmen wir die Classification jedoch mit Bezug auf die Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen vor, so sind nur *zwei* Classen ($p \neq 0$, $p = 0$) zu unterscheiden. Für das reciproke Gewebe ergiebt sich die canonische Basis

Va) $$\left\{\begin{matrix} 1-p\varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1-p\varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & 1-p\varepsilon \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

In diesem Falle ist also, trivialer Weise, die Hauptaxe O des Gewindes Ia) *Hauptstrahl* für dieses Gewinde und das reciproke Gewebe, und Symmetrieaxe beider Gebilde.

b) Eine Classe, wie zuvor (S. 314), „Hauptstrahlen" existiren selbstverständlich nicht.

II, IV. *Systeme zweiter und vierter Stufe.* (S. 314.)

a) ∞^2 Classen. Durch Bewegungen lässt sich das allgemeine Büschel von Gewinden auf die Basis bringen

IIa) $$\left\{\begin{matrix} 0, & 1+(p+r)\varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & 1+(p-r)\varepsilon \end{matrix}\right\},$$

und das reciproke Gebüsch auf die Basis

IVa) $$\left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 1-p\varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1-(p+r)\varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & 1-(p-r)\varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

Gegenüber Aehnlichkeitstransformationen ergeben sich nur ∞^1 Classen, und ähnliche Reductionen treten zum Theil bei den weiter zu behandelnden Figuren ein, wo wir die Aehnlichkeitstransformationen nicht besonders berücksichtigen werden.

Die verschiedenen Werthen von p entsprechenden Systeme von Gewinden in IIa) oder IVa) gehören zu demselben Ort der Hauptaxen; es giebt daher ∞^1 Classen von Strahlenketten, die durch die verschiedenen Werthe von r^2 charakterisirt sind. Ist $r \neq 0$, so ist die Kette ein Cylindroid (*erster Typus, α,* von Büscheln und Gebüschen der Art a); die Kette enthält dann zwei reelle, einander senkrecht schneidende *Hauptstrahlen,* die zugleich dem reciproken Kettencomplex angehören. Ist $r = 0$ (*zweiter Typus, β*), so entsteht ein ebenes Strahlenbüschel. In ihm ist *jeder* Strahl Hauptstrahl, nämlich auch Strahl des reciproken Kettencomplexes. In beiden Fällen (α, β) sind die Hauptstrahlen *Symmetrieaxen* der betrachteten Figuren.

b) ∞^2 Classen. Canonische Basis:

IIb)
$$\left\{ \begin{matrix} 0, & 1+p\varepsilon, & 0 \\ 0, & q\varepsilon, & \varepsilon \end{matrix} \right\},$$

IVb)
$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 1-p\varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1-p\varepsilon, & -q(1-p\varepsilon) \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Ist $q \neq 0$ (*erster Typus, α*), so giebt es keinen Hauptstrahl; ist $q = 0$ (*zweiter Typus, β*), so ist *jeder* Strahl des Parallelenbüschels IIb) Hauptstrahl für das betrachtete Gewindebüschel und sein reciprokes Gebüsch, und zugleich Symmetrieaxe dieser Figuren.

c) Eine Classe. (S. 315.)

Es giebt keinen Hauptstrahl.

d) Eine Classe. „Hauptstrahlen" giebt es natürlich auch in diesem Falle nicht.

III, III. *Systeme dritter Stufe.* (S. 316.)

Die hierher gehörigen Systeme machen etwas verwickeltere Betrachtungen nöthig.

a) Wir knüpfen an die in § 39 unter Nr. (5) aufgeführte Darstellung der aplanaren Kettencongruenzen an, und fragen nach den Strahlen, die eine solche Congruenz mit ihrer reciproken gemein hat. Daraus werden sich rechtwinklige Strahlentripel ergeben, die wir dann als Coordinatenaxen einführen können. Damit findet sich zugleich die gesuchte Classification der aplanaren Systeme dritter Stufe von Gewinden. Dieselben Gleichungen stellen nämlich, wenn man $\mathfrak{X}_{23}$ u. s. f. durch

$\mathfrak{X}_{23} + \lambda\mathfrak{X}_{01}$ u. s. w. ersetzt, und dann die Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ als veränderliche Gewindecoordinaten betrachtet, offenbar auch die ∞^9 aplanaren Gewindebündel dar.

Die Bestimmung der Strahlen, die die aplanare Kettengruenz (q_{ik}) mit ihrer reciproken $(-q_{ki})$ gemein hat, hängt nun ab von der Lösung der sechs Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{23} &= -(q_{11}+\lambda)\mathfrak{X}_{01} - q_{12}\mathfrak{X}_{02} - q_{13}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{23} &= \quad (q_{11}-\mu)\mathfrak{X}_{01} + q_{21}\mathfrak{X}_{02} + q_{31}\mathfrak{X}_{03}, \end{aligned} \qquad \text{u. s. w.}$$

Hier geht aus jedem Lösungssystem $\mathfrak{X}_{ik}$, λ ein anderes, aber denselben Strahl $\mathfrak{X}$ darstellendes Lösungssystem hervor, wenn man λ und μ um dieselbe Constante c vermehrt, und zugleich $\mathfrak{X}_{23}$ u. s. f. durch $\mathfrak{X}_{23} - c\mathfrak{X}_{01}$ u. s. w. ersetzt. Man darf also von vorn herein $\mu = -\lambda$ setzen; damit wird dann die Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung eines Systems von Gleichungen von wohlbekannter Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= (q_{11}+\lambda)\,\mathfrak{X}_{01} + \tfrac{1}{2}(q_{12}+q_{21})\mathfrak{X}_{02} + \tfrac{1}{2}(q_{31}+q_{13})\mathfrak{X}_{03}, \\ 0 &= \tfrac{1}{2}(q_{12}+q_{21})\mathfrak{X}_{01} + (q_{22}+\lambda)\,\mathfrak{X}_{02} + \tfrac{1}{2}(q_{23}+q_{32})\mathfrak{X}_{03}, \\ 0 &= \tfrac{1}{2}(q_{31}+q_{13})\mathfrak{X}_{01} + \tfrac{1}{2}(q_{23}+q_{32})\mathfrak{X}_{02} + (q_{33}+\lambda)\,\mathfrak{X}_{03}. \end{aligned}$$

Hat die cubische Gleichung

$$(3)\qquad 0 = \begin{vmatrix} q_{11}+\lambda, & \tfrac{1}{2}(q_{12}+q_{21}), & \tfrac{1}{2}(q_{31}+q_{13}) \\ \tfrac{1}{2}(q_{12}+q_{21}), & q_{22}+\lambda, & \tfrac{1}{2}(q_{23}+q_{32}) \\ \tfrac{1}{2}(q_{31}+q_{13}), & \tfrac{1}{2}(q_{23}+q_{32}), & q_{33}+\lambda \end{vmatrix}$$

drei verschiedene Wurzeln, so sind diese nothwendig reell. Es giebt dann nur drei, stets reelle, Lösungen unserer Aufgabe, und die fraglichen drei Strahlen bilden ein Axenkreuz, dessen Strahlen sich rechtwinklig schneiden, da die zu zweien unter ihnen gehörige gemeinsame Normale ebenfalls eine Lösung sein muss. Wir bezeichnen die vorgelegte Congruenz und ihre reciproke, sowie jedes der zugehörigen Bündel von Gewinden, in diesem Falle als *zum ersten Typus* (α) *gehörig*. Hat zweitens die cubische Gleichung (3) eine einfache und eine doppelte Wurzel, so entspricht der ersten eine isolirte Lösung, der zweiten eine Schaar von ∞^1 Lösungen unserer Aufgabe, und diese letzten bilden ein ebenes Strahlenbüschel. (*Zweiter Typus*, β, von aplanaren Kettencongruenzen und zugehörigen Gewindebüscheln.) Im Falle einer dreifachen Wurzel endlich giebt es ∞^2 Lösungen, die nothwendig ein Strahlenbündel mit eigentlichem Scheitel bilden: Die Congruenz fällt mit ihrer reciproken zusammen. (*Dritter Typus*, γ.)

In allen drei Fällen existirt wenigstens ein reelles System recht-

winkliger Coordinaten, deren Axen Lösungen der Aufgabe sind, und bei deren Einführung daher alle nicht in der Diagonale von (3) stehenden Grössen q_{ik} verschwinden. Zu den ∞^1 Paaren von reciproken Gewinde-Bündeln, die mit unserer Congruenz und ihrer reciproken verknüpft sind, gehört mithin, wenn e_1, e_2, e_3 drei der Bedingung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{4}$$

genügende Grössen bedeuten, je eine Doppelbasis der Form

$$\text{IIIa)} \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \pm (p - e_1)\varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & 1 \pm (p - e_2)\varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \pm (p - e_3)\varepsilon \end{matrix} \right\}, \tag{5}$$

und diese ist durch Bewegungen nicht mehr zu vereinfachen.

Wir mögen etwa die oberen Vorzeichen als der vorgelegten Congruenz entsprechend betrachten ($q_{ii} = e_i - p$). Die unteren Zeichen entsprechen dann der reciproken Congruenz. Die verschiedenen Werthe von p geben die zugehörigen $2 \cdot \infty^1$ Bündel von Gewinden. Die aufgestellten drei Typen sind nun wie folgt zu unterscheiden:

(α) $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ (∞^3 Classen).

(β) $e_1 \neq e_2$, $e_2 = e_3$ (∞^2 Classen).

(γ) $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ (∞^1 Classen).

Mit Hülfe des eingeführten Begriffs der Hauptstrahlen (S. 444) können wir hier schon die drei Typen von aplanaren Kettencongruenzen und Gewindebündeln wie folgt kennzeichnen:

Eine jede reelle aplanare Kettencongruenz des ersten Typus (α) hat drei (stets reelle) Hauptstrahlen, die ein rechtwinkliges Axenkreuz bilden.

Jede reelle aplanare Kettencongruenz des zweiten Typus (β) enthält ein von Hauptstrahlen gebildetes ebenes Strahlenbüschel, und ausserdem einen isolirten Hauptstrahl, die Hauptaxe des Büschels.

Jede reelle aplanare Kettencongruenz des dritten Typus (γ) endlich besteht ganz aus Hauptstrahlen.

In allen drei Fällen sind die Hauptstrahlen Symmetrieaxen für jede der beiden reciproken Congruenzen, und für jedes der zusammengehörigen Gewindebündel. Sie schneiden sich in einem eigentlichen Punkte o, dem „Mittelpunkt" der Kettencongruenzen und zugehörigen Gewindebündel, und dieser bestimmt eine Spiegelung, die die reciproken Bündel und Kettencongruenzen mit einander vertauscht.

Dieselbe Eigenschaft haben dann natürlich auch die Spiegelungen an den Verbindungsebenen von je zwei Hauptstrahlen.

b) Ein *planares* Bündel von Gewinden enthält, wie wir gesehen haben, stets ein und nur ein uneigentliches Gewinde. Von diesem Gewinde ist im Allgemeinen verschieden das uneigentliche Gewinde, das dem reciproken Bündel angehört. Die Nebenaxen (Hauptaxen) beider Gewinde schneiden (kreuzen oder schneiden) einander niemals rechtwinklig. Wir wählen, in beiden Bündeln, diese Gewinde als Elemente der Basis.

Man kann nun, nach Auflösung einer quadratischen Gleichung, das Coordinatensystem so legen, dass die unendlich fernen Axen $x_0 = x_1 = 0$ und $x_0 = x_3 = 0$ die Winkel jener Nebenaxen halbiren. Die Basis des einen Bündels nimmt dann die Form an

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon\ , & 0\ , & q\varepsilon \\ a_{21} + \alpha_{21}\varepsilon\ , & a_{22} + \alpha_{22}\varepsilon\ , & a_{23} + \alpha_{23}\varepsilon \\ a_{31} + \alpha_{31}\varepsilon\ , & a_{32} + \alpha_{32}\varepsilon\ , & a_{33} + \alpha_{33}\varepsilon \end{array}\right\} \quad (q \neq \pm 1),$$

während die Basis des reciproken Bündels ein Element $\{\varepsilon,\ 0,\ -q\varepsilon\}$ enthalten muss. Da demnach die Hauptaxen der Gewinde des ersten Bündels sämmtlich rechte Winkel bilden mit den Strahlen des Parallelenbündels

$$\{1 + \lambda\varepsilon,\ \mu\varepsilon,\ -q + \nu\varepsilon\},$$

so folgt $a_{21} = qa_{23}$, $a_{31} = qa_{33}$. Wenigstens eine der beiden Grössen a_{23}, a_{33} ist von Null verschieden, da die Determinante aus den Elementen obiger Basis einen von Null verschiedenen vectoriellen Bestandtheil haben muss (S. 316). Sei etwa $a_{33} \neq 0$, so ergiebt sich eine vereinfachte Basis der Form:

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{ccc} \varepsilon\ , & 0 & , \quad q\varepsilon \\ 0\ , & 1 + \alpha_{22}\varepsilon\ , & \alpha_{23}\varepsilon \\ q\ , & \alpha_{32}\varepsilon & , \quad 1 + \alpha_{33}\varepsilon \end{array}\right\};$$

eine Basis des reciproken Bündels wird dann erhalten, wenn man q, α_{ik} durch $-q, -\alpha_{ki}$ ersetzt.

Jetzt suchen wir die beiden Congruenzen gemeinsamen Strahlen, was zu den Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{array}{ll} \mathfrak{X}_{01} = q\mathfrak{X}_{03} & ,\ \mathfrak{X}_{01} = -q\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{31} = \alpha_{22}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{32}\mathfrak{X}_{03} & ,\ \mathfrak{X}_{31} + 2\lambda\mathfrak{X}_{02} = -\alpha_{22}\mathfrak{X}_{02} - \alpha_{23}\mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}_{12} = q\mathfrak{X}_{23} + \alpha_{23}\mathfrak{X}_{02} + \alpha_{33}\mathfrak{X}_{03}, & \mathfrak{X}_{12} + 2\lambda\mathfrak{X}_{03} = \\ \quad = -q(\mathfrak{X}_{23} + 2\lambda\mathfrak{X}_{01}) - \alpha_{32}\mathfrak{X}_{02} - \alpha_{33}\mathfrak{X}_{03} & \end{array}$$

führt.

Wir bezeichnen unsere Gewindebündel und Congruenzen als *zum ersten Typus gehörig*, wenn (α) $q \neq 0$. Es giebt dann einen einzigen gemeinsamen eigentlichen Strahl beider Congruenzen,

$$\left\{ \frac{-\alpha_{23}-\alpha_{32}}{2q}\varepsilon,\ 1,\ \frac{\alpha_{23}-\alpha_{32}}{2}\varepsilon \right\};$$

indem wir in diesen die x_2-Axe verlegen, eine geeignete Schiebung längs dieser Axe vornehmen, und schliesslich Basis und Bezeichnungen passend wählen, erhalten wir für die reciproken Bündel die canonische Darstellung:

$$\text{IIIb}\alpha) \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & , & 0 & , & q\varepsilon \\ 0 & , & 1+p\varepsilon, & & 0 \\ q(1+p\varepsilon) & , & 0 & , & 1+p\varepsilon \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} \varepsilon & , & 0 & , & -q\varepsilon \\ 0 & , & 1-p\varepsilon, & & 0 \\ -q(1-p\varepsilon), & & 0 & , & 1-p\varepsilon \end{matrix} \right\} \quad (q \neq \pm 1, 0).$$

Zur Herstellung dieser Doppelbasis bedarf man, wie gesagt, ausser rationalen Operationen, der Auflösung einer quadratischen Gleichung.

Sei zweitens $q = 0$, so fallen die zu den reciproken Congruenzen gehörigen Parallelenbündel zusammen, und die Basis lässt sich auf rationale Weise in die Form (6) setzen. Die wie oben aufzustellenden Gleichungen (7) ziehen jetzt die Gleichungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} (\alpha_{22}+\lambda)\mathfrak{X}_{02} + \frac{\alpha_{23}+\alpha_{32}}{2}\mathfrak{X}_{03} &= 0, \\ \frac{\alpha_{23}+\alpha_{32}}{2}\mathfrak{X}_{02} + (\alpha_{33}+\lambda)\mathfrak{X}_{03} &= 0 \end{aligned}$$

nach sich.

Hat die quadratische Gleichung

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{22}+\lambda, & \frac{\alpha_{23}+\alpha_{32}}{2} \\ \frac{\alpha_{23}+\alpha_{32}}{2}, & \alpha_{33}+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln (*zweiter Typus*, β, von planaren Gewindebündeln und Congruenzen), so entspricht jeder von diesen eine Schaar von ∞^1 Lösungen unserer Aufgabe, die ein Parallelenbüschel bilden. Beide Büschel sind nothwendig reell, und durchsetzen einander rechtwinklig. Durch eine Bewegung kann man erreichen, dass die x_2-Axe und die x_3-Axe selbst diesen Büscheln angehören; so entsteht schliesslich eine Doppelbasis der Form:

$$\text{IIIb}\beta)\quad \left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0 & , & 0 \\ 0, & 1 \pm (p+r)\varepsilon, & & 0 \\ 0, & 0 & , & 1 \pm (p-r)\varepsilon \end{matrix}\right\} (r \neq 0).$$

Also auch in diesem Falle ist die Auflösung einer quadratischen Gleichung zur Herstellung der canonischen Basis erforderlich.

Hat endlich die quadratische Gleichung (9) zwei zusammenfallende Wurzeln (*dritter Typus*, γ, von planaren Gewindebündeln und Congruenzen), so ergiebt sich, lediglich durch rationale Operationen, für beide Bündel von Gewinden die uns bereits bekannte Form der Basis

$$\text{IIIb}\gamma)\quad \left\{\begin{matrix} \varepsilon, & 0 & , & 0 \\ 0, & 1 \pm p\varepsilon, & & 0 \\ 0, & 0 & , & 1 \pm p\varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

Wir erhalten also in den drei Fällen (α) ∞^2, (β) ∞^2, (γ) ∞^1 Classen von Gewindebündeln.

Ein genaueres Studium der planaren Kettencongruenzen werden wir in § 39 vornehmen. Hier schon heben wir, um die Unterscheidung der drei Typen zu erleichtern, das Folgende hervor:

Jede reelle planare Kettencongruenz des ersten Typus (α) *enthält einen einzigen Hauptstrahl. Jede reelle planare Kettencongruenz des zweiten Typus* (β) *enthält zwei (reelle) von Hauptstrahlen gebildete zu einander reciproke Parallelenbüschel. Jede reelle planare Kettencongruenz des dritten Typus* (γ) *endlich besteht ganz aus Hauptstrahlen.*

In allen drei Fällen sind die Hauptstrahlen Symmetrieaxen für jede der beiden reciproken Congruenzen und für alle zugehörigen Gewindebündel.

c) ∞^1 Classen. Dieser Fall, in dem die beiden reciproken Bündel von Gewinden ihre Hauptaxen in je einem Normalennetz haben, entspricht dem unter IIIbα) ausgeschlossenen Grenzfall $q = \pm 1$. Eine rational herstellbare Doppelbasis ist

$$\text{IIIc})\quad \left\{\begin{matrix} 1+p\varepsilon, & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1+p\varepsilon, & 0 \\ 0 & , & \varepsilon & , & 0 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1-p\varepsilon, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 1-p\varepsilon \\ 0 & , & 0, & \varepsilon \end{matrix}\right\}.$$

Es existirt *ein* Hauptstrahl, zugleich Symmetrieaxe der zusammengehörigen Figuren.

d) ∞^2 Classen. Jedes der beiden reciproken Bündel von Gewinden hat seine Hauptaxen in einem Parallelenbündel, und die Rich-

tungen dieser beiden Bündel sind niemals zu einander rechtwinklig. Wir nehmen an, dass diese Richtungen zur Ebene $x_2 = 0$ parallel sind, und dass die x_3-Axe und die x_1-Axe ihren Winkel halbiren, was nöthigenfalls durch Auflösung einer quadratischen Gleichung erreicht werden kann. Man erhält unschwer die Doppelbasis

$$\text{III d)} \quad \left\{ \begin{matrix} 1+p\varepsilon, & 0, & q(1+p\varepsilon) \\ 0 \quad , & \varepsilon, & 0 \\ q\varepsilon \quad , & 0, & \varepsilon \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1-p\varepsilon, & 0, & -q(1-p\varepsilon) \\ 0 \quad , & \varepsilon, & 0 \\ -q\varepsilon \quad , & 0, & \varepsilon \end{matrix} \right\}, \quad (q \neq \pm 1).$$

Ein Hauptstrahl existirt nicht, so lange $q \neq 0$ (*erster Typus, α*, des Falles III d); ist $q = 0$, so fallen beide Parallelenbündel zusammen, *jeder* ihrer Strahlen ist Hauptstrahl (*zweiter Typus, β*), ausserdem Symmetrieaxe.

e, f) (S. S. 318). Je eine Classe von Gewindebündeln. Keine Hauptstrahlen.

Nachdem wir nunmehr alle möglichen linearen Systeme von reellen Gewinden aufgezählt und classificirt haben, können wir dazu übergehen, metrische Eigenschaften dieser Figuren zu beschreiben, nämlich solche Eigenschaften aufzusuchen, die zwar durch Transformationen der Gruppen Γ_{18} und G_{17} zerstört werden können, nicht aber durch Euklidische Bewegungen. Wir werden hierbei, nach dem Vorgange von R. Ball, unser Augenmerk hauptsächlich richten auf die von den Hauptaxen der betrachteten Gewinde gebildeten Figuren, die von uns sogenannten *Ketten*, und insbesondere auf die in diesen Ketten enthaltenen geometrischen Oerter, die dadurch entstehen, dass man aus irgend einem linearen System von Gewinden nicht constanten Parameters die Gewinde heraushebt, deren Parameter gleich Null oder überhaupt gleich einer Constanten ist. Wir werden uns im Ganzen kurz fassen, werden aber die interessantesten jener Gebilde, die Kettencongruenzen, einer eingehenden Betrachtung unterziehen.

Parametermannigfaltigkeiten werden wir allgemein die Oerter der Hauptaxen aller Gewinde von bestimmtem Parameterwerth in einem vorgelegten linearen System nennen. Man erkennt ohne Weiteres, dass diese Oerter mit dem Inbegriff der eigentlichen Strahlen eines (eigentlichen oder uneigentlichen) Gewindes, oder des Durchschnittes mehrerer

Gewinde übereinstimmen, also aus der projectiven Geometrie wohlbekannte Figuren sind. Wir werden diese Oerter der kürzeren Ausdrucksweise wegen im Plücker'schen Linienconti nuum ergänzen, und also z. B. kurz von einem Gewinde reden, wo wir dessen eigentliche (zunächst reelle) Gerade meinen. Bei dem Studium dieser Oerter kann mit Nutzen ein Satz verwendet werden, der eine Ergänzung zu dem auf S. 240 angegebenen Satze bildet, und den wir zunächst vorführen wollen.

Vermehrt man den Parameter eines von zwei gegebenen reellen Gewinden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$, *unter Erhaltung seiner Hauptaxe, um eine Grösse* $\frac{\lambda}{2}$, *so wird der Quotient aus dem relativen Moment und dem relativen Comoment zweier zugehöriger Alternanten um das Doppelte dieser Grösse vermehrt.*

In Zeichen (vgl. S. 192, Nr. 28, 29):

$$(10) \qquad \frac{(\mathfrak{X}'\,\mathfrak{U})}{(\mathfrak{X}'|\mathfrak{U})} = \frac{(\mathfrak{X}\,\mathfrak{U})}{(\mathfrak{X}|\mathfrak{U})} + \lambda, \text{ wenn } \frac{1}{2}\frac{(\mathfrak{X}'\,\mathfrak{X}')}{(\mathfrak{X}'|\mathfrak{X}')} = \frac{1}{2}\frac{(\mathfrak{X}\,\mathfrak{X})}{(\mathfrak{X}|\mathfrak{X})} + \frac{\lambda}{2}.$$

Zunächst hängt dieser Quotient, da er homogen ist vom Grade Null, gar nicht von den Alternanten selbst, sondern nur von den zugehörigen Gewinden ab. Dann aber ergiebt sich der Satz ohne Weiteres, wenn man bedenkt, dass eine Vermehrung des Parameters von $\mathfrak{X}$ um $\frac{\lambda}{2}$ durch Multiplication von $\mathfrak{X}_{01} + \varepsilon\mathfrak{X}_{23}$ u. s. w. mit $1 + \lambda\varepsilon$ bewirkt wird. Wählt man, beide Gewinde zugleich ändernd, die zugehörigen Grössen λ und μ insbesondere so, dass die Parameter der transformirten Gewinde verschwinden, so erhält man eine *geometrische Deutung des genannten Quotienten:* Sind $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{U}'$ die Hauptaxen der Gewinde $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$, und $P_{\mathfrak{X}}$, $P_{\mathfrak{U}}$ deren Parameter, so ergiebt sich nach § 17 (Nr. 15, 33) die später von uns zu benutzende Gleichung

$$(11) \qquad \frac{(\mathfrak{X}\,\mathfrak{U})}{(\mathfrak{X}|\mathfrak{U})} = 2P_{\mathfrak{X}} + 2P_{\mathfrak{U}} - \text{dist.}\,(\mathfrak{X}', \mathfrak{U}') \cdot \text{tg ang}\,(\mathfrak{X}', \mathfrak{U}').$$

Eine Folgerung daraus ist der mehrfach nützliche Satz von R. Ball:

Sind zwei eigentliche (reelle) Gewinde conjugirt, und schneiden sich zugleich ihre Hauptaxen (in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt), so schneiden sich entweder diese unter rechtem Winkel, oder die Gewinde haben entgegengesetzt gleiche Parameter.

Umgekehrt, haben zwei eigentliche Gewinde eine der beiden letzten Eigenschaften, und zugleich eine der beiden ersten, so haben sie von diesen auch die andere.

Wir wenden uns nun zu der in Aussicht genommenen Untersuchung.

I, V. *Systeme erster und fünfter Stufe.*

a) Die Basis des zu betrachtenden einzelnen Gewindes (erster Schicht) sei Ia). (S. 445.) Der Parameter irgend eines der conjugirten Gewinde (zweiter Schicht) (vgl. Va, S. 445)

$$(12) \qquad \{ \tau_1(1 - p\varepsilon),\ \tau_2(1 - p\varepsilon) + \tau_4\varepsilon,\ \tau_3(1 - p\varepsilon) + \tau_5\varepsilon \}$$

ist dann

$$(13) \qquad P_\tau = -p + \frac{\tau_2\tau_4 + \tau_3\tau_5}{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Setzen wir ihn gleich Null, so erhalten wir als Ort der Hauptaxen aller dieser Bedingung genügenden Gewinde $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 : \tau_4 : \tau_5$ die sämmtlichen eigentlichen Geraden des Gewindes Ia). Aus dem eben bewiesenen Satze folgt dann:

Ist ein Gewebe von Gewinden zu einem eigentlichen (allgemeinen oder ausgearteten) Gewinde reciprok, so sind die zugehörigen ∞^1 Parametercomplexe $P_\tau =$ const. von einander verschiedene eigentliche Gewinde, und identisch mit denen, die zu dem reciproken Gewinde des Gewebes coaxial sind.

Allgemeiner, bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}$ das einzelne Gewinde erster Schicht, vom Parameter p, und mit $\mathfrak{U}$ irgend ein Gewinde eines Gewebes zweiter Schicht, das reciprok ist zu einem mit $\mathfrak{X}$ coaxialen Gewinde vom Parameter q, so folgt

$$(14) \qquad \frac{(\mathfrak{X}\,\mathfrak{U})}{(\mathfrak{X}|\mathfrak{U})} = p - q.$$

Der Quotient aus dem relativen Moment und dem relativen Comoment der Gewinde $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ ändert sich also nicht, wenn man das Gewinde $\mathfrak{U}$ in seinem Gewebe variirt.

Aehnliche Sätze gelten in mehreren weiter zu betrachtenden Fällen, wo wir sie nicht immer hervorheben werden.

b) Es gilt offenbar der Satz:

Wird ein Gewebe von Gewinden im Grenzfall zu einem uneigentlichen Gewinde reciprok, so vereinigen sich die zugehörigen Parametercomplexe mit eben diesem uneigentlichen Gewinde.

Augenscheinlich ist, da es sich hier nur um reelle Figuren handelt, diese Aussage nur ein anderer Ausdruck dafür, dass sich die Gewinde des Gewebes auf coaxiale Bündel vertheilen lassen, deren Hauptaxen in einem planaren Complex liegen.

II, IV) *Systeme zweiter und dritter Stufe.*

a, α) In diesem Falle ($r \neq 0$) bilden die Hauptaxen der Gewinde eines Bündels

$$(15) \qquad \{ 0,\ \sigma_2 + \sigma_2 (p + r)\varepsilon,\ \sigma_3 + \sigma_3 (p - r)\varepsilon \}$$

ein *Cylindroid.* Wir führen der Vollständigkeit halber die (zumeist bekannten) Eigenschaften dieser Fläche auf, die weiterhin zu kennen nützlich ist, und die übrigens vom Leser leicht abgeleitet werden können*).

Das reelle Cylindroid enthält, wie schon bemerkt, zwei stets reelle *Hauptstrahlen*, die einander rechtwinklig schneiden. Es sind das, in der canonischen Form (15), die x_2-Axe ($\sigma_3 = 0$) und die x_3-Axe ($\sigma_2 = 0$) des benutzten Coordinatensystems. Durch sie werden alle übrigen Strahlen des Cylindroids involutorisch gepaart ($\sigma_2 \sigma_3' + \sigma_3 \sigma_2' = 0$), derart, dass die Hauptstrahlen die Winkelhalbirenden (S. 9) sind für je zwei gepaarte Strahlen. Unter den gepaarten Strahlen befinden sich insbesondere zwei, die einander rechtwinklig kreuzen, und die wir *Grenzstrahlen* nennen wollen ($\sigma_2 : \sigma_3 = \pm 1$). Diese können irgend zwei einander rechtwinklig kreuzende eigentliche Strahlen sein; sie bestimmen, wie überhaupt von einander verschiedene *gepaarte* Strahlen, das Cylindroid vollständig. Die beiden Punkte, in denen die Grenzstrahlen die Hauptaxe des Cylindroids (die x_1-Axe) treffen, sind *Grenzpunkte* für die Schnittpunkte der Hauptaxe mit reellen Strahlen des Cylindroids. Solche gehen nur durch die zwischen den Grenzpunkten gelegenen Punkte der Hauptaxe, und zwar durch jeden solchen Punkt ihrer zwei. Diese Strahlenpaare bilden eine zweite Involution ($\sigma_2 \sigma_2' - \sigma_3 \sigma_3' = 0$), deren Doppelelemente die Grenzstrahlen sind. Die mit $2r$ bezeichnete Grösse ist der Abstand des Grenzstrahls (1:1) vom Grenzstrahl (1 : — 1), gemessen in der positiven Richtung der x_1-Axe.

Als Ort von Punkten wird das Cylindroid dargestellt durch die Gleichung

$$(16) \qquad x_1 (x_2^2 + x_3^2) + 2 r x_0 x_2 x_3 = 0,$$

als Ort von Ebenen durch die Gleichung

*) Man vergleiche wegen elementargeometrischer Eigenschaften des Cylindroids und des reciproken Kettencomplexes die auf S. 227 und S. 1 citirten Werke von Plücker, Ball und Schell; ferner R. Sturm, Liniengeometrie (Leipzig, 1892—1896), I, Nr. 110 u. ff.; endlich ein Werk des Herrn K. Zindler über (Plücker'sche) Liniengeometrie, das demnächst in der „Sammlung Schubert" erscheinen soll. Man findet dort auch eine besonders schöne Abbildung des Cylindroids.

$$u_0(u_2^2 + u_3^2) + 2ru_1u_2u_3 = 0. \tag{17}$$

Betrachtet man die Coefficienten der dualen Grössen in (15) als Gewindecoordinaten, so hat man, den verschiedenen Werthen von p entsprechend, die ∞^1 zugehörigen Büschel von Gewinden vor sich. Der Parameter des einzelnen Gewindes $\sigma_2 : \sigma_3$ im Büschel (p) ist

$$P_\sigma = p + r\frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \tag{18}$$

Er liegt zwischen den Grenzen $p - r$ und $p + r$, und erreicht diese für die beiden Hauptstrahlen. *Zu je zwei Strahlen des Cylindroids, die durch die Hauptstrahlen harmonisch getrennt sind, gehören in jedem zugehörigen Gewindebüschel Gewinde mit gleichen Parametern. Die Parametermannigfaltigkeiten der ∞^1 zu einem Cylindroid gehörigen Gewindebüschel sind also Strahlenpaare.*

Es ist übrigens einfacher zu sagen:

Sie sind Paare gerader Linien. Denn die Parametermannigfaltigkeiten sind, wie bemerkt, allgemein Durchschnitte von Gewinden, und diese können auf einfachere Art in das projective Continuum der reellen und imaginären *Geraden* hinein fortgesetzt werden, als in das Continuum der reellen und imaginären Strahlen. Natürlich muss man dann auch das Cylindroid selbst als Ort von reellen und imaginären *Geraden* betrachten, was aber, wie wir wissen, im reellen Gebiete keinen Unterschied macht.

In dem Büschel $p = 0$ haben die Grenzstrahlen, oder also die Grenz*linien* des Cylindroids den Parameter Null, und je zwei von ihnen harmonisch getrennte Erzeugende der Fläche entsprechen conjugirten Gewinden, solchen mit entgegengesetzt gleichen Parametern.

Die zu den Gewinden (15) conjugirten Gewinde des reciproken Gebüsches sind

$$\{\tau_2 + (\tau_1 - p\tau_2)\varepsilon,\ \tau_3 - \tau_3(p + r)\varepsilon,\ \tau_4 - \tau_4(p - r)\varepsilon\}; \tag{19}$$

der jedesmalige Parameter ist

$$P_\tau = -p + \frac{\tau_1\tau_2 - r\tau_3^2 + r\tau_4^2}{\tau_2^2 + \tau_3^2 + \tau_4^2}. \tag{20}$$

Der Leser wird leicht eine zur Gleichung (14) analoge Gleichung bilden und daraus die entsprechende Folgerung ziehen. Wir heben nur einen besonderen Fall hervor:

Die ∞^1 Parametercongruenzen irgend eines der Gebüsche von Gewinden, die ihre Hauptaxen in einem reellen, zu einem vorgelegten Cylin-

droid reciproken Kettencomplex haben, sind Liniencongruenzen erster Ordnung und 1. Classe.

Ihre Basislinien (Brennlinien) bilden die Parametermannigfaltigkeiten des reciproken Büschels von Gewinden, also die Paare von reellen oder conjugirt-imaginären Geraden des Cylindroids, die von den Hauptstrahlen (oder „Hauptgeraden") des Cylindroids harmonisch getrennt werden.

Man kann also die Geraden des Kettencomplexes, wenn man diesen als ein dem *Plücker'schen Liniencontinuum* angehöriges Gebilde betrachtet, nicht nur auf ∞^1 Normalennetze, sondern noch auf eine zweite Art auf ∞^1 Liniennetze (Congruenzen 1. O. 1. Cl.) vertheilen (und, wie leicht zu zeigen, auf keine andere Weise).

Jede vom singulären Strahl O verschiedene reelle eigentliche Gerade $\mathfrak{U}$ *des Kettencomplexes schneidet eine Erzeugende des Cylindroids unter rechtem Winkel, und trifft ausserdem die beiden reellen oder conjugirt-imaginären Geraden einer der* ∞^1 *Parametermannigfaltigkeiten auf dem Cylindroid.* (Vgl. Seite 57 unten.) In irgend einem zum Cylindroid gehörigen Büschel von Gewinden haben die beiden Gewinde, die zu dem erwähnten Geradenpaar gehören, wie gesagt, gleiche Parameter, nämlich solche, die entgegengesetzt gleich sind dem Parameter des zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Gewindes des reciproken Gebüsches. (Ball.)

Die Gleichung des Kettencomplexes ist dieselbe in Plücker'schen oder Strahlencoordinaten erster Art:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{31} \\ \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix} - 2r\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{03} = 0. \tag{21}$$

Je nach der Art der Fortsetzung definirt diese Gleichung einen quadratischen Liniencomplex oder einen quadratischen Strahlencomplex.

a, β) Wird $r = 0$, geht das Cylindroid, betrachtet als Kette, in ein *Strahlenbüschel* über, so zerfällt es als Ort von reellen und imaginären Punkten und Ebenen in leicht kenntlicher Weise. *Alle Gewinde irgend eines zugehörigen Büschels haben denselben Parameter:* Das Strahlen- oder vielmehr Linienbüschel ist selbst Parametermannigfaltigkeit. Die ∞^1 Parametercongruenzen des reciproken Gebüsches, für das jeder Strahl des Büschels *Hauptstrahl* ist, existiren nach wie vor, ihre Basislinien aber gehören natürlich nicht dem Linienbüschel an. Es sind Paare von conjugirt-imaginären Minimalgeraden, die die Hauptaxe des Büschels treffen und in parallelen conjugirt-imaginären Ebenen verlaufen, deren Mittelebene die Ebene des Büschels ist. Ausgenommen hiervon ist eine zerfallende Parametercongruenz ($p = 0$), die aus dem durch das gegebene Büschel bestimmten Bündel und Feld besteht.

Die hier auftretende besondere Art von Liniennetzen gestattet,

wie das Linienbüschel mit eigentlichem Scheitel, eine eingliedrige Gruppe von Drehungen. Man kann diese Rotationsnetze, beiläufig bemerkt, auch dadurch definiren, dass man einer infinitesimalen Schraubung alle Punkte einer zur Schraubenaxe senkrechten Ebene unterwirft, und jede Fortschreitungsrichtung geradlinig fortsetzt*).

b, α) Conjugirte Gewinde eines hierhergehörigen Büschels ($q \neq 0$) und des reciproken Gebüsches sind

$$\{ 0,\ \sigma_1 + (p\sigma_1 + q\sigma_2)\varepsilon,\ \sigma_2\varepsilon \}, \tag{22}$$
$$\{ \tau_2 + (\tau_1 - p\tau_2)\varepsilon,\ \tau_3(1 - p\varepsilon),\ -q\tau_3 + (pq\tau_3 + \tau_4)\varepsilon \};$$

ihre Parameter

$$P_\sigma = p + q\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad P_\tau = -p + \frac{\tau_1\tau_2 - q\tau_3\tau_4}{\tau_2^2 + (1+q^2)\tau_3^2}. \tag{23}$$

Die ∞^1 Parametercongruenzen $P_\tau = 0$ des Gebüsches haben als Basislinien einmal eine *bestimmte* uneigentliche Gerade $\{ 0,\ q\varepsilon,\ \varepsilon \}$, die dem Orte der Hauptaxen des Gewindebüschels (22) *nicht* als Grenzlage zugehört, sodann eine veränderliche Gerade $\{ 0,\ -q,\ p\varepsilon \}$ des genannten Ortes selbst.

Es ist zu vermuthen, dass die besonderen Gewindebüschel, mit denen wir es hier zu thun haben, auf einfache Art geometrisch erzeugt werden können, dadurch nämlich, dass man ein Gewinde einer eingliedrigen Gruppe perspectiver Aehnlichkeitstransformationen unterwirft. Man überzeugt sich wirklich leicht davon, dass jeder eigentliche Punkt der Geraden

$$x_3 = 0, \quad px_0 + qx_1 = 0 \tag{24}$$

eine solche Gruppe bestimmt, die das Gewindebüschel (p) in Ruhe lässt: Die allgemeine Transformation der zum Punkte

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = q : -p : \lambda : 0$$

gehörigen Gruppe
$$\mathfrak{X}'_{0i} = q\mathfrak{X}_{0i},$$
$$\mathfrak{X}'_{23} = (1-k)\lambda\mathfrak{X}_{03} + kq\mathfrak{X}_{23},$$
$$\mathfrak{X}'_{31} = (1-k)p\mathfrak{X}_{03} + kq\mathfrak{X}_{31},$$
$$\mathfrak{X}'_{12} = -(1-k)\{\lambda\mathfrak{X}_{01} + p\mathfrak{X}_{02}\} + kq\mathfrak{X}_{12}$$

*) Herr Zindler hat, nach gelegentlicher Mittheilung, die Rotationscongruenz 1. O. 1. Cl. ebenfalls betrachtet. Näheres darüber wird in dem soeben citirten Werke zu finden sein. Man vergleiche hierzu und zu dem Satze auf Seite 194 auch eine Note desselben Verfassers: *„Eine neue Erzeugungsweise des linearen Complexes durch zweimalige Rotation“*, Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, IV (1894—95) S. 99.

hat die genannte Eigenschaft. Die den verschiedenen Werthen von p entsprechenden (reellen) Geraden (24) bilden den Ort der Hauptaxen der Gewinde des Büschels, und zwar liegt der Punkt x jedesmal auf der Geraden $p_\sigma = 0$ des Parallelenbüschels. Man vervollständigt diese Bemerkungen leicht zu folgendem Satz:

Unterwirft man ein nicht ausgeartetes reelles Gewinde allen perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centrum ein nicht auf der Hauptaxe des Gewindes angenommener eigentlicher Punkt o ist, so entstehen alle Gewinde eines Büschels, deren Hauptaxen in einem Parallelenbüschel ohne Hauptstrahlen liegen.

Umgekehrt kann jedes solche Gewindebüschel auf ∞^1 Arten so erzeugt werden. Die Perspectivitätscentra erfüllen eine bestimmte Gerade des Parallelenbüschels, das den Ort der Hauptaxen bildet.

Die übrigen eigentlichen Geraden dieses Parallelenbüschels enthalten die Centra der Aehnlichkeitstransformationen, die den übrigen der ∞^1 zusammengehörigen Büschel von Gewinden auf die beschriebene Art zugeordnet sind.

Jedes unserer Büschel von Gewinden, und jedes zugehörige Gebüsch, gestattet eine *eingliedrige* Gruppe von Schiebungen.

b, β) $q = 0$. *Alle Gewinde des Büschels* (22) *haben denselben Parameter.* Die Parametercongruenzen des reciproken Gebüsches sind Liniennetze mit zusammenfallenden Basislinien, die in der unendlich fernen Geraden des Parallelenbüschels vereinigt sind, das den Ort der Hauptaxen des Büschels (22) bildet.

Unterwirft man ein reelles eigentliches (allgemeines oder ausgeartetes) Gewinde allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe von Schiebungen senkrecht zur Hauptaxe des Gewindes, so entsteht ein Büschel von Gewinden, dessen Hauptaxen parallel und sämmtlich Hauptstrahlen sind.

Umgekehrt kann jedes solche Gewindebüschel auf diese Weise erzeugt werden.

Jedes solche Büschel, und jedes zugehörige Gebüsch, gestattet eine *zweigliedrige* Gruppe von Schiebungen.

c) Die Parametercongruenzen eines Gebüsches, das reciprok ist zu einem Büschel reeller coaxialer Gewinde, vereinigen sich in dem hier als Liniencongruenz 1. O. 1. Cl. zu betrachtenden Normalennetz der Hauptaxe des Büschels. Die Figur gestattet eine zweigliedrige Gruppe von Schiebungen, überhaupt die (dreigliedrige) Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen, die die Hauptaxe des Büschels in Ruhe lassen.

d) Das eben erwähnte Normalennetz artet in ein Parallelenbündel aus. Die Figur gestattet die Gruppe *aller* Schiebungen, eine diese

umfassende viergliedrige Gruppe von Bewegungen, und eine wiederum diese einschliessende fünfgliedrige Gruppe von Aehnlichkeistransformationen. —

Wir kommen nun zu den interessantesten der betrachteten Gebilde, zu den aplanaren und planaren Gewindebündeln und Kettencongruenzen. Die Entwickelung der Theorie auch der reellen Figuren der Art wird eine eingehende Berücksichtigung imaginärer Beziehungen nöthig machen. Dabei werden wir uns, wie auch mehrfach schon im gegenwärtigen Paragraphen geschehen, der Vorstellungsweisen der *projectiven* Geometrie bedienen, werden also *nicht* mit denen arbeiten, die in den §§ 27...35 entwickelt worden sind. Einmal nämlich ist überall, wo der Begriff des Punktes ins Spiel kommt, die Methode der projectiven Geometrie einfacher, als die der radial-projectiven Geometrie entlehnte Betrachtungsweise. Sodann ist der Uebergang von den projectiv-geometrischen Sätzen zu radial-projectiven leichter auszuführen als der Uebergang in umgekehrter Richtung. Schliesslich wünschen wir Einseitigkeiten zu vermeiden, und z. B. auch der Thatsache gerecht zu werden, dass die Theorie der ins Liniencontinuum hinein fortgesetzten aplanaren Kettencongruenzen der Theorie der Liniencongruenzen 3. Ordnung 2. Classe untergeordnet werden kann (wie es sich zeigen wird).

Natürlich muss man bei solcher Aenderung des Standpunktes, deren Zweckmässigkeit wir bereits auf S. 298 angedeutet haben, mit Vorsicht zu Werke gehen. Setzt man z. B. die reellen aplanaren Kettencongruenzen in das Continuum der reellen und imaginären Geraden hinein fort, so darf man aus einem früher abgeleiteten Satz (S. 385) nicht schliessen wollen, dass von zwei reciproken Congruenzen der Art jede aus allen gemeinsamen Normalen von *Geraden* der anderen bestehen muss.

Die in den beiden nächsten Paragraphen zu behandelnden *metrischen* Eigenschaften der „aplanaren Kettencongruenzen" sind bereits mehrfach bearbeitet worden, namentlich von R. Ball, der die Beziehungen dieser von Plücker gefundenen Figuren zu Gewindebündeln untersucht hat, und von W. Waelsch, der sie als „Transversalencongruenzen" mit Hülfe von Flächen zweiten Grades construirt*).

Wir werden die meisten der von den genannten Autoren angegebenen Sätze ableiten, und werden, vermöge einer Weiterbildung des bis jetzt noch wenig entwickelten analytischen Apparats, den bekannten viele neue Eigenschaften hinzufügen können. Neu dürfte u. A. Alles sein, was über elliptische Coordinaten und Anwendung elliptischer Functionen vorgetragen werden wird.

---

*) *Ueber eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid.* Wien. Ber. v. 3. März 1887.

§ 37.

Aplanare Gewindebündel und Kettencongruenzen des ersten Typus.

Wir legen der Darstellung des aplanaren Gewindebündels in allen Fällen die auf S. 448 angegebene canonische Form zu Grunde. Danach werden, bei bestimmtem Werthe der Grösse p, die Coordinaten jedes Gewindes im Bündel dargestellt durch die Ausdrücke

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = \sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{02} = \sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{03} = \sigma_3, \\ &\mathfrak{X}_{23} = (p - e_1)\sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{31} = (p - e_2)\sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{12} = (p - e_3)\sigma_3. \end{aligned}$$

Aendert man p, so erhält man alle Gewindebündel, die zur gleichen Kettencongruenz gehören. Bei Auffassung der Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$ als Strahlencoordinaten erster Art bedeuten die Formeln (1) die *Strahlen* dieser Congruenz. Legt man endlich der Grösse p einen solchen Werth bei, dass $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 0$ wird, so kann man die Grössen (1) als Plücker'sche Liniencoordinaten deuten; es ergiebt sich damit die analytische Darstellung der in das erweiterte *Linien*continuum (S. 284) hinein fortgesetzten Kettencongruenz. Wechselt man die Vorzeichen der Grössen p, e_i, so bedeutet das den Uebergang zum reciproken Bündel und zur reciproken Kettencongruenz, die demnach ebenso dargestellt werden durch die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{U}_{01} = \tau_1, \quad \mathfrak{U}_{02} = \tau_2, \quad \mathfrak{U}_{03} = \tau_3, \\ &\mathfrak{U}_{23} = -(p - e_1)\tau_1, \quad \mathfrak{U}_{31} = -(p - e_2)\tau_2, \quad \mathfrak{U}_{12} = -(p - e_3)\tau_3. \end{aligned}$$

Wir betrachten hier nur den ersten Typus (α) reeller aplanarer Kettencongruenzen. Diese Congruenzen haben eine solche Fülle merkwürdiger metrischer Eigenschaften, dass eine ausführliche Untersuchung des Gegenstandes gerechtfertigt erscheint.

Da in unserer ganzen Betrachtung die beiden reciproken Congruenzen als gleichberechtigt auftreten, so können wir, ohne eine wirkliche Beschränkung einzuführen, die Annahme machen, dass die der Gleichung $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ genügenden reellen irrationalen Bewegungsinvarianten e_i der *ersten* (1) unserer Congruenzen überdies die Ungleichungen

$$(3)\qquad e_1 > e_2 > e_3$$

erfüllen.

Die reellen und imaginären Congruenzlinien.

Wir erhalten alle eigentlichen Geraden des Plücker'schen Liniencontinuums, die der Congruenz (1), der „*ersten*“ unserer beiden reci-

proken Congruenzen angehören, wenn wir den Parameter p des einzelnen Gewindebündels gemäss der Bedingung

$$(4) \qquad (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)p - (e_1\sigma_1^2 + e_2\sigma_2^2 + e_3\sigma_3^2) = 0$$

wählen. Hier ist zunächst ausgeschlossen der Werth $p = \infty$, den wir aber nachträglich auch noch in die Betrachtung aufnehmen; ferner sind ausgezeichnet die Werthe von $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$, die den Werth von p unbestimmt lassen.

Congruenzlinien, die dem Minimalcomplex angehören, sind hiernach erstens die ∞^1 Tangenten des absoluten Kegelschnitts, die dem Werthe $p = \infty$ entsprechen, zweitens vier Büschel von Minimalgeraden, deren jedes eine Tangente des absoluten Kegelschnittes enthält, und gefunden wird, wenn man die Parameter σ_i gemäss der Proportion

$$(5) \qquad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sqrt{e_2 - e_3} : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_1 - e_2}$$

wählt, und den dann unbestimmt bleibenden Werth von p variirt.

Bei der Abbildung der Congruenzlinien auf die Punkte $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ der unendlich fernen Ebene wird jedes dieser vier imaginären Parallelenbüschel demnach in einen einzigen Punkt, nämlich in seinen dem absoluten Kegelschnitt angehörigen Scheitel, zusammengezogen.

Wir nennen diese vier imaginären Punkte, deren Coordinaten aus (5) zu entnehmen sind, *Cuspidalpunkte* der Congruenz, und die Ebenen, in denen die zugehörigen Büschel von Minimalgeraden liegen, *Cuspidalebenen*. Die Cuspidalpunkte sind dieselben für beide Congruenzen; die Cuspidalebenen dagegen, deren Coordinaten sind

$$(6) \qquad \begin{aligned} &u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \\ &= \sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2} : \sqrt{e_2 - e_3} : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_1 - e_2}, \end{aligned}$$

gehen bei Vertauschung der ersten Congruenz mit der zweiten über in vier neue Ebenen

$$(7) \qquad \begin{aligned} &u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \\ &= -\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2} : \sqrt{e_2 - e_3} : \sqrt{e_3 - e_1} : \sqrt{e_1 - e_2}. \end{aligned}$$

Wir haben hiermit beide Congruenzen zu *abgeschlossenen Continuis* ergänzt, die im Plücker'schen Liniencontinuum verlaufen. Beim Uebergang zum Strahlencontinuum wird jedes der vier Büschel von Minimalgeraden durch einen Minimal*strahl* ersetzt, und jede Tangente des absoluten Kegelschnitts, die nicht zu einem Cuspidalpunkt gehört, durch einen accessorischen Strahl, der nicht Minimalstrahl ist (§ 28).

Eine unmittelbare Folgerung aus den Gleichungen (6), (7) ist der Satz:

Die $2 \cdot 4$ Cuspidalebenen beider Congruenzen bilden zusammen mit dem durch die Hauptstrahlen bestimmten Coordinatentetraeder eine Figur von drei desmischen Tetraedern.

Darunter versteht man, nach C. Stephanos, eine Figur von drei Tetraedern, die, als Flächen 4. Ordnung angesehen, in einem Büschel, und als Flächen 4. Classe betrachtet, in einer Schaar liegen. Ihre Seitenflächen gehen zu dreien durch sechzehn Gerade, ihre Ecken liegen zu dreien auf sechzehn Geraden, u. s. w.*).

Durch jeden Punkt σ der unendlich fernen Ebene, der nicht Cuspidalpunkt ist, gehen nach dem Vorgetragenen ferner *drei* Gerade, z. B. der ersten Congruenz, deren zwei Tangenten des absoluten Kegelschnittes sind. Die dritte Congruenzlinie ist eigentlich, wenn der Punkt nicht auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, und vermittelt die besprochene im Allgemeinen-eindeutige Abbildung; im anderen Falle vereinigen sich alle drei Congruenzlinien.

Aus dem Gesagten lassen sich eine Menge von weiteren Folgerungen ziehen. Z. B. erkennt man ohne Mühe, dass der Schnitt der Congruenz mit irgend einem eigentlichen Gewinde als Spur in der unendlich fernen Ebene eine Curve 3. O. hat, die durch die vier Cuspidalpunkte geht, und dass das System sechster Stufe aller Gewinde auf diese Art projectiv und mithin *durchaus-eindeutig-umkehrbar* zugeordnet wird dem System sechster Stufe aller dieser Curven 3. Ordnung. Wenn demnach eine in der ersten Congruenz enthaltene algebraische Regelfläche, die keinen aus Minimalgeraden bestehenden irreducibelen Bestandtheil enthält, als Spur in der unendlich fernen Ebene eine Curve n^{ter} Ordnung hat, in der dem i^{ten} Cuspidalpunkt die Multiplicität r_i zukommt, so ist die Ordnung der Fläche $3n - r_1 - r_2 - r_3 - r_4$. Man kann hierauf eine Theorie der in der Congruenz enthaltenen Regelflächen gründen; wir werden aber nur einige specielle Anwendungen von der angeführten Bemerkung machen.

Zunächst ergiebt sich, dass zu jeder unendlich fernen Geraden, die keinen Cuspidalpunkt enthält, ein *Cylindroid* gehört, das in der Congruenz liegt, zwei uneigentliche Minimalgerade enthält, und die gegebene unendlich ferne Gerade zur Leitlinie (Nebenaxe) hat. Lässt man die gegebene Gerade ihre Lage ändern, und lässt man sie sogleich

*) Man vergleiche die Litteraturangaben in des Verfassers Trigonometrie (citirt S. 210) auf S. 153, wo auch eine Abbildung von drei reellen desmischen Tetraedern sich findet, die gerade die im Text erwähnten Eigenschaften zeigt.

durch zwei der Cuspidalpunkte gehen, so zerfällt das Cylindroid, als Ort von Punkten betrachtet, in zwei Cuspidalebenen, und eine dritte Ebene, die ein von Congruenzlinien gebildetes Büschel mit *eigentlichem* Scheitel trägt. Alle solchen Büschel werden auf diese Weise gefunden:

Die aplanare Kettencongruenz des ersten Typus enthält sechs verschiedene Büschel von Geraden (oder Strahlen) mit eigentlichen Scheiteln. Zwei dieser Büschel sind reell. Sie haben ihre Scheitel auf dem mittleren Hauptstrahl und schicken ihre Ebenen durch eben diesen Strahl.

Die reellen Scheitel und Ebenen der zur ersten Congruenz gehörigen Büschel haben die Gleichungen

$$(8)\quad u_0 \pm \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_2 - e_3}\,u_2 = 0, \quad \sqrt{e_1 - e_2}\,x_1 \pm \sqrt{e_2 - e_3}\,x_3 = 0;$$

bei der zweiten Congruenz erhält man entsprechend

$$(9)\quad u_0 \pm \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_2 - e_3}\,u_2 = 0, \quad \sqrt{e_1 - e_2}\,x_1 \mp \sqrt{e_2 - e_3}\,x_3 = 0.$$

Wir wollen die Scheitel und Scheitelebenen der Büschel zugleich *Scheitel* und *Scheitelebenen* der zugehörigen Congruenzen selbst nennen. Es gilt dann der weitere Satz:

Die sechs Scheitel und Scheitelebenen sind dieselben für beide Congruenzen. Durch jeden Scheitel gehen zwei Cuspidalebenen jeder Congruenz. Jede Scheitelebene verbindet einen Hauptstrahl mit zweien der Cuspidalpunkte.

Alle Cylindroide in beiden Congruenzen gehen durch die sechs Scheitel, und alle berühren die sechs Scheitelebenen.

Eine besondere Folgerung ist ferner der Satz:

Sind o', o'' zwei verschiedene reelle eigentliche Punkte, und ω', ω'' zwei verschiedene mit beiden Punkten vereinigt liegende reelle Ebenen, so bestimmen die beiden Strahlen- (oder Linien-)büschel (o', ω'') und (o'', ω') eine aplanare Kettencongruenz des ersten Typus, als Ort der reellen Strahlen, die auf verschiedenen Strahlen beider Büschel senkrecht stehen, und ihrer Grenzlagen. Ebenso bestimmen die Büschel (o', ω') und (o'', ω'') die reciproke Congruenz.

Umgekehrt kann jede reelle aplanare Kettencongruenz des ersten Typus auf eine einzige Weise so erzeugt werden.

Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, liegen die Fusspunkte der gemeinsamen Normalen zwischen Strahlen der gegebenen Büschel im Inneren oder an der Grenze zweier *Kreisflächen*, die so durch die erzeugte Congruenz (2-2)-deutig auf einander abgebildet werden.

Die Hauptaxen der sechs ebenen Büschel, die in der ersten Congruenz enthalten sind, liegen in der zweiten. Wir nennen sie *Focalaxen* der ersten Congruenz. Von ihnen gilt der Satz:

Die sechs Focalaxen einer aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus sind die Schnittlinien von je zweien der zur selben Congruenz gehörigen Cuspidalebenen.

Die beiden reellen Focalaxen der ersten Congruenz haben die Parameter

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \sqrt{e_1 - e_2} : 0 : \pm\sqrt{e_2 - e_3}, \tag{10}$$

die der zweiten die Parameter

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sqrt{e_1 - e_2} : 0 : \mp\sqrt{e_2 - e_3}. \tag{11}$$

Wir betrachten ferner solche ebene Curven 3. O., die in eine Gerade und einen Kegelschnitt durch die vier Cuspidalpunkte zerfallen. Dann ergiebt sich zunächst:

Die reellen Geraden einer jeden aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus lassen sich auf eine einzige Weise auf ∞^1 (coaxiale) Hyperboloide vertheilen. Auf dieselben Flächen vertheilen sich dann auch die reellen Geraden der reciproken Congruenz.

Bezeichnen wir, aus einem Grunde, der sogleich deutlich werden wird, die Flächen 2. Grades, die Kegelschnitte durch die vier Cuspidalpunkte zu Bildern (Spuren) haben, allgemein als *Parameterflächen*, so ergiebt sich weiter:

Die auf irgend einer der ∞^1 Parameterflächen gelegenen Geraden einer aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus können mit jedem der in der Congruenz gelegenen Cylindroide durch ein einziges Gewinde verbunden werden. D. h., die genannten Erzeugenden der Fläche und die Erzeugenden des Cylindroids bilden zusammen den vollständigen Durchschnitt der Congruenz mit dem Gewinde.

Die Flächen 2. Grades, zu denen wir hier gekommen sind, verdienen eine nähere Untersuchung.

Die Parameterflächen.

Verlangen wir zu wissen, unter welchen Umständen sich zwei nicht dem Minimalcomplex angehörige Gerade beider Congruenzen schneiden, so erkennen wir, dass diese Forderung auf *zwei* ganz verschiedene Arten befriedigt werden kann. Sie ist nämlich erstens erfüllt, wenn

$$\sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2 + \sigma_3\tau_3 = 0. \tag{12}$$

Beide Congruenzlinien schneiden dann einander unter rechtem Winkel. Hält man die eine fest, so durchläuft die andere ein Cylindroid oder ein ebenes Büschel. Die fragliche Bedingung ist aber auch dann erfüllt, wenn

$$(13) \qquad \frac{e_1\sigma_1^2 + e_2\sigma_2^2 + e_3\sigma_3^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = p = \frac{e_1\tau_1^2 + e_2\tau_2^2 + e_3\tau_3^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Die zu demselben Werthe von p gehörigen Geraden σ, τ und ihre dem Minimalcomplex zugehörigen Grenzlagen müssen in diesem Falle offenbar die beiden Schaaren von Erzeugenden einer Fläche 2. Grades sein. Diese Geraden bilden aber zugleich den Ort von Gewinden verschwindenden oder überhaupt constanten Parameters in irgend einem der linearen Systeme dritter Stufe, die zu beiden Congruenzen gehören. In der That sind die Parameter der Gewinde (1), (2)

$$(14) \quad P_\sigma = p - \frac{e_1\sigma_1^2 + e_2\sigma_2^2 + e_3\sigma_3^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}, \quad P_\tau = -p + \frac{e_1\tau_1^2 + e_2\tau_2^2 + e_3\tau_3^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Man erhält also die Bedingung (13) des Schneidens der Geraden σ, τ, wenn man

$$(15) \qquad P_\sigma + P_\tau = 0$$

setzt. Wir haben also die (von R. Ball so genannten) *Parameterflächen* vor uns. (Vgl. die Definition auf Seite 452.) Zu jedem Werthe von p gehört eine solche Fläche; wir können daher kurz von der „*Parameterfläche* p“ reden. Die Gesammtheit der ∞^1 Parameterflächen wird ein abgeschlossenes Continuum, wenn man, dem Werthe $p = \infty$ entsprechend, den absoluten Kegelschnitt hinzufügt.

Es ist nicht schwer, die Parameterflächen durch Gleichungen zwischen Punkt- oder Ebenencoordinaten darzustellen: Man findet als Gleichungen der „Fläche p“ die folgenden:

$$(16) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & (p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)x_0^2 + \\ & + (p - e_1)x_1^2 + (p - e_2)x_2^2 + (p - e_3)x_3^2, \end{aligned}$$

$$(17) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & u_0^2 + (p - e_2)(p - e_3)u_1^2 + \\ & + (p - e_3)(p - e_1)u_2^2 + (p - e_1)(p - e_2)u_3^2. \end{aligned}$$

Hieraus schliesst man unter Anderem:

Jedes reelle geradlinige Hyperboloid (das keine Rotationsfläche ist), ist Parameterfläche eines einzigen Paars von reciproken aplanaren Kettencongruenzen (des ersten Typus).

Die gemeinsamen Normalen von je zwei reellen oder conjugirt-imaginären Erzeugenden zweiter (erster) Art irgend einer Parameter-

fläche p sind alle reellen Geraden der ersten (zweiten) Kettencongruenz. Es ist aber wohl zu beachten, dass mit Hülfe von *reellen* Erzeugenden auf diese Art nur solche Congruenzlinien gefunden werden, deren unendlich ferne Punkte nicht innerhalb des Kegelschnittes

$$x_0^2 = 0, \quad \frac{x_1^2}{p-e_1} + \frac{x_2^2}{p-e_2} + \frac{x_3^2}{p-e_3} = 0$$

liegen, in dem der zum Asymptotenkegel des Hyperboloids p normale Kegel die unendlich ferne Ebene trifft.

Ausser Hyperboloiden, die durch die eine oder andere der Ungleichungen

$$e_1 > p > e_2, \quad e_2 > p > e_3 \tag{18}$$

charakterisirt sind, enthält die Schaar der Parameterflächen mit reellem Polarsystem noch solche ohne reelle Punkte, entsprechend den Ungleichungen

$$p > e_1, \quad e_3 > p; \tag{19}$$

sie enthält ferner *vier Flächen von verschwindender Discriminante*, entsprechend den Werthen

$$p = \infty, \ e_1, \ e_2, \ e_3. \tag{20}$$

Die erste von diesen ist der absolute Kegelschnitt, die drei anderen zerfallen als Oerter von Punkten in je eines der drei Paare von Scheitelebenen, und als Oerter von Ebenen in je eines der drei Paare von Scheiteln.

Neben den ausgearteten Flächen (20) verdient bemerkt zu werden *die Parameterfläche* $p = 0$. Sie ist unter allen als Oerter von Punkten betrachteten Parameterflächen die einzige, die conjugirt (apolar) ist zu dem als Ort von Ebenen betrachteten absoluten Kegelschnitt. Ihrem Asymptotenkegel können also rechtwinklige Dreikante eingeschrieben werden. Diese Fläche $p = 0$ nimmt, wie sich finden wird, in unserer Theorie eine ganz ausgezeichnete Stellung ein.

Bemerkenswerth ist die Vertheilung der Parameterflächen im Raume.

Alle Parameterflächen liegen in einem Netz coaxialer Flächen 2. Classe, das den absoluten Kegelschnitt enthält. Basisebenen des Netzes sind die 2.4 Cuspidalebenen beider Congruenzen, die also von allen Parameterflächen berührt werden.

Jede vom absoluten Kegelschnitt verschiedene Parameterfläche enthält ein einziges Quadrupel von Minimalgeraden in jeder von beiden

Congruenzen, und die in den Cuspidalebenen beider Congruenzen gelegenen acht Büschel von Minimalgeraden sind durch Vermittelung des binären Gebietes (p) projectiv auf einander bezogen. Unschwer erkennt man:

Jede reelle oder imaginäre, eigentliche oder uneigentliche Gerade einer aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus liegt auf einer einzigen Parameterfläche.

Dieser Satz verliert, wie mancher andere, seine Gültigkeit bei specielleren Kettencongruenzen.

Die 2 . 6 Focalaxen der beiden Congruenzen, also die Hauptaxen der 2 . 6 auf den zerfallenden Parameterflächen gelegenen ebenen Büschel sind gemeinsame Focalaxen für alle Flächen des zuvor genannten Netzes.

D. h., jedes Paar zu einander orthogonaler Ebenen durch irgend eine dieser zwölf Geraden ist conjugirt in Bezug auf alle Flächen des Netzes. Hieraus folgt:

Aus jedem der sechs Scheitel werden die Flächen des Netzes, und insbesondere also auch die Parameterflächen, durch confocale Kegel projicirt.

Im Falle der beiden reellen Scheitel z. B. sind die Gleichungen dieser $2 \cdot \infty^1$ Kegel

$$(21) \qquad \frac{x_1^2}{p - e_3} + \frac{(x_2 \mp \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3}\, x_0)^2}{p + 2e_2} + \frac{x_3^2}{p - e_1} = 0.$$

Es sind also die Erzeugenden des Kegels, der die Parameterfläche p aus einem Scheitel projicirt, senkrecht zu den Ebenen des Asymptotenkegels der Parameterfläche $-p - e_2$.

Lässt man p in den Werth e_2 übergehen, so nähert sich, falls e_2 nicht verschwindet, der Projectionskegel (21) ungeachtet des Zerfallens der Fläche $p = e_2$ einer Grenzlage, die ein *irreducibeler* Kegel ist.

Die zwölf Focalaxen vertheilen sich zu vieren auf die drei Parameterflächen $p = -2e_i$.

Evident ist folgender Satz:

Die Parameterflächen sind concyclisch. Sie liegen überdies in einem Bündel coaxialer Flächen 2. Ordnung, das ein Büschel concentrischer Kugeln enthält. Die sechs Scheitelebenen sind gemeinsame cyclische Ebenen für alle Flächen des Bündels. Die acht Basispunkte des Bündels sind zu zweien in den vier Cuspidalpunkten vereinigt.

Wir kommen nun zu einem Hauptsatz unserer Theorie, der die Quelle der wichtigsten unter den folgenden Entwickelungen wird:

Je drei (verschiedene oder zusammenfallende) Parameterflächen, deren Parameter) $p = p_1, p_2, p_3$ durch die Gleichung*

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 \tag{22}$$

verbunden sind, liegen in einem bestimmten Büschel von Flächen 2. Ordnung, und jedes dieser ∞^2 Büschel enthält eine der erwähnten Kugeln, nämlich die Kugel

$$(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 - p_2p_3 - p_3p_1 - p_1p_2)x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{23}$$

Die Factoren, mit denen man die linken Seiten der Punktgleichungen (16) der drei Flächen ausstatten muss, um die Summe Null zu erhalten, sind proportional zu $p_2 - p_3$, $p_3 - p_1$, $p_1 - p_2$. Es folgt:

Die drei Parameterflächen, die durch einen vorgeschriebenen eigentlichen Punkt gehen, schneiden sich, wenn sie nicht alle zusammenfallen, in einer sphärischen Curve 4. Ordnung.

Das durch den Mittelpunkt o unserer Congruenzen bestimmte Büschel concentrischer Kugeln hat noch eine andere im Rahmen unserer Theorie wichtige Beziehung zu den Parameterflächen. Es wird nämlich gebildet von den (vom Verfasser so bezeichneten) *Umfassungskugeln* (director spheres) dieser Flächen. Umschreibt man den Poltetraedern einer dieser Flächen Kugeln, so sind diese nach einem bekannten und leicht zu beweisenden Satze sämmtlich orthogonal zu einer bestimmten, mit der Fläche concentrischen Kugel, eben deren „Umfassungskugel". Diese ist, wie aus ihrer Definition sich ergiebt, identisch mit dem Ort aller Punkte, von denen aus der Fläche Tripel zu einander orthogonaler Ebenen umschrieben werden können; ihre Gleichung ist daher, in unserem Falle:

$$\{(p-e_2)(p-e_3) + (p-e_3)(p-e_1) + (p-e_1)(p-e_2)\}x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{24}$$

Berücksichtigt man, dass $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist, so ergiebt sich:

---

*) Die von Plücker unseres Erachtens recht unglücklich gewählte Bezeichnung „Parameter" für die absolute Bewegungsinvariante eines Gewindes kommt mehrfach in Collision mit der sonst üblichen Bedeutung des Wortes Parameter, die wir ebenfalls verwenden. p ist, im üblichen Sinne des Wortes, Parameter des einzelnen unserer Gewindebündel und der entsprechenden Parameterfläche $P_\sigma = 0$; jedes einzelne Gewinde des Bündels hat dann wieder einen sogenannten Parameter P_σ. — Es genügt wohl, diesen Uebelstand angemerkt zu haben, um das Entstehen von Missverständnissen zu verhindern.

Jede Kugel, die mit den beiden aplanaren Kettencongruenzen concentrisch ist, ist Umfassungskugel für zwei Parameterflächen, die zu entgegengesetzten Parametern p, $-p$ gehören. Aus jeder dieser Flächen schneidet sie den Ort aller Punkte aus, in denen sich zwei Erzeugende unter rechtem Winkel treffen.

Der letzte Theil des Satzes ist eine Folge einer unmittelbar nachzuweisenden Eigenschaft der Umfassungskugeln.

Auch aus diesem Satz ergeben sich, wie wir sehen werden, wichtige Folgerungen.

Aplanare Gewindebündel des ersten Typus.

Wir ergänzen das Vorausgehende durch eine kurze Betrachtung der Beziehungen unserer Congruenzen zu den zugehörigen Gewindebündeln.

Seien zwei Gewindebündel, zur ersten und zweiten Congruenz gehörig, durch die entsprechenden Werthe p_1 und p_2 von p bezeichnet, und bilden wir, wie früher, den Quotienten aus dem relativen Moment und dem relativen Comoment von zwei Gewinden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{U}$ dieser Bündel, so erhalten wir einen sehr einfachen Ausdruck

$$\frac{(\mathfrak{X}\,\mathfrak{U})}{(\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{U})} = p_1 - p_2 . \tag{25}$$

Dieser Ausdruck ändert sich also nicht, wenn man die beiden Gewinde in ihren Bündeln variirt.

Lässt man beide Gewinde ausarten, so kann man die Coordinaten $\mathfrak{x}_{ik}$, $\mathfrak{U}_{ik}$ ansehen als Plücker'sche Coordinaten von zwei Geraden, die auf den zu den Gewindebündeln gehörigen Parameterflächen $P_\sigma = 0$, $P_\tau = 0$ liegen. Man erhält dann die weitere Gleichung (vgl. § 36, Nr. 11):

$$-\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}) \cdot \operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}) = p_1 - p_2 . \tag{26}$$

Diese Grösse ändert sich also nicht, wenn man die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ der beiden Congruenzen auf irgend zwei Parameterflächen variirt.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich unsere Kettencongruenzen auf mannigfache Art elementargeometrisch erklären. Lassen wir z. B. $\mathfrak{U}$ der Reihe nach zusammenfallen mit den Hauptstrahlen $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$, den Coordinatenaxen, so entstehen die drei Gleichungen

$$-\operatorname{dist}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}_\alpha) \cdot \operatorname{tg}\operatorname{ang}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}_\alpha) = p - e_\alpha \quad (\alpha = 1,2,3)$$

die eine vollständige Interpretation der Grössen p, e_α enthalten, und bei gegebenem p die einzelne Parameterfläche, bei veränderlichem p die erste Congruenz definiren.

Zur gegebenen Kettencongruenz gehören verschiedene Arten von reellen Gewindebündeln, die durch die Gestalt der zugehörigen Parameterflächen $P_\sigma = 0$ unterschieden werden können. Sieht man von den Fällen $p = e_1, e_2, e_3$ ab, so kann man *hyperbolisch* die Bündel nennen, zu denen als Parameterfläche je ein Hyperboloid (Nr. 18)| gehört, *elliptisch* die übrigen (Nr. 19).

Bei jedem zur betrachteten Kettencongruenz gehörigen (hyperbolischen) Bündel von (reellen) Gewinden wird die erste Schaar von Erzeugenden der Parameterfläche $P_\sigma = 0$ gebildet von den Hauptaxen der (reellen) ausgearteten Gewinde des Bündels, und sie ist zugleich Durchschnitt aller (reellen) Gewinde des reciproken Bündels. Die andere Schaar von Erzeugenden hat dieselbe Beziehung zur zweiten Congruenz. (Plücker.)

Ein elliptisches Bündel enthält dagegen weder reelle ausgeartete Gewinde, noch haben seine Gewinde reelle gerade Linien mit einander gemein.

Für die drei Hauptstrahlen erreichen die Parameter der Gewinde jedes Bündels stationäre Werthe; für die reellen Gewinde eines Bündels erster Schicht erreicht der Parameter P_σ ein *Maximum* $p - e_3$ (*Minimum* $p - e_1$), wenn die Hauptaxe des Gewindes die x_3-Axe (die x_1-Axe) wird.

Den ausgearteten Parameterflächen $p = e_1, e_2, e_3$ entsprechen Gewindebündel, deren jedes mit dem reciproken Bündel ein Gewinde gemein hat. Diese Gewinde sind natürlich ebenfalls ausgeartet. Ihre Hauptaxen sind die drei Hauptstrahlen, die je einer der Flächen 2. Ordnung $p = e_i$ als Doppelcurven angehören.

Aus den Hyperboloiden unter den Parameterflächen ergeben sich ferner einfache *reelle Erzeugungen der zugehörigen Bündel von Gewinden.* Paart man die Erzeugenden erster Art involutorisch, so liegen nach einem bekannten Satze v. Staudt's die gemeinsamen Secanten gepaarter Strahlen in einem Gewinde. Alle möglichen involutorischen Paarungen liefern auf diese Art alle nicht-ausgearteten Gewinde eines hyperbolischen Bündels, dessen Hauptaxencongruenz unsere erste Congruenz ist. Alle hyperbolischen Bündel ergeben sich auf diese Weise; zu den elliptischen kann man von irgend einem unter ihnen durch Addition einer Constanten zu den Parametern der einzelnen Gewinde kommen, und ebenso zu den speciellen Bündeln $p = e_1, e_2, e_3$. Das Bündel $p = e_2$ kann übrigens auch unmittelbar mit Hülfe der beiden oben (S. 464) betrachteten Linienbüschel erzeugt werden: an Stelle der v. Staudtschen Erzeugungsweise des Gewindes ist deren Grenzfall, die von Sylvester angegebene Erzeugungsart zu setzen. Es werden dabei die soeben genannten Linienbüschel projectiv so auf einander bezogen, dass

ihr gemeinsamer Strahl sich selbst entspricht. Die gemeinsamen Secanten zugeordneter Geraden und ihre Grenzlagen erfüllen ein Gewinde. Alle so construirten ∞^2 Gewinde liegen in dem speciellen Bündel $p = e_2$: das reciproke Bündel wird ebenso mit Hülfe der beiden anderen Linienbüschel gefunden.

Congruenzlinien durch gegebene Punkte und in gegebenen Ebenen.

Man ermittelt auf verschiedene Arten sehr leicht, dass die aplanaren Kettencongruenzen des ersten (und zweiten) Typus im Sinne der projectiv-geometrischen Classification zur *Ordnung 3* und *Classe 2* gehören. Eine tiefer dringende Theorie verlangt aber überall nicht blos die Ermittelung solcher Zahlen, sondern die wirkliche Aufstellung und Erörterung der zugehörigen algebraischen Gleichungen, mit Einschluss aller Grenzfälle.

Wir verlangen also zunächst, die durch einen beliebig vorgelegten Punkt gehenden Geraden z. B. der ersten Congruenz zu bestimmen.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Gleichung (16) als eine cubische Gleichung für p. Jeder Wurzel wird dann (von sogleich zu erörternden Ausnahmefällen abgesehen) eine bestimmte Gerade jeder von beiden Congruenzen zugeordnet sein:

Die beiden Schaaren von Erzeugenden auf irgend einer Parameterfläche p müssen sich rational trennen lassen.

Die wirkliche Durchführung des Gedankens erfordert eine einigermassen umständliche Rechnung. Wir geben einfach das Resultat an. Setzen wir zur Abkürzung

$$a_1 = p - e_1, \quad a_2 = p - e_2, \quad a_3 = p - e_3,$$

und nehmen wir das Bestehen der Gleichung (16) zwischen den Punktcoordinaten x_i und dem Parameter p an, so sind die Parameter σ_i der x enthaltenden *und auf der Fläche p liegenden* Geraden der *ersten* Congruenz im Allgemeinen gegeben durch die Proportion

$$\begin{aligned} &\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \\ (27) \qquad &= x_1^2 + a_2 a_3 x_0^2 : x_1 x_2 + a_3 x_0 x_3 : x_3 x_1 - a_2 x_0 x_2 = \\ &= x_1 x_2 - a_3 x_0 x_3 : x_2^2 + a_3 a_1 x_0^2 : x_2 x_3 + a_1 x_0 x_1 = \\ &= x_3 x_1 + a_2 x_0 x_2 : x_2 x_3 - a_1 x_0 x_1 : x_3^2 + a_1 a_2 x_0^2. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden aber alle oder zum Theil unbrauchbar, *erstens*, wenn x einer der sechs Scheitel der Congruenz ist, *zweitens*, wenn x ins Unendliche rückt. Ist x z. B. der reelle Scheitel

$$1 : 0 : \mp\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3} : 0,$$

so geht durch x zunächst das Linienbüschel

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sqrt{e_2 - e_3} : \sigma_2 : \pm\sqrt{e_1 - e_2},$$

indem σ_2 beliebig bleibt; ausser diesen Geraden, zu denen der mittlere Hauptstrahl ($\sigma_2 = \infty$) der Congruenz gehört, geht durch den Scheitel noch eine der Congruenz angehörige isolirte Congruenzlinie, nämlich eine *Focalaxe* der reciproken Congruenz:

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \pm\sqrt{e_1 - e_2} : 0 : \sqrt{e_2 - e_3}.$$

Rückt x ins Unendliche, aber *nicht* auf den absoluten Kegelschnitt, so werden zwei Wurzeln der Gleichung (16) unendlich; sie entsprechen den durch x gehenden Tangenten des absoluten Kegelschnittes. Rückt x auf den absoluten Kegelschnitt, aber *nicht* in einen Cuspidalpunkt, so werden alle drei Wurzeln unendlich. Ist x endlich ein Cuspidalpunkt, so liefert (27) alle Geraden des zugehörigen Büschels von Minimalgeraden, da in diesem Falle p unbestimmt bleibt. —

Betrachten wir einen eigentlichen Punkt x, und nehmen wir an, dass er nicht auf der weiterhin noch näher zu untersuchenden *Brennfläche* beider Congruenzen liegt (also nicht so beschaffen ist, dass die Discriminante der cubischen Gleichung für p verschwindet), so werden die beiden durch x gehenden Tripel von Congruenzlinien jedes von verschiedenen Geraden gebildet. Sie vertheilen sich auf die drei x enthaltenden Parameterflächen.

Die genannten Tripel bilden zwei durch den absoluten Kegel des Punktes x einander polar zugeordnete Dreikante. Die Verbindungsebenen entsprechender Kanten, d. i. die Höhen jedes der beiden Dreikante sind die Tangentialebenen im Punkte x für die drei durch x gehenden Parameterflächen. Sie schneiden sich in der zu x gehörigen Tangente der sphärischen Durchdringungscurve der drei Parameterflächen. Die Plücker'schen Coordinaten jener Höhenschnittlinie, ausgedrückt durch x, sind

$$(28)\quad \mathfrak{P}_{01} = (e_2 - e_3)\, x_0 x_2 x_3,\ \mathfrak{P}_{23} = (e_1 - e_2)\, x_1 x_2^2 - (e_3 - e_1)\, x_1 x_3^2,$$

u. s. w. Diese Ausdrücke werden, unter der genannten Voraussetzung, unbestimmt *nur* für den Mittelpunkt der beiden Congruenzen. —

Wir verlangen ferner, die in einer beliebig gegebenen Ebene liegenden Geraden der ersten Congruenz zu finden.

Das anzuwendende Verfahren ist dasselbe wie zuvor. An Stelle der cubischen Gleichung (16) tritt jetzt die quadratische Gleichung (17). Die Parameter σ_i der zur Wurzel p der Gleichung (17) gehörigen Ge-

raden, die in einer vorgeschriebenen eigentlichen Ebene u liegt, sind im Allgemeinen:

$$(29)\quad \begin{aligned} &\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \\ &= -a_3u_2^2 - a_2u_3^2 : a_3u_1u_2 + u_0u_3 : a_2u_3u_1 - u_0u_2 = \\ &= a_3u_1u_2 - u_0u_3 : -a_1u_3^2 - a_3u_1^2 : a_1u_2u_3 + u_0u_1 = \\ &= a_2u_3u_1 + u_0u_2 : a_1u_2u_3 - u_0u_1 : -a_2u_1^2 - a_1u_2^2 . \end{aligned}$$

Die Ausdrücke werden aber ganz oder theilweise unbrauchbar, *erstens* natürlich, wenn u eine der sechs Scheitelebenen ist, *zweitens*, wenn u den absoluten Kegelschnitt berührt. Ist im zweiten Falle der Berührungspunkt kein Cuspidalpunkt, so wird eine der Wurzeln der Gleichung (17) unendlich; man erhält die zugehörige Tangente des absoluten Kegelschnitts, und, der anderen Wurzel entsprechend, aus (29) eine eigentliche Gerade. Ist der Berührungspunkt ein Cuspidalpunkt, u aber nicht Basisebene der Parameterflächen, so werden beide Wurzeln unendlich, und die zugehörige Tangente des absoluten Kegelschnitts tritt doppelt zählend auf. Ist u eine Ebene der ausgeschlossenen Art, Cuspidalebene der ersten oder auch zweiten Congruenz, so lässt die Gleichung (17) den Werth von p völlig unbestimmt. Ist u Cuspidalebene der ersten Congruenz, so erhält man das in ihr gelegene Büschel von Minimalgeraden. Ist endlich u Cuspidalebene der zweiten Congruenz, so liefert (29) ∞^1 verschiedene Werthe von $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$; man erhält also wieder ∞^1 Congruenzlinien. Diese umhüllen eine Parabel, die die unendlich ferne Ebene im entsprechenden Cuspidalpunkt berührt, und also ein Grenzfall eines Kreises ist.

Schliessen wir alle diese Fälle aus, so erhalten wir insgesammt vier in u verlaufende Strahlen unserer *beiden* Congruenzen I, II, die mit I, 1; II, 1; I, 2; II, 2 bezeichnet werden können, und im Allgemeinen getrennt sind. I, 1 und II, 2 und ebenso II, 1 und I, 2 stehen auf einander senkrecht. Die Schnittpunkte von I, 1 und I, 2, sowie II, 1 und II, 2 sind die Schnittpunkte der Ebene u mit den zu u senkrechten Geraden der Congruenzen II, I. (S. die beigegebene Figur.)

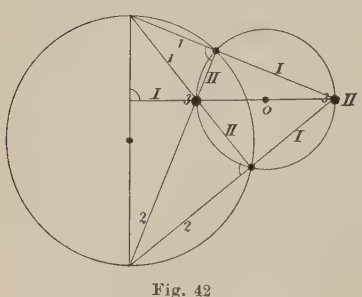


Fig. 42

Diese Geraden liegen aber, wie man geometrisch sowohl als algebraisch leicht zeigt, auf der zum Parameter p_3 (Nr. 22) gehörigen Parameterfläche. Es ergiebt sich also:

Rollt eine Ebene auf zweien der Parameterflächen, so steht sie fortwährend senkrecht auf je zwei parallelen Erzeugenden einer bestimmten dritten Parameterfläche, derselben, die mit den beiden ersten Flächen in einem Büschel liegt.

Geht die Ebene u durch den Mittelpunkt o der beiden Congruenzen, so wird das zu o als Mittelpunkt gehörige Kreisviereck der Figur 42 ein Rechteck.

Die Hauptfusspunkt- und Mittelfläche. Brenn- und Grenzpunkte.

Fusspunktflächen aplanarer Kettencongruenzen haben wir, unter Beschränkung auf das reelle Gebiet, bereits früher betrachtet. Lassen wir die genannte Voraussetzung fallen, so erweisen sich die zu reellen eigentlichen Punkten gehörigen Fusspunktflächen als eindeutig bezogen auf das ternäre Gebiet $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$; auf die in das Plücker'sche Liniencontinuum hinein fortgesetzte aplanare Kettencongruenz sind sie also *nicht* eindeutig-umkehrbar bezogen.

Wir betrachten näher nur eine dieser Steiner'schen Flächen, nämlich die zum Mittelpunkt der Congruenz gehörige; wir wollen diese Fläche, deren drei Doppellinien die Hauptstrahlen sind, *Hauptfusspunktfläche* (der ersten Congruenz) nennen.

Von ihr gilt der Satz:

Die Hauptfusspunktfläche ist zugleich Ort der Mittelpunkte aller Congruenzlinien, Ort des Punktes, der den Abstand der Grenzpunkte und ebenso den Abstand der Brennpunkte auf irgend einer Congruenzlinie halbirt.

Diese besondere Steiner'sche Fläche kann daher auch als *Mittelfläche* der betrachteten aplanaren Congruenz bezeichnet werden.*)

Zum Beweise unserer Behauptung gehen wir von der ersten Definition der Fläche als Fusspunktfläche zum Punkt o aus. Man findet ohne Weiteres ihre Parameterdarstellung in Punktcoordinaten:

$$(30)\qquad \begin{aligned} \xi_0 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \\ \xi_1 &= (e_2 - e_3)\,\sigma_2\sigma_3 \quad , \\ \xi_2 &= (e_3 - e_1)\,\sigma_3\sigma_1 \quad , \\ \xi_3 &= (e_1 - e_2)\,\sigma_1\sigma_2 \quad , \end{aligned}$$

oder in Ebenencoordinaten

*) Nach Kummer. Vgl. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat (Leipzig 1899), Kap. X.

$$(31)\qquad \begin{aligned} \omega_0 &= (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad , \\ \omega_1 &= (e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2), \\ \omega_2 &= (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - \sigma_1^2), \\ \omega_3 &= (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\sigma_3(\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2); \end{aligned}$$

ihre Gleichung ist

$$(32)\qquad \begin{aligned} 0 = &-(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3 + \\ &+ (e_2 - e_3)^2\xi_2^2\xi_3^2 + (e_3 - e_1)^2\xi_3^2\xi_1^2 + (e_1 - e_2)^2\xi_1^2\xi_2^2 \end{aligned}$$

oder

$$(33)\qquad \begin{aligned} 0 = &(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\omega_1\omega_2\omega_3 - \\ &- \omega_0\{(e_2 - e_3)\omega_1^2 + (e_3 - e_1)\omega_2^2 + (e_1 - e_2)\omega_3^2\} + 4\omega_0^3. \end{aligned}$$

Die Punkte der Congruenzlinie σ, deren Fusspunkt der Punkt (30) ist, werden nun erhalten, wenn man neben den Grössen $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ eine vierte, mit σ_0 zu bezeichnende Verhältnissgrösse σ_0 einführt, und etwa

$$(34)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad , \\ x_1 &= (e_2 - e_3)\sigma_2\sigma_3 - \sigma_0\sigma_1 \text{, u. s. w.} \end{aligned}$$

setzt. Anzunehmen ist dabei $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \neq 0$, womit Gerade des Minimalcomplexes ausgeschlossen werden. Wir werden überdies die Gerade σ der Kürze halber als *reell* voraussetzen.

Wir bringen nunmehr die so dargestellte Gerade mit einer Parameterfläche zum Schnitt, deren Parameter wir, abweichend vom Bisherigen, mit q bezeichnen wollen. Wir erhalten dann eine quadratische Gleichung für σ_0, deren Coefficienten aber nicht im dritten, sondern nur im zweiten Grade von q abhängen, da für $q = p$ die Gleichung für alle Werthe von σ_0 erfüllt ist (Nr. 16). Wir finden, nach kurzer Reduction, die Gleichung

$$(35)\quad \sigma_0^2 + (q - e_2)(q - e_3)\sigma_1^2 + (q - e_1)(q - e_2)\sigma_2^2 + (q - e_3)(q - e_1)\sigma_3^2 = 0.$$

Betrachten wir umgekehrt σ_0 als gegeben, so liefert dieselbe Gleichung zwei Parameterflächen, die den Punkt x enthalten. Berücksichtigt man, dass in jeder dieser Flächen eine Erzeugende zweiter Art in x auf σ senkrecht stehen muss, und dass diese Geradenpaare in ihrer Gesammtheit eben die Kette der zweiten Congruenz bilden, deren Hauptaxe σ ist, so erkennt man mit Hülfe des Satzes über die Büschel (p_1, p_2, p_3), dass $q = -\frac{p}{2}$ die beiden Grenzpunkte liefert. Für jede der zugehörigen Grenzlinien (zweiter Congruenz) ist dann derselbe Punkt x nothwendiger Weise Brennpunkt. Vertauscht man also beide Congruenzen, und zugleich die Bedeutung von p und q, ersetzt man

also p, q, e_i durch $-q, -p, -e_i$, so ergiebt sich die Gleichung $q = -2p$ zur Bestimmung der Brennpunkte des Strahls σ. Beide Werthe ergeben, in (35) substituirt, reine Gleichungen für σ_0, und damit ist, auf doppelte Art, der behauptete Satz erwiesen, da

$$r = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \tag{36}$$

den Abstand des Punktes x vom entsprechenden Punkte (30) der Fusspunktsfläche misst. Zugleich erkennen wir, dass wir diesen Satz so vervollständigen können:

Es sei σ eine auf der Parameterfläche p gelegene reelle eigentliche Gerade der ersten Congruenz, die nicht Focalaxe der zweiten Congruenz ist. Dann bilden die Geraden τ der zweiten Congruenz, die σ senkrecht schneiden, ein Cylindroid (nicht ein Linienbüschel). Sie vertheilen sich derart auf die ∞^1 Parameterflächen, dass je zwei derselben Fläche q angehörige Erzeugende des Cylindroids durch dessen Hauptstrahlen harmonisch getrennt sind. Es haben also alle Sehnen, die von Parameterflächen auf σ abgeschnitten werden, denselben Mittelpunkt. Dieser Mittelpunkt ist der Fusspunkt des Strahles σ und also auf der Steinerschen Fläche (32) gelegen. In ihm wird der Strahl σ von zwei stets reellen Parameterflächen berührt, nämlich von denen, die die Hauptstrahlen des Cylindroids enthalten, und deren Parameter die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(q-e_2)(q-e_3)\sigma_1^2 + (q-e_3)(q-e_1)\sigma_2^2 + (q-e_1)(q-e_2)\sigma_3^2 = 0. \tag{37}$$

Die durch σ gehenden Tangentialebenen dieser beiden Flächen sind also zu einander senkrecht und trennen harmonisch die durch σ an irgend eine andere Parameterfläche $(q \neq p)$ gelegten Tangentialebenen.

Ferner schneidet, wenn $p \neq 0$ ist, die Fläche $q = -\frac{p}{2}$ die beiden Grenzpunkte, und die Fläche $q = -2p$ die beiden Brennpunkte des Strahls σ aus.

Ist $p = 0$, so fallen die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammen. Die Erzeugenden der bereits als ausgezeichnet hervorgehobenen Parameterfläche $p = 0$, und sie allein, haben also die für Normalencongruenzen charakteristische Eigenschaft. Allgemein aber ergiebt sich, wenn die Indices f und g die auf Brennpunkte und Grenzpunkte bezüglichen Werthe von r (Nr. 36) unterscheiden, die Gleichung

$$4r_g^2 - 4r_f^2 = 9p^2. \tag{38}$$

Damit ist zugleich die Abhängigkeit zwischen den zugehörigen Kugeln um o gefunden. — Ist σ eine der beiden der ersten Congruenz angehörigen reellen Focalaxen der zweiten Congruenz, so zerfällt das Cylindroid, als Ort von Punkten, in die Ebene des zugehörigen Linienbüschels der zweiten Congruenz, und zwei zugehörige Cuspidalebenen; die Grenzpunkte, nicht aber auch die (imaginären) Brennpunkte fallen dann zusammen. Ferner findet sich:

Die Mittelfläche unserer Kettencongruenz ist der Ort aller Punkte, in denen zwei Strahlen der reciproken Congruenz sich unter rechtem Winkel schneiden.

Die Ebenen dieser Strahlenpaare erfüllen natürlich das zum Anfangspunkt der Coordinaten gehörige Ebenenbündel:

Die „Mittelenveloppe" jeder unserer Congruenzen ist ein Punkt, nämlich deren Mittelpunkt.

Ueberhaupt hat die zum Strahl σ im Punkte σ_0 (Nr. 34) orthogonale Ebene die Coordinaten

$$\sigma_0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 . \tag{39}$$

Betrachten wir das ganze Büschel dieser Ebenen, so findet sich (unter Anderem):

Jedes reelle Büschel von parallelen nicht cyclischen (zu keiner Focalaxe senkrechten) Ebenen enthält zwei verschiedene stets reelle Brennebenen, d. h. solche, in denen (für die eine und folglich auch für die andere der beiden Congruenzen) die zugehörigen Congruenzlinien zusammenfallen.

Diese Congruenzlinien sind identisch mit den Grenzlinien der beiden Cylindroide, deren Hauptaxen σ, τ

$$(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = u_1 : u_2 : u_3)$$

auf den Ebenen $\lambda u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ des Büschels senkrecht stehen; die beiden genannten Ebenen können daher auch als zu den Geraden σ und τ gehörige *Grenzebenen* bezeichnet werden.

Die beiden in derselben Brenn- oder Grenzebene gelegenen Geraden beider Congruenzen gehören derselben Parameterfläche an, und schneiden sich rechtwinklig in einem Punkte, der für beide Gerade zugleich Brennpunkt ist.

Der letzte Theil dieses Satzes, den wir weiterhin noch mehrfach anders fassen werden, ergiebt sich aus der an die Figur 42 geknüpften Betrachtung, wenn man die Ebene u speciell wählt. Tritt der ausgeschlossene Fall ein, sind die Ebenen des Büschels cyclisch, nämlich zu einer Scheitelebene parallel, so vereinigen sich die beiden Grenz-

ebenen mit dieser, die darin enthaltenen Congruenzlinien bilden also zwei ebene Büschel. Jeder Punkt des Kreises einer Scheitelebene, der den Abstand der zugehörigen beiden Scheitel zum Durchmesser hat, ist Brennpunkt der beiden ihn projicirenden Congruenzlinien der Ebene.

In dem Büschel von Ebenen endlich, das durch eine reelle Gerade σ der ersten Congruenz gelegt werden kann, wird jede Ebene u ausser von der σ enthaltenden Parameterfläche p noch von einer zweiten Parameterfläche q berührt. Variirt man q, so wird die Ebene eine Brennebene dann und nur dann, wenn $q = p$ wird. Der in u enthaltene zweite Strahl σ' der ersten Congruenz fällt dann mit σ zusammen, und der Schnittpunkt beider rückt in einen der Brennpunkte von σ. Also ergiebt sich weiter:

In dem Ebenenbüschel durch eine reelle Gerade σ der ersten Congruenz sind zwei und nicht mehr reelle oder conjugirt imaginäre Brennebenen der einen und folglich auch der anderen Congruenz enthalten.) Diese sind identisch mit den Tangentialebenen der σ enthaltenden Parameterfläche p in den beiden Brennpunkten der Congruenzlinie σ.*

Schliesslich erwähnen wir noch, dass die Grenzpunkte der Hauptstrahlen die uniplanaren Knotenpunkte der Hauptfusspunktfläche sind, und dass diese von jeder Scheitelebene, ausser in einer ihrer Doppelgeraden, in einem leicht anzugebenden *Kreis* geschnitten wird. Solcher Kreise liegen also sechs auf der Mittelfläche, deren zwei reell sind.

Die Brenn- und Grenzfläche.

Wir betrachten nunmehr die Brennpunkte und Brennebenen in ihrer Gesammtheit. Sie erfüllen eine Fläche, deren Gleichungen erhalten werden, wenn man (16) und (17) als Gleichungen für p betrachtet und deren Discriminanten bildet. Es ergeben sich für diese Fläche, grösstentheils unmittelbar aus dem Vorhergehenden, eine ganze Reihe bemerkenswerther Eigenschaften.

Beide Congruenzen haben dieselbe Brennfläche, eine Fläche sechster Ordnung

$$(40)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{27}\{(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2)x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}^3 + \\ &+ \tfrac{1}{4}x_0^2\{e_1e_2e_3x_0^2 + e_1x_1^2 + e_2x_2^2 + e_3x_3^2\}^2 = 0 \end{aligned}$$

und vierter Classe

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\}\{u_0^2 + e_2e_3u_1^2 + e_3e_1u_2^2 + e_1e_2u_3^2\} - \\ &- \tfrac{1}{4}\{e_1u_1^2 + e_2u_2^2 + e_3u_3^2\}^2 = 0, \end{aligned}$$

*) Der Satz sagt auch aus, dass Brennebenen durch σ, die zu anderen Congruenzlinien gehören, nicht vorhanden sind; worüber die allgemeine Theorie der Congruenzen keine Auskunft geben kann.

*und diese ist die vollständige Enveloppe der Parameterflächen.**) Die gefundene Fläche ist nicht nur Ort aller Brennpunkte und Brennebenen***), sondern auch Ort aller Grenzebenen und Grenzpunkte.*

Jede Congruenzlinie wird von der Brennfläche in ihren Brennpunkten berührt, und in ihren Grenzpunkten durchsetzt, so dass man in der Umgebung einer Congruenzlinie allgemeiner Lage zwei „Mäntel der Brennfläche" und zwei „Mäntel der Grenzfläche" unterscheiden kann. Jede Ebene allgemeiner Lage der Fläche ist Brennebene für je *eine* Gerade beider Congruenzen, und ebenso Grenzebene für je *eine* andere. Ferner ist jeder Punkt allgemeiner Lage der Fläche Brennpunkt für je *eine* Congruenzlinie, und Grenzpunkt *einer* anderen.****) Die zuerst genannten Geraden aber, die je ein Flächenelement der Brennfläche bestimmen, schneiden sich unter rechtem Winkel:

Die beiden Schaaren von Curven auf der Brennfläche, deren Tangenten die Geraden der beiden reciproken Congruenzen sind, durchsetzen einander orthogonal.

Die Brennfläche ist daher auch Ort aller Flächenelemente (Punkte und Ebenen), die von je zwei zu einander senkrechten Erzeugenden einer Parameterfläche bestimmt werden. (Vgl. S. 470.)

Dieser Satz führt, ein wenig vervollständigt, zu einer weiteren bemerkenswerthen Erzeugungsweise unserer Fläche.

Die Brennfläche ist Ort der sphärischen Raumcurven 4. O. 1. Art, in denen die Parameterflächen von ihren Umfassungskugeln (Nr. 24) *geschnitten werden.*

Die Parameterfläche p wird längs der zugehörigen Schnittcurve, des Ortes der Brennpunkte ihrer Erzeugenden, von der Brennfläche berührt,

---

*) Greift man aus einer Congruenz eine beliebige Schaar von ∞^1 Linienflächen heraus, so ist deren Enveloppe im Allgemeinen nicht *nur* die Brennfläche.

**) Dies ist nicht ganz so selbstverständlich, wie man nach der üblichen Darstellung der Theorie der Liniencongruenzen annehmen sollte. Man lässt nicht selten unberücksichtigt, dass jeder Punkt einer Congruenzlinie für diese selbst Brennpunkt, oder jede ihrer Ebenen Brennebene sein kann, dass also der Ort der Brennpunkte und der Ort der Brennebenen geradlinige Flächen umfassen kann, denen die Eigenschaften *nicht* zukommen, die man der „Brennfläche" beizulegen pflegt. Vgl. das Beispiel in § 39 (S. 527). — Herr R. Sturm, der diese Möglichkeit wohl zuerst bemerkt hat, bezeichnet auch solche Flächen noch als zur „Brennfläche" gehörig.

***) Die bei Punkten besonderer Lage auftretenden *Ausnahmefälle* haben wir bei Gelegenheit der Discussion der Gleichungen (27) und (29) schon erörtert.

und sie wird längs einer zweiten Curve derselben Art, des Ortes der Grenzpunkte der Erzeugenden, von der Brennfläche (Grenzfläche) durchsetzt. Diese letzte Curve ist wiederum Ort der Brennpunkte für eine andere Parameterfläche, die zum Parameter $-\frac{p}{2}$ *gehört, und ebenso ist die erste Ort der Grenzpunkte der Erzeugenden der Parameterfläche* $-2p$.

Der Satz ergiebt sich aus dem, was wir vorher über das Büschel der Umfassungskugeln und über die die Grenzpunkte und Brennpunkte ausschneidenden Parameterflächen gesagt hatten. Er ist leicht auch algebraisch in Evidenz zu setzen: Man beachte z. B. die Identität

$$\{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)x_0^2+(p-e_1)x_1^2+(p-e_2)x_2^2+(p-e_3)x_3^2\}+$$
$$+\{(2p+e_1)(2p+e_2)(2p+e_3)x_0^2+(2p+e_1)x_1^2+(2p+e_2)x_2^2+(2p+e_3)x_3^2\}=$$
$$=3p\{[(p-e_2)(p-e_3)+(p-e_3)(p-e_1)+(p-e_1)(p-e_2)]x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2\}.$$

Die Parameterflächen lassen sich danach auf ∞^1 Reihen vertheilen, die in der einen Richtung nach der Fläche $p=0$, in der anderen nach der Fläche $p=\infty$ hin convergiren. — Natürlich sind nicht alle im Satze genannten Schnittcurven reell. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück. (S. 489.)

Ferner scheint uns folgende Thatsache bemerkenswerth:

Die Forderung, dass drei von einem Punkte x *ausgehende Gerade der einen oder anderen Congruenz in einer Ebene liegen sollen, wird, wie selbstverständlich, durch die Punkte der Brennfläche, aber auch nur durch diese befriedigt.*

Läge nämlich ein Punkt x dieser Eigenschaft nicht auf der Brennfläche, so würden von ihm genau drei verschiedene Congruenzlinien ausgehen. Die zu x gehörige Normale der Ebene, in der diese Geraden liegen sollen, müsste dann die einzige durch x gehende Gerade der reciproken Congruenz sein, woraus sich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung ergeben würde. —

Um sich von der Beziehung zwischen der Brennfläche und den Parameterflächen und zugehörigen Umfassungskugeln einen deutlichen Begriff zu machen, ist es nützlich, eine naheliegende Abbildung zu betrachten.

Wir beziehen zunächst die ∞^2 Flächen des mehrfach genannten Bündels, das die Parameterflächen enthält, projectiv auf die ∞^2 Geraden einer Ebene. Die in dem Flächenbündel enthaltenen Büschel stellen sich dann dar als Linienbüschel, den ∞^2 sphärischen Basiscurven jener Flächenbüschel werden die Punkte der Bildebene zugeordnet. Bilder der Parameterflächen sind nun die *Geraden* (Tangenten) einer Curve

3. Classe und 3. Ordnung, einer Curve mit einem Wendepunkt und einer Spitze; und zwar wird die Fläche $p = \infty$ bezogen auf die Wendepunktstangente, die Fläche $p = 0$ auf die Spitzentangente. Als Bilder der ∞^1 die Brennfläche überdeckenden sphärischen Curven 4. O. erscheinen die ∞^1 *Punkte* der Curve, die ebenfalls den Parameterwerthen p zugeordnet sind.

Die Parameter von je drei Tangenten unserer Curve nun, die durch denselben Punkt gehen, sind verbunden durch die Gleichung $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ (Nr. 22); ebenso die Parameter von je drei Punkten, die in einer Geraden liegen, durch die Gleichung

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 0. \tag{42}$$

Punkte mit entgegengesetzten Parameterwerthen p, $-p$ werden harmonisch getrennt durch Wendepunkt und Spitze; ihre Tangenten schneiden sich auf der Spitzentangente, sie selbst liegen in einer Geraden mit dem Wendepunkt, und diese Gerade ist das Bild der den Flächen p, $-p$ gemeinsamen Umfassungskugel. Wir erkennen auf diese Weise u. A.:

Von den Flächen des Bündels, das die Parameterflächen enthält, schneidet jede die Brennfläche in drei sphärischen Curven 4. Ordnung, in deren Punkten sie von je einer Parameterfläche berührt wird. Die Parameter p_1, p_2, p_3 dreier solcher Flächen sind verbunden durch die Gleichung (42).

Umgekehrt können je zwei Berührungscurven von Parameterflächen durch eine Fläche des genannten Bündels verbunden werden, die dann noch eine bestimmte dritte Berührungscurve ausschneidet.

In ähnlicher Weise ergiebt sich:

Jede Fläche des Netzes, in dem die Parameterflächen liegen, wird zugleich mit der Brennfläche von den Ebenen zweier Raumcurven 4. Classe berührt, und eben diesen Ebenenschaaren ist auch je eine Parameterfläche eingeschrieben. Umgekehrt sind die Tangentialebenen der Brennfläche längs zweier Berührungscurven mit Parameterflächen einer Fläche des genannten Netzes umschrieben.

Ferner gelangt man zu einer besonders einfachen Erzeugungsweise der als Ort von Ebenen betrachteten Brennfläche: *Je zwei der erwähnten Curven 4. Classe bilden die Basis zweier projectiver Schaaren von Flächen 2. Classe, die die Brennfläche erzeugen.* Alle ∞^2 Erzeugungen der Art erhält man übrigens unmittelbar aus der Gleichung (41), wenn man bemerkt, dass deren linke Seite die Gestalt einer zweireihigen Determinante hat.

Singularitäten von Brennfläche und Mittelfläche.

Die Bestimmung der mehrfach zählenden Punkte und Ebenen der Brennfläche kann nach bekannten Methoden ausgeführt werden. Man hat zu verlangen, dass die ersten, zweiten, . . . Polaren eines zu suchenden Punktes oder einer Ebene der Fläche unbestimmt werden. Das Ergebniss der etwas umständlichen Untersuchung dieser Frage ist im Wesentlichen, dass andere Singularitäten der genannten Art nicht vorhanden sind, als die, zu denen unsere bisherigen Ueberlegungen ohnehin geführt haben.

Die folgenden Angaben beziehen sich unmittelbar nur auf die Voraussetzung, dass die Parameterfläche $p = 0$ *nicht zerfällt,* dass also $e_1 e_2 e_3$ (d. h. e_2) von Null verschieden ist. Im entgegengesetzten Fall treten gewisse Vereinfachungen ein, die wir nicht besonders erwähnen werden.

Die Brennfläche hat, als Punktort betrachtet, zwei von uniplanaren Knotenpunkten gebildete Doppelcurven. Die eine dieser sogenannten Rückkehrkanten oder Gratlinien ist der absolute Kegelschnitt, dessen Punkten als stationäre Tangentialebene die unendlich ferne Ebene zugehört. Die zweite Gratlinie ist reell, und identisch mit der Raumcurve 4. O. 1. Art, in der die Parameterfläche $p = 0$ *von ihrer Umfassungskugel geschnitten wird.* (Vgl. Nr. 24, 40, 41.) *Längs dieser Curve fällt die Tangentialebene der Fläche zusammen mit der Tangentialebene der Parameterfläche* $p = 0$. *Beide Curven enthalten zusammen den Ort aller Punkte, von denen nur je ein Congruenzstrahl ausgeht. Die beiden Curven schneiden sich in den vier Cuspidalpunkten beider Congruenzen, die dreifache, und zwar wiederum uniplanare Punkte der Fläche sind.* Die Ebene eines solchen Punktes verbindet die zugehörigen Tangenten beider Gratlinien. Ihre Gleichung ist

$$\sqrt{e_2 - e_3}\, x_1 + \sqrt{e_3 - e_1}\, x_2 + \sqrt{e_1 - e_2}\, x_3 = 0 .$$

Sie geht also durch den Mittelpunkt o, und trennt die beiden entsprechenden Cuspidalebenen harmonisch von der unendlich fernen Ebene.

Ausser den Gratlinien und den darauf enthaltenen vier cubischen Knotenpunkten hat die Brennfläche noch sechs einzelne und zwar conische Knotenpunkte, von denen zwei reell sind; nämlich die sechs Scheitel beider Congruenzen.

Die Tangentialkegel der Fläche in diesen Knotenpunkten sind identisch mit denen, die (in dem durch Nr. 21 erklärten Sinne) die zugehörigen zerfallenden Parameterflächen $p = e_i$ *projiciren.*

Die Brennfläche hat ferner, als Fläche 4. Classe (Ort von Ebenen) angesehen, fünfzehn Doppelebenen.

Eine von diesen ist die unendlich ferne Ebene, die die Fläche in allen Punkten des absoluten Kegelschnitts berührt. Ferner sind Doppelebenen die $2 \cdot 4$ Cuspidalebenen der einen und der anderen Congruenz, endlich die sechs Scheitelebenen.

Für die beiden reciproken Congruenzen haben die dreierlei Doppelebenen eine sehr verschiedene Bedeutung. In der unendlich fernen Ebene sind, wie schon bemerkt, die Tangenten des absoluten Kegelschnitts Gerade beider Congruenzen zugleich. Brenn- und Grenzpunkte sind bei diesen die Brennfläche sechspunktig berührenden Geraden im Berührungspunkt zusammengefallen.

Eine *Cuspidalebene* z. B. der *ersten* Congruenz wird von der Brennfläche in einem Kegelschnitt φ berührt, der die Berührungspunkte der Ebene mit den Parameterflächen enthält, und in einem zweiten Kegelschnitt ψ durchsetzt. Beide Kegelschnitte berühren einander und die unendlich ferne Ebene im zugehörigen Cuspidalpunkt, sind also Parabeln und zugleich Grenzkreise. In der betrachteten Ebene liegt erstens das uns schon bekannte Büschel von Minimalgeraden der ersten Congruenz. Die Brennpunkte dieser Geraden liegen auf dem Kegelschnitt φ, ihre Grenzpunkte auf dem Kegelschnitt ψ. Es liegen also in diesem Fall ein Brennpunkt und ein Grenzpunkt vereinigt, nicht aber auch die beiden anderen, was dadurch verständlich wird, dass auch der Mittelpunkt der betrachteten Congruenzlinie in den zugehörigen Cuspidalpunkt gerückt ist. Ferner liegen in der genannten Ebene ∞^1 Gerade der zweiten Congruenz, die den Kegelschnitt ψ umhüllen. *Diese ∞^1 Geraden (und sie allein unter allen eigentlichen Geraden der zweiten Congruenz) berühren also die Brennfläche in je drei Punkten. Diese drei Punkte haben jeder einen anderen Charakter.* Der eine ist der Berührungspunkt der betrachteten Geraden mit ψ. Er ist Brennpunkt. Die beiden anderen liegen auf φ, und von ihnen ist der eine ebenfalls Brennpunkt, der andere doppelt zählender Grenzpunkt: Die genannten ∞^1 Geraden haben trotz ihrer dreifachen Berührung mit der Brennfläche *nicht* die Eigenschaft, aus lauter Brennpunkten zu bestehen. *Diese $4 . \infty^1$ Geraden sind übrigens auch die einzigen eigentlichen Geraden in der zweiten Congruenz, deren Grenzpunkte zusammenfallen.*

In der That, setzen wir in der Gleichung (35) für q den Werth $-\frac{p}{2}$, wodurch, wie wir wissen, die zu den Grenzpunkten des Strahls

σ der *ersten* Congruenz gehörigen Werthe von σ_0 bestimmt werden, so wird

$$(43) \qquad 4\sigma_0^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) =$$
$$= (e_1\sigma_1^2+e_2\sigma_2^2+e_3\sigma_3^2)^2 - 4(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)(e_2e_3\sigma_1^2+e_3e_1\sigma_2^2+e_1e_2\sigma_3^2) =$$
$$= \Pi\{\sqrt{e_2-e_3}\,\sigma_1+\sqrt{e_3-e_1}\,\sigma_2+\sqrt{e_1-e_2}\,\sigma_3\},$$

wo sich das Product über die vier Vorzeichencombinationen der Wurzeln erstreckt, die aus einer unter ihnen durch gleichzeitige Aenderung *zweier* Vorzeichen hervorgehen. Nehmen wir an, dass $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 \neq 0$ ist, womit die zuvor schon behandelten Fälle ausgeschlossen werden, in denen die Gerade σ entweder uneigentlich ist, oder die Grenzpunkte *nicht* zusammenfallen, so muss, wenn σ_0 verschwinden soll, die Gerade σ in einer Cuspidalebene der *zweiten* Congruenz liegen. Vertaucht man schliesslich beide Congruenzen, so ergiebt sich der behauptete Satz.

Der Schnitt der Brennfläche mit der Mittelfläche der ersten Congruenz enthält nach dem Gesagten als Theil vier imaginäre Kegelschnitte $\psi_1' \ldots \psi_4'$, die in den Cuspidalebenen der *zweiten* Congruenz liegen. Der Rest des Schnittes ist eine Curve 16. O. *In dieser Curve 16. Ordnung wird die Brennfläche von den Geraden einer Regelfläche 8. Ordnung vierpunktig berührt, nämlich von den eigentlichen Geraden der ersten Congruenz, die zusammenfallende Brennpunkte haben.*

Endlich haben wir noch die *Scheitelebenen* zu betrachten. Eine Scheitelebene wird von der Fläche 6. Ordnung in einem Kreise berührt (S. 478) und in einem zweiten concentrischen geschnitten. Auf einem Durchmesser des ersten Kreises (einem Hauptstrahl) liegen die beiden zugehörigen Scheitel, und die durch diese bestimmten Linienbüschel gehören je einer der beiden Congruenzen an, und umfassen die Gesammtheit der in der Scheitelebene gelegenen Congruenzlinien.

Es ist, namentlich für eine später zu machende Anwendung, zweckmässig, die angeführten Sätze noch dadurch zu erläutern, dass man eine correlative Transformation vornimmt. Das geschieht am Einfachsten so, dass man, im Gegensatz zu dem bisher beobachteten Verfahren, mit dem Zeichen u_i den Begriff von homogenen Punktcoordinaten, mit dem Zeichen x_i den von homogenen Ebenencoordinaten verbindet. Die Begriffe Ordnung und Classe werden dann vertauscht, und wir erkennen:

Die Brennfläche geht durch irgend eine reelle Correlation über in eine durch reelle projective Büschel von Flächen 2. Ordnung erzeugbare Fläche 4. Ordnung mit fünfzehn conischen Knotenpunkten, deren drei reell sind.

Einer von diesen ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) ist dadurch ausgezeichnet, dass sein Tangentialkegel aus dreipunktig berührenden Tangenten besteht, dass also von ihm aus weitere Tangenten an die Fläche nicht gehen. Von jedem der übrigen vierzehn Doppelpunkte geht, ausser seinem eigenen Tangentialkegel, noch ein weiterer von Tangenten der Fläche gebildeter Kegel aus. Diese Punkte können nach dem Schema $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2$ oder $4 \cdot 2 + 3 \cdot 2$ gruppirt werden.

Die betrachtete Fläche 4. Ordnung wird von sechs Ebenen (darunter zwei reellen) in irreducibelen Kegelschnitten, und von vier weiteren (imaginären) Ebenen in Paaren gerader Linien berührt.

Die sechs Ebenen gehen durch die angewendete Correlation aus den sechs Scheiteln hervor, die vier Ebenen aus den vier Cuspidalpunkten. Die genannten $4 \cdot 2$ auf der Fläche verlaufenden Geraden treten in Evidenz, wenn man die Gleichung (41) so schreibt (vgl. Nr. 43):

$$(44) \qquad \begin{gathered} u_0^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - \\ - \tfrac{1}{4} \Pi \left\{ \sqrt{e_2 - e_3}\, u_1 + \sqrt{e_3 - e_1}\, u_2 + \sqrt{e_1 - e_2}\, u_3 \right\} = 0. \end{gathered}$$

Die besprochenen 15 Punkte und 10 Ebenen bilden zusammen eine merkwürdige Figur, deren nähere Untersuchung auf Grund der entwickelten Formeln ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann. Wir bemerken darüber nur, dass eine unter allgemeineren Voraussetzungen entwickelte Theorie *) sich im Wesentlichen unverändert auf den vorliegenden besonderen Fall anwenden und mit den Hülfsmitteln der elementaren Algebra strenge begründen lässt. —

Wir kehren nach dieser Abschweifung wieder zu unserer ursprünglichen Auffassung zurück. *Wir wollen jetzt noch kurz andeuten, wie sich die Theorie unserer Flächen in die allgemeine Theorie der Flächen 4. Classe (oder 4. Ordnung) einbeziehen lässt.*

Unsere besondere Fläche 4. Classe mit 15 Doppelebenen hängt, nachdem man sie einer beliebigen Collineation unterworfen hat, von sechzehn Constanten ab. Fünfzehn von diesen können angesehen werden als die Constanten der desmischen Configuration. Die Figur von drei desmischen Tetraedern ist nämlich, wie bekannt, und wie übrigens

*) Vgl. Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme, Abh. der Berliner Akademie, 1867.

R. Sturm, Liniengeometrie, II, Nr. 423 u. ff. R. Funk, Die Configuration $(15_6, 20_3)$. Diss. Strassburg, 1901. In den beiden zuletzt genannten Schriften findet man weitere Litteraturangaben.

leicht nachgewiesen werden kann, vollständig und eindeutig bestimmt, sobald eines der drei Tetraeder und eine Ebene (oder ein Punkt) eines der anderen gegeben sind. Wir zeichnen etwa die zuletzt genannte Ebene aus. Diese wird dann von den Ebenen der beiden übrigen Tetraeder in denselben vier Geraden geschnitten. Ist nun ein irreducibeler Kegelschnitt, der diese vier Geraden berührt — als „absoluter" Kegelschnitt — angenommen, womit die letzte verfügbare Constante (eine absolute Invariante der Figur) festgelegt ist, so ist die ganze Figur vollkommen bestimmt. Wie man sieht, giebt es auch Flächen 4. Classe (Ordnung) mit fünfzehn *reellen* Doppelebenen (Doppelpunkten), deren algebraische Theorie sich von der unsrigen nur dadurch unterscheidet, dass über die Realität der sechzehn nothwendigen Bestimmungsstücke andere Annahmen gemacht werden.

Die zweimal vier Doppelebenen der Steiner'schen Flächen, die die Mittelpunkte der Strahlen beider Congruenzen enthalten, bilden zusammen mit dem Coordinatentetraeder ebenfalls eine desmische Configuration, und zwar eine Figur von drei *reellen* desmischen Tetraedern.

Die zur ersten Mittelfläche gehörigen Doppelebenen und die auf ihnen gelegenen Punkte der Fläche (deren parabolische Curven) werden dargestellt durch die Gleichungen $\xi_i' = 0$, wenn

(44)

$$2\xi_0' = (\quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \xi_0 + \frac{2\xi_1}{e_2 - e_3} + \frac{2\xi_2}{e_3 - e_1} + \frac{2\xi_3}{e_1 - e_2},$$

$$2\xi_1' = (-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \xi_0 + \frac{2\xi_1}{e_2 - e_3} - \frac{2\xi_2}{e_3 - e_1} - \frac{2\xi_3}{e_1 - e_2},$$

u. s. f. (Vgl. Nr. 30.) Im Coordinatensystem ξ_i' hat also die erste Mittelfläche die bekannte Gleichung

$$\sqrt{\xi_0'} + \sqrt{\xi_1'} + \sqrt{\xi_2'} + \sqrt{\xi_3'} = 0, \tag{45}$$

oder, in zugehörigen Ebenencoordinaten,

$$\frac{1}{\omega_0'} + \frac{1}{\omega_1'} + \frac{1}{\omega_2'} + \frac{1}{\omega_3'} = 0. \tag{46}$$

Die sechs uniplanaren Knotenpunkte (pinchpoints) beider Steinerschen Flächen sind die Grenzpunkte der Hauptstrahlen. Bemerkt sei noch, dass unsere Mittelflächen von der allgemeinen Steiner'schen Fläche projectiv nicht verschieden, nämlich nur insofern speciell sind, als sie ihre Doppelgeraden im Sinne der *elementaren* Geometrie zu Symmetrieaxen haben.

*Weitere Liniencongruenzen mit derselben Brennfläche**).

Eine etwa in der ersten Congruenz enthaltene Regelschaar 2. Ordnung hat als Bild (Spur) in der unendlich fernen Ebene einen Kegelschnitt oder eine Gerade. Dieses Bild hat mit den Curven 3. O. durch die vier Cuspidalpunkte zwei bewegliche Schnittpunkte gemein. Also geht im ersten Falle der Kegelschnitt durch die vier Cuspidalpunkte, im zweiten die Gerade durch einen Cuspidalpunkt. Wir finden also:

Alle Regelflächen 2. Ordnung, die in einer aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus enthalten sind, lassen sich auf fünf verschiedene Schaaren von je ∞^1 solchen Flächen vertheilen. Die eine dieser Schaaren enthält die Parameterflächen, die vier übrigen werden von imaginären Paraboloiden gebildet.

Jedes dieser Paraboloide ist zusammen mit dem zugehörigen Büschel von Minimalgeraden eine *Ausartung des Cylindroids*. Jede der vier Schaaren von Paraboloiden hat als Enveloppe die Brennfläche der Kettencongruenz. Die eine Schaar von Erzeugenden gehört unserer ersten Kettencongruenz selbst an, die andere aber, wie man leicht sieht, weder dieser noch auch der reciproken Congruenz. Wir erhalten also vier neue Liniencongruenzen, die zur selben Brennfläche gehören. Auch sie haben, wie sich unschwer einsehen lässt, die Ordnung 3 und die Classe 2.

Eine Folgerung, die wir hieraus ziehen wollen, lässt sich etwas bequemer darstellen, wenn wir wieder eine correlative Transformation vornehmen. Wir erhalten dann im Ganzen sechs Congruenzen 3. Classe und 2. Ordnung, deren Brennfläche eine und dieselbe Fläche 4. Ordnung mit fünfzehn Doppelpunkten ist.

Diese Fläche nun hat in einer Ebene, die durch keinen der Doppelpunkte geht, achtundzwanzig Doppeltangenten. Zehn davon liegen auf den nachgewiesenen $6 + 4$ Ebenen, die die Fläche in Kegelschnitten berühren. Die übrigen achtzehn vertheilen sich zu dreien auf die $1 + 1 + 4$ gefundenen Congruenzen. Es folgt also:

Die gemeinsame Brennfläche der beiden reciproken aplanaren Kettencongruenzen ist Brennfläche noch von vier weiteren, und zwar imaginären Liniencongruenzen 3. Ordnung 2. Classe.

*Die sämmtlichen Doppeltangenten der genannten Fläche 4. Classe***)

---

*) Vgl. die Citate auf Seite 486.

**) D. h., die Geraden, durch die zwei doppelt zählende Ebenen der Fläche gehen.

werden gebildet von den Geraden der gefundenen sechs Congruenzen, von den Geraden durch die sechs conischen Knotenpunkte und den Geraden durch die vier dreifachen Punkte der Fläche.

Mit anderen Worten, projicirt man die Fläche aus einem Punkte, der auf keiner der fünfzehn Doppelebenen liegt, durch einen Kegel 4. Classe, so sind dessen Doppelgeraden nach dem Schema

$$28 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 6 + 4$$

auf die sechzehn angeführten Liniencongruenzen vertheilt. Weitere Liniencongruenzen als die sechs zuerst genannten, die dieselbe Brennfläche hätten, kann es nicht geben, abgesehen von dem Orte der Haupttangenten der Fläche, für den diese in einem ganz anderen Sinne Brennfläche ist. Es ist damit natürlich auch gezeigt, dass man von der reciproken Kettencongruenz ausgehend zu denselben vier weiteren Congruenzen kommt.

Die Gestalt der Brennfläche.

Die Construction der Brennfläche erfolgt am bequemsten wohl auf Grund ihrer Erzeugung durch die Parameterflächen und die zugehörigen Umfassungskugeln. Alle reellen Punkte der Fläche werden danach gefunden, wenn man p gemäss den die Ungleichungen $e_1 \geqq p \geqq e_3$ nach sich ziehenden Ungleichungen

$$-e_3 \geqq 2p \geqq -e_1 \tag{47}$$

wählt, die die Bedingnng dafür bilden, dass die Parameterfläche p von ihrer Umfassungskugel in reellen Punkten getroffen wird.

Treffen wir die Bestimmung, dass e_2 *negativ* sein soll (wodurch die Gestalt der Fläche offenbar nicht beeinflusst wird), so ergiebt sich Folgendes:

Lässt man p vom Werthe $-\frac{e_3}{2}$ bis zum Werthe Null abnehmen, so wächst der Radius der Umfassungskugel stetig vom Werthe $\frac{e_1 - e_2}{2}$ bis zu einem Maximum $\left|\sqrt{-(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2)}\right|$. Man erhält eine Schaar zweitheiliger sphärischer Schnittcurven, die einen *ringförmigen Theil der Fläche* überdecken, dessen Begrenzung die *Gratlinie* ist. Auf diesem Theil der Fläche verläuft ein Paar von Kreisen $\left(p = -\frac{e_2}{2}\right)$, das die im reellen Gebiet auf zwei Punkte reducirte Curve $p = -\frac{e_3}{2}$ von der Gratlinie $p = 0$ trennt.

Lässt man sodann p vom Werthe Null bis zum Werthe $-\frac{e_1}{2}$ abnehmen, so nimmt der Radius der Umfassungskugel von dem ge-

nannten Maximum bis zu dem Werthe $\frac{e_2 - e_3}{2}$ ab. Wir erhalten eine neue Schaar zweitheiliger Schnittcurven. Diese überdecken *zwei muldenförmige Theile der Fläche, die in den beiden reellen Knotenpunkten zusammenhängen.* Dem Werthe $p = e_2$ entspricht das zweite Paar von reellen Kreisen auf der Fläche, die beiden Kreise enthaltend, die durch die Knotenpunkte gehen. Diese zerfallende Curve trennt wiederum die Gratlinie von einer Schnittcurve, die sich auf ein Punktpaar reducirt $\left(p = -\frac{e_1}{2}\right)$.

Die reellen Scheitelebenen berühren die Fläche längs des letzten Kreispaars und durchsetzen sie längs des ersten.

Diese Verhältnisse werden für den Fall $e_1 = 6$, $e_2 = -2$, $e_3 = -4$ durch die beigegebenen Figuren 43...45 veranschaulicht, die von Herrn stud. W. Vogt in Greifswald gezeichnet worden sind.

Fig. 43 zeigt den ringförmigen Theil der Fläche und eine der beiden Mulden. Die Knotenpunkte sind verdeckt, man sieht aber ein Stück von einem der hindurchlaufenden Kreise ($p = -2$). Dem Werthe $p = 1$ entsprechen die zwei Kreise auf dem ringförmigen Theil.

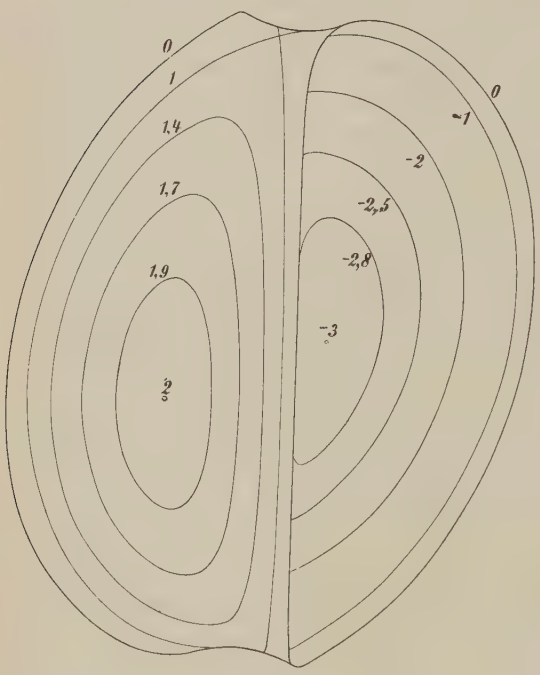


Fig. 43.

Fig. 44 (s. d. Tafel) zeigt, ausser der Gratlinie, die auf der Fläche liegenden Kreise in ihrem ganzen Verlauf. Ausserdem sind die Hauptschnitte der Fläche, die Schnitte mit den Symmetrieebenen, punktirt eingetragen. Der in der Ebene $x_1 = 0$ gelegene Hauptschnitt besteht aus einem Oval und zwei isolirten Doppelpunkten in dessen Innerem, den Knotenpunkten der Fläche. Das Oval verläuft auf dem ringförmigen Flächentheil. Der Hauptschnitt $x_2 = 0$ ist eine Curve mit vier Spitzen, die auf der Gratlinie liegen; zwei Stücke der Curve verlaufen auf dem ringförmigen

Flächentheil, und zwei in den Mulden. Der Hauptschnitt $x_3 = 0$ verhält sich ähnlich, hat aber zwei gewöhnliche Doppelpunkte in den Knotenpunkten der Fläche.

Die Fig. 45 endlich (s. die Tafel) zeigt die Hauptschnitte nochmals, und ausserdem den Zusammenhang der beiden Mulden in den Knotenpunkten. Von den beiden durch die Knotenpunkte gehenden Kreisen ist in diese Figur nur der eine eingetragen. Der andere verläuft im Bilde sehr nahe dem scheinbaren Umriss der Fläche.

Die Längeneinheit erscheint in den in der Reproduction leider etwas klein gerathenen Figuren auf der x_1, x_2, x_3-Axe in den Verhältnissen $21 : 22 : 11$.

Die den Parameterwerthen $p = 2,\ 1,\ 0,\ -2,\ -3$ entsprechenden Kugelradien sind $r = 4,\ 5,\ 5{\cdot}29,\ 4,\ 1$.

In dem von uns ausgeschlossenen Fall $e_2 = 0$ enthält die Fläche nur zwei reelle, einander unter rechten Winkeln schneidende Kreise, die zusammen gleichzeitig die Gratlinie bilden. Diese Kreise zerlegen die Fläche in vier congruente sattelförmige Stücke; ihre Schnittpunkte sind cubische, und zwar uniplanare Knotenpunkte. Diese besondere Fläche wird leicht, auf zwei verschiedene Weisen, als Grenzlage von Flächen der zuvor beschriebenen Art aufgefasst.

Schliesslich heben wir noch hervor:

Durch die Brennfläche wird das Continuum aller reellen eigentlichen und uneigentlichen Punkte und ebenso das Continuum aller reellen Ebenen in (je) zwei Continua zerlegt.

Die Brennfläche trennt nämlich die in ihrem „Inneren" gelegenen Punkte, von denen je (mindestens) drei reelle Gerade der beiden zugehörigen Congruenzen ausgehen, von den Punkten „ausserhalb", von denen nur je eine reelle Congruenzlinie ausgeht. Ebenso trennt sie die Ebenen, die je (mindestens) zwei reelle Congruenzlinien enthalten, von denen, die keine enthalten.

Nimmt man auf einer der beiden Scheitelebenen und im Inneren der Brennfläche einen Punkt nach Belieben an, so gehen durch diesen drei verschiedene Gerade der ersten Kettencongruenz, deren eine den zugehörigen Scheitel enthält. Liegt der Punkt nicht gerade auf der die Scheitel (die Knotenpunkte der Brennfläche) verbindenden Axe $x_1 = x_3 = 0$, so können die beiden anderen hindurchgehenden Congruenzlinien dadurch gefunden werden, dass man ihre Schnittpunkte mit der anderen Scheitelebene aufsucht. Diese können nämlich, nach dem Satze über die Erzeugung der Congruenz mit Hülfe ebener Büschel (S. 464) sehr leicht *elementargeometrisch* construirt werden, als Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises.

Es dürfte sich wohl verlohnen, die durch die reciproken Kettencongruenzen vermittelten Abbildungen zweier Kreisscheiben noch näher zu untersuchen, und, unter Anwendung der darstellend-geometrischen Methode, den Gegenstand mit den vorausgehenden Betrachtungen in Verbindung zu bringen. Man wird auf diesem Wege zu einer auch in den Einzelheiten anschaulichen Vorstellung von der Vertheilung der reellen Congruenzlinien und der Parameterflächen im Raume und von deren Beziehung zur Brenn- und Grenzfläche gelangen können.

§ 38.

Fortsetzung der Theorie der aplanaren Kettencongruenzen: Einführung elliptischer Coordinaten und Functionen.

Wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, kann die Schaar der Parameterflächen als ein *Seitenstück zur Schaar der confocalen Flächen 2. Classe* betrachtet werden. Und in ähnlicher Richtung wie die Theorie der confocalen Flächen lässt sich auch die Theorie der Parameterflächen weiter entwickeln: Wie dort eine Vereinfachung durch Einführung der elliptischen Coordinaten bewirkt wird, und bei einigen Problemen die Einführung der sogenannten Lamé'schen Coordinaten sich vortheilhaft erweist, so lässt sich hier noch ein wesentlicher Fortschritt erzielen, wenn man die gewöhnlichen elliptischen und Lamé-schen Coordinaten auf der Kugelfläche durch das Gauss'sche Verfahren der sphärischen Abbildung auf die Theorie der aplanaren Kettencongruenzen überträgt. Wir erreichen auf diese Weise bei unseren Kettencongruenzen die Lösung der *Integrationsprobleme*, die man in der allgemeinen Theorie der Liniencongruenzen zu stellen pflegt. Da ausserhalb der Theorie der Normalencongruenzen specielle Liniencongruenzen, bei denen man diese Probleme wirklich lösen kann, noch nicht gerade zahlreich zu sein scheinen, so dürfte es sich wohl verlohnen, die angedeuteten Gedanken wenigstens in den Hauptzügen zu entwickeln.

Strictionsgerade. Elliptische Coordinaten.

Wir knüpfen an die Gleichung (37) an, die genau die aus der Theorie der confocalen Kegel 2. Classe bekannte Form hat, und durch die Richtungen der ihr genügenden Geraden σ in der That auch eine Schaar solcher Kegel definirt, eben die Kegel, deren Erzeugende orthogonal sind zu den Ebenen der Asymptoten-Kegel der Parameterflächen, und parallel zu den Erzeugenden der Kegel, die die Parameterflächen aus den Scheiteln projiciren (S. 468).

Wir werden die Gleichung (37) in einen engeren Zusammenhang bringen mit der Theorie unserer beiden Hauptfusspunktflächen, indem

wir einen neuen Begriff einführen, den der *Strictionsgeraden* zu einer gegebenen Geraden σ der aplanaren Kettencongruenz. Wir betrachten zwei zu σ benachbarte Gerade der Congruenz, die derselben Parameterfläche angehören, wie σ selbst, construiren deren der zweiten Congruenz angehörige gemeinsame Normale, und lassen schliesslich die beiden Nachbargeraden mit σ zusammenfallen. Ist dann σ nicht Hauptstrahl, so erhält man für diese gemeinsame Normale eine *bestimmte* Grenzlage, die wir eben Strictionsgerade zu σ nennen, nämlich die Gerade mit den Parametern

$$(48) \qquad \tau_1 = (p - e_1)\,\sigma_1, \quad \tau_2 = (p - e_2)\,\sigma_2, \quad \tau_3 = (p - e_3)\,\sigma_3.$$

Ist dagegen σ Hauptstrahl, so ist jede Erzeugende des der zweiten Congruenz angehörigen Cylindroids, dessen Hauptaxe σ ist, als Strictionsgerade zu σ anzusehen; die Gleichungen (48) liefern dementsprechend unbestimmte Verhältnisse der Grössen τ_i.

Die Verhältnissgrössen

$$(49) \qquad 0 : (p - e_1)\,\sigma_1 : (p - e_2)\,\sigma_2 : (p - e_3)\,\sigma_3$$

sind nun, falls sie bestimmt sind, die Coordinaten der Ebene, die σ aus dem Mittelpunkt o projicirt:

„Legt man durch jede Erzeugende eines Hyperboloids eine Ebene senkrecht zur Tangentialebene ihres Strictionspunktes, so entstehen die Ebenen des Asymptotenkegels der Fläche."

Hierin liegt eine einfache *Construction der Strictionspunkte* und -Curven zu den beiden Regelschaaren der Fläche, die auch rein-geometrisch leicht begründet werden kann.

Strictionsgerade τ einer eigentlichen Geraden σ der ersten Kettencongruenz ist jede eigentliche Gerade der zweiten Congruenz, die senkrecht steht auf einer Ebene, die σ mit dem Mittelpunkt beider Congruenzen verbindet.

Der Schnittpunkt beider Geraden ist der Mittelpunkt der Strictionsgeraden τ; d. h. er hat die Coordinaten

$$(50) \qquad \eta_0 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2, \quad \eta_1 = -(e_2 - e_3)\,\tau_2\tau_3,$$

u. s. w.; oder, nach proportionaler Aenderung, die Coordinaten

$$(51) \qquad \eta_0' = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \quad \eta_1' = (e_2 - e_3)\,\sigma_2\sigma_3 - \sigma_0\sigma_1,$$

u. s. f., wo

$$(52) \qquad \sigma_0 = -\frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(p - e_1)^2\sigma_1^2 + (p - e_2)^2\sigma_2^2 + (p - e_3)^2\sigma_3^2}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks kann im reellen Gebiete nur verschwinden, wenn σ einer der drei Hauptstrahlen ist; man erhält dann einen unbestimmten Werth von σ_0.

Aus den angeführten Thatsachen lässt sich zunächst der folgende bemerkenswerthe Satz ableiten:

Die ∞^1 Parameterflächen schneiden jede der beiden Mittel- oder Hauptfusspunktflächen in zerfallenden Curven, nämlich in je zwei Raumcurven 4. Ordnung, 2. Art (rationalen Curven 4. O.).

Die erste Mittelfläche z. B. wird von der Parameterfläche p getroffen einmal in einer Curve 4. O., die die Mittel- oder Fusspunkte ihrer Erzeugenden 1. Art enthält, sodann in einer zweiten Curve 4. O., der Strictionscurve ihrer Erzeugenden 2. Art.

Die erste Curve hat in dem ternären Gebiet der Mittelfläche die Gleichung

$$(52) \qquad (p-e_1)\,\sigma_1^{\,2} + (p-e_2)\,\sigma_2^{\,2} + (p-e_3)\,\sigma_3^{\,2} = 0.$$

Alle diese Curven bilden, in dem ternären Gebiet $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$, ein *Büschel von Curven 2. Ordnung.* Die Erzeugenden erster Art der Fläche p sind einfache Secanten, die zweiter Art Trisecanten der Curve (52). Die andere Curvenschaar

$$(53) \quad (p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)\left\{\frac{\sigma_1^{\,2}}{p-e_1} + \frac{\sigma_2^{\,2}}{p-e_2} + \frac{\sigma_3^{\,2}}{p-e_3}\right\} = 0$$

überdeckt die Mittelfläche doppelt. Sie bildet in deren ternärem Gebiet, gehörig ergänzt, eine *Schaar von Curven 2. Classe.* Beide Curvenschaaren sind einander zugeordnet durch das Polarsystem des Kegelschnittes $\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} = 0$, der durch Vermittelung der ersten Congruenz dem absoluten Kegelschnitt zugeordnet wird.

Ferner ergiebt sich:

Jede reelle Gerade σ der ersten Congruenz ist Strictionsgerade der sie in ihrem Mittelpunkt rechtwinklig schneidenden Geraden der zweiten Congruenz, also, wenn σ nicht Focalaxe ist, Strictionsgerade von zwei völlig bestimmten zu einander senkrechten reellen Geraden dieser Congruenz.

Ist σ zu keinem Hauptstrahl senkrecht, so werden die Parameter τ_i', τ_i'' der gesuchten beiden Geraden dadurch gefunden, dass man zunächst die beiden Wurzeln λ, μ der für p quadratischen Gleichung (53) bestimmt, und dann

$$(54) \qquad \begin{aligned} \tau_1' : \tau_2' : \tau_3' &= \frac{\sigma_1}{\lambda - e_1} : \frac{\sigma_2}{\lambda - e_2} : \frac{\sigma_3}{\lambda - e_3}, \\ \tau_1'' : \tau_2'' : \tau_3'' &= \frac{\sigma_1}{\mu - e_1} : \frac{\sigma_2}{\mu - e_2} : \frac{\sigma_3}{\mu - e_3} \end{aligned}$$

setzt. Die Nenner sind unter der angegebenen Voraussetzung von Null verschieden, und überdies können die stets reellen Grössen λ, μ so geordnet werden, dass

$$e_1 \geqq \lambda \geqq e_2 \geqq \mu \geqq e_3 \tag{55}$$

wird, wobei im vorausgesetzten Falle natürlich die Ungleichheitszeichen gelten. Der Strahl σ ist dann durch die Werthe λ, μ vierdeutig bestimmt: Erklärt man, dass

$$\sqrt{e_3 - e_2} = i\sqrt{e_2 - e_3},\ \sqrt{e_1 - e_3} = i\sqrt{e_3 - e_1},\ \sqrt{e_2 - e_1} = i\sqrt{e_1 - e_2} \tag{56}$$

sein soll, so kann man λ und μ als unabhängige Parameter betrachten, und

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{\lambda - e_1}\sqrt{\mu - e_1}}{\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_3 - e_1}},\quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{\lambda - e_2}\sqrt{\mu - e_2}}{\sqrt{e_3 - e_2}\sqrt{e_1 - e_2}},\quad \sigma_3 = \frac{\sqrt{\lambda - e_3}\sqrt{\mu - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}} \tag{57}$$

setzen, womit zugleich über die numerischen Werthe der Grössen σ_α in bestimmter Weise verfügt ist.

Ist zweitens σ *zu einem Hauptstrahl senkrecht*, aber selbst weder Hauptstrahl noch Focalaxe, so erscheint einer und nur einer der Ausdrücke (54) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Man erkennt unschwer, dass man für diese unbestimmte Grösse den Werth ∞ einsetzen muss, um eine Gerade der reciproken Congruenz zu erhalten, der die gegebene Gerade als Strictionsgerade zugehört: Die eine der beiden gesuchten Geraden ist in diesem Falle Hauptstrahl. Ist also z. B. $\sigma_1 = 0$, so treten an Stelle der Gleichungen (54) diese:

$$\begin{aligned} \tau_1' : \tau_2' : \tau_3' &= 1 : 0 : 0 \quad , \\ \tau_1'' : \tau_2'' : \tau_3'' &= 0 : \sigma_3 : -\sigma_2 . \end{aligned} \tag{54b}$$

Ist drittens σ selbst *Hauptstrahl*, so ist σ Strictionsgerade der beiden anderen Hauptstrahlen; im Falle $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ z. B. erhält man

$$\begin{aligned} \tau_1' : \tau_2' : \tau_3' &= 1 : 0 : 0, \\ \tau_1'' : \tau_2'' : \tau_3'' &= 0 : 0 : 1 . \end{aligned} \tag{54c}$$

Die zugehörigen Werthe von λ und μ sind:

$$\lambda = e_1, \quad \mu = e_3 . \tag{58}$$

Ist endlich σ *Focalaxe*,

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \sqrt{e_1 - e_2} : 0 : \mp\sqrt{e_2 - e_3},$$

so giebt es ∞^1 Gerade in der reciproken Congruenz, deren Strictionsgerade σ ist; nämlich alle, deren Parameter in der Form

$$\bar{\tau}_1 : \bar{\tau}_2 : \bar{\tau}_3 = \pm\sqrt{e_2 - e_3} : \varrho : \sqrt{e_1 - e_2} \tag{54d}$$

enthalten sind, haben diese Eigenschaft. Aber die Grössen λ, μ haben auch in diesem Falle *bestimmte* Werthe:

$$\lambda = e_2 = \mu . \quad (59)$$

Wir benutzen nun die erklärten Grössen λ, μ als „elliptische Coordinaten" der Congruenzlinie σ an Stelle der Parameter $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$.

Darüber ist zunächst zu bemerken:

Durch die elliptischen Coordinaten werden die Congruenzlinien derart zusammengefasst, dass je vier, die durch die Spiegelungen an den Hauptstrahlen in einander übergehen, dieselben Coordinaten erhalten.

Es werden ferner, zunächst im reellen Gebiete, alle Congruenzlinien orientirt, in Speere (S. 9, 143) verwandelt: Es wird die doppelt überdeckte Mannigfaltigkeit der reellen Congruenzlinien ein-eindeutig auf eine Kugel abgebildet durch Parallelismus der orientirten Congruenzlinien zu den gleichfalls orientirten Kugelradien.

Es zeigt das die erste der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^3 &= 1, \\ e_1\sigma_1^2 + e_2\sigma_2^2 + e_3\sigma_3^2 &= p = -\lambda - \mu, \\ e_2e_3\sigma_1^2 + e_3e_1\sigma_2^2 + e_1e_2\sigma_3^2 &= \lambda\mu, \end{aligned} \quad (60)$$

derzufolge man

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = +1 \quad (61)$$

erklären kann. Es gehören danach je *acht orientirte* Congruenzlinien zu denselben elliptischen Coordinaten.

Natürlich erstreckt sich eine solche Zuordnung auch auf *imaginäre* Gerade und Kugelpunkte; es treten aber im imaginären Gebiete singuläre Stellen der betrachteten Abbildung auf, die wir noch kurz besprechen müssen. Zunächst werden den Tangenten des absoluten Kegelschnittes, den der Gleichung

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0 \quad (62)$$

genügenden uneigentlichen Geraden der Congruenz Werthepaare λ, μ zugeordnet, von denen entweder λ oder μ unendlich ist. Der Gleichung (62) aber genügen auch die dem Minimalcomplex angehörigen Congruenzlinien, die *nicht* uneigentlich sind: Den vier Büscheln dieser Minimalgeraden entspricht das Werthepaar $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$, das den Werth von p unbestimmt lässt. *Die vier Büschel eigentlicher Minimalgeraden in der Congruenz, und sie allein, können also durch die ellipti-*

schen Coordinaten nicht vollständig dargestellt werden. Diese Unbestimmtheit verschwindet natürlich beim Uebergang zum Strahlencontinuum.

Der Nutzen der elliptischen Coordinaten beruht nun in der Hauptsache auf folgendem Satz:

Durch Einführung der elliptischen Coordinaten einer Congruenzlinie σ wird es ermöglicht, die Grenzpunkte dieser Geraden von einander zu trennen, und in Folge dessen in einer unbegrenzten nach mehreren Richtungen fortschreitenden Kette von Geraden beider Congruenzen jedesmal entweder die Grenzpunkte oder die Brennpunkte algebraisch zu unterscheiden.

Dass der letzte Theil dieser Behauptung eine unmittelbare Folge des ersten ist, ergiebt sich aus dem auf S. 480 Gesagten. Durch jeden Grenzpunkt einer Congruenzlinie σ von hinreichend allgemeiner Lage geht *eine* Gerade der reciproken Congruenz, auf der dieser Punkt ebenfalls Grenzpunkt ist; es geht ferner durch ihn je *eine* Gerade beider Congruenzen, auf der er Brennpunkt ist; sind auf einer Congruenzlinie die Brennpunkte bekannt, so kann man wieder auf anderen die Brennpunkte oder Grenzpunkte unterscheiden*). *Die elliptischen Coordinaten sind also das erste Glied in einer unbegrenzten Kette von Coordinatensystemen, die alle das Gemeinsame haben, dass sie entweder die Unterscheidung der Grenzpunkte oder die Unterscheidung der Brennpunkte der Congruenzlinien gestatten,* freilich auch, je weiter man sich vom Anfangsglied der Reihe entfernt, eine fortschreitende Complication aufweisen werden.

Suchen wir zunächst, durch Substitution des Werthes $q = -2p = 2(\lambda + \mu)$ in die Gleichung (35) die Brennpunkte der Geraden σ zu ermitteln, so zeigt sich, dass diese Gleichung zwar eine wesentlich vereinfachte Form annimmt,

$$(63) \qquad \sigma_0^2 = -(2\lambda + \mu)(2\mu + \lambda) = (\lambda - p)(p - \mu),$$

dass sie aber zu ihrer Lösung die Adjunction einer neuen Irrationalität erfordert. Anders jedoch verhält es sich mit der durch die Substitution $q = -\frac{p}{2}$ entstehenden Gleichung, von der die Bestimmung

*) Dass bei nicht specieller Wahl von e_1, e_2, e_3 und σ alle diese Ketten sich ins Unendliche erstrecken, ist anzunehmen, aber nicht bewiesen. Dass Polygone der construirten Art sich unter Umständen schliessen können, zeigen bekannte Sätze aus der Theorie der Raumcurven 4. Ordnung.

der Grenzpunkte der Geraden σ abhängt. σ_0^2 wird jetzt ein Quadrat eines als bekannt geltenden Ausdrucks; wir finden:

$$\sigma_0 = \mp \frac{\lambda - \mu}{2} \text{ *)}, \tag{64}$$

wobei, zufolge (51) $-\sigma_0 = \pm \frac{\lambda - \mu}{2}$ den Abstand des einzelnen Grenzpunktes von der Mitte der Geraden σ bedeutet.

Aus der *Reihe von Parameterdarstellungen der als Ort von Punkten oder Ebenen betrachteten Grenz- oder Brennfläche,* die sich aus dem Vorhergehenden ergeben, führen wir einige auf. — Wir ergänzen zuerst die Gleichungen (56), (57) durch die daraus hervorgehenden Formeln

$$\xi_1 = (e_2 - e_3)\sigma_2\sigma_3 = -\frac{\sqrt{\lambda - e_2}\sqrt{\mu - e_2}\sqrt{\lambda - e_3}\sqrt{\mu - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2}}, \text{ u. s. w.,} \tag{65}$$

und haben dann in diesen Grössen unmittelbar die gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten ($\xi_0 = 1$, vgl. Nr. 30) des Punktes (λ, μ) der ersten Mittelfläche vor uns. Der *Ort der Grenzpunkte* zunächst wird dann dargestellt durch die Ausdrücke

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \xi_1 \pm \frac{\lambda - \mu}{2}\sigma_1. \tag{66}$$

Die *Tangentialebene* der Grenz- oder Brennfläche in diesem Punkte ist identisch mit der der Parameterfläche $-\frac{p}{2}$, und hat daher die Coordinaten

$$u_0 = \left(\frac{p}{2} + e_1\right)\left(\frac{p}{2} + e_2\right)\left(\frac{p}{2} + e_3\right)x_0, \quad u_1 = \left(\frac{p}{2} + e_1\right)x_1, \tag{67}$$

u. s. f.

Die *Normalebene (Grenzebene) der Geraden* (λ, μ) *im Grenzpunkte* x, nach dem Früheren ebenfalls eine Brennebene, hat ferner die Coordinaten

$$v_0 = \sigma_0, \; v_1 = \sigma_1, \; v_2 = \sigma_2, \; v_3 = \sigma_3, \tag{68}$$

und deren *Berührungspunkt mit der Brennfläche,* identisch mit dem Berührungspunkt der Ebene v mit der Parameterfläche $-\frac{p}{2}$, die Coordinaten

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \mp \frac{\left(\frac{p}{2} + e_2\right)\left(\frac{p}{2} + e_3\right)\sigma_1}{\frac{\lambda - \mu}{2}}, \text{ u. s. f.} \tag{69}$$

*) In allen folgenden Formeln sind entweder durchweg die oberen oder durchweg die unteren Vorzeichen zu wählen.

Die Ausdrücke (66) und (69) erfüllen, in die Gleichung (40) substituirt, diese identisch, wie man sich durch Ausrechnung überzeugen kann, und ebenso befriedigen die Ausdrücke (67) und (68) die Gleichung (41).

Verbinden wir nun die Punkte x, y durch eine Gerade, oder bringen wir die Ebenen u, v zum Schnitt, so erhalten wir in beiden Fällen eine und dieselbe Gerade τ der zweiten Congruenz, der nunmehr als Brennpunkte und Brennebenen die Punkte x, y und die Ebenen u, v angehören. Wir werden die Parameter τ_i auch dieser Geraden von vorn herein in bestimmter Weise normiren, nämlich wiederum so, dass ihre Quadratsumme gleich Eins wird. Dies gelingt, wie man nach einiger Rechnung findet, durch Adjunction von $\sqrt{2(\lambda-\mu)}$, wofür wir, unter Einführung einer eigentlich überflüssigen numerischen Irrationalität, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda-\mu}$ schreiben wollen. Man kommt so zunächst zu den Gleichungen

$$(70a)\qquad \tau_1 = \frac{\{(\lambda-e_2)(\lambda-e_3)+(\mu-e_2)(\mu-e_3)\}\sigma_1 \pm (\lambda-\mu)\xi_1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda-\mu}\{\mp i\sqrt{\Pi_\lambda}+\sqrt{\Pi_\mu}\}},$$

u. s. w., wo zur Abkürzung

$$(71)\quad \sqrt{\Pi_\lambda}=\sqrt{\lambda-e_1}\sqrt{\lambda-e_2}\sqrt{\lambda-e_3},\quad \sqrt{\Pi_\mu}=\sqrt{\mu-e_1}\sqrt{\mu-e_2}\sqrt{\mu-e_3}$$

gesetzt ist. *Hiermit haben wir also eine unbestimmte Gerade τ der zweiten Congruenz* (unabhängig von dem der Wurzel $\sqrt{2}\sqrt{\lambda-\mu}$ beigelegten Werthe) *so dargestellt, dass ihre Brennpunkte algebraisch getrennt sind.*

Hierbei ist zunächst vorauszusetzen, dass λ und μ endlich und von einander verschieden sind, womit die uneigentlichen und die in den Cuspidalebenen der *ersten* Congruenz verlaufenden Geraden τ (dieselben, die die auf S. 484 besprochenen Kegelschnitte ψ umhüllen) ausgeschlossen sind. Ausserdem aber werden die Formeln (70a) auch dann unbrauchbar, wenn

$$\frac{\Pi_\lambda-\Pi_\mu}{\lambda-\mu}=\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2$$

verschwindet. In diesem Falle werden die Grössen τ_i nicht unendlich, sondern sie erscheinen (wie aus dem Folgenden sich ergiebt) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, werden wir nun die Parameter τ_i nochmals auf andere Weise berechnen, wobei wir zugleich zu eleganteren Formen kommen werden.

Wir bestimmen zunächst die beiden Geraden τ', τ'', deren Stric-

tionsgerade σ ist, nach Anweisung der Gleichungen (54), und normiren auch diese so, dass die Quadratsummen ihrer Parameter τ_i' und τ_i'' gleich der Einheit werden. Es folgt dann, wenn wir die auf der Parameterfläche $\lambda(\mu)$ verlaufende unter diesen Geraden mit $\tau''(\tau')$ bezeichnen:

$$(72)\qquad \begin{aligned} \tau_1' &= \frac{\sqrt{\Pi_\mu}\cdot\sigma_1}{\sqrt{\lambda-\mu}\cdot(\mu-e_1)} = \frac{\sqrt{\lambda-e_1}\sqrt{\mu-e_2}\sqrt{\mu-e_3}}{\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}},\\ \tau_1'' &= \frac{\sqrt{\Pi_\lambda}\cdot\sigma_1}{\sqrt{\mu-\lambda}\cdot(\lambda-e_1)} = \frac{\sqrt{\mu-e_1}\sqrt{\lambda-e_2}\sqrt{\lambda-e_3}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}, \end{aligned}$$

u. s. f., vorausgesetzt natürlich, dass nicht $\lambda = \mu$ ist.

Da die Richtungen der beiden Grenzstrahlen des zu σ gehörigen Cylindroids die Winkel seiner beiden Hauptstrahlen τ', τ'' halbiren, so können wir, um τ zu erhalten, abgesehen von den noch zu bestimmenden Vorzeichen, einfach setzen

$$(70\text{b})\qquad \sqrt{2}\cdot\tau_1 = \tau_1' + \tau_1'', \quad \text{u. s. w.}$$

Das Paar der durch die Gleichungen (70b) dargestellten Geraden stimmt nun, wie eine kurze Rechnung zeigt, wirklich überein mit *dem Paar* der Geraden (70a); und eine vollkommene Uebereinstimmung der *einzelnen* Geraden beider Paare und überdies ihrer Orientirungen wird erreicht, wenn wir die weitere Festsetzung treffen

$$(73)\qquad \sqrt{\mu-\lambda} = \mp i\sqrt{\lambda-\mu}, \text{ *)}$$

die bewirkt, dass im Falle der oberen (unteren) Vorzeichen die Grössen

$$\begin{matrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_1' & \tau_2' & \tau_3' \\ \tau_1'' & \tau_2'' & \tau_3'' \end{matrix}$$

das Coefficientensystem einer eigentlichen (uneigentlichen) orthogonalen Transformation bilden. Wir erhalten also jetzt für die Grössen τ_i die Werthe

$$(70\text{c})\qquad \tau_1 = \frac{\sqrt{\lambda-e_1}\sqrt{\mu-e_2}\sqrt{\mu-e_3} \pm i\sqrt{\mu-e_1}\sqrt{\lambda-e_2}\sqrt{\lambda-e_3}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}},$$

*) Bei Anwendung dieser Formel auf die Grenzwerthe $\lambda, \mu = e_i$ ist Vorsicht vonnöthen. Es ist z. B. bei Wahl der unteren Vorzeichen zwar

$$\lim_{\lambda=e_1,\ \mu=e_2}\left\{\sqrt{\mu-\lambda} - i\sqrt{\lambda-\mu}\right\} = 0,$$

aber nach unserer Definition (56) $\sqrt{e_3-e_1} + i\sqrt{e_1-e_3} = 0$. Aehnliche Erscheinungen in der Theorie der elliptischen Functionen verdienten ebenfalls ausdrücklich angemerkt zu werden.

u. s. f., die im Allgemeinen identisch sind mit denen unter (70a), aber einen weiteren Gültigkeitsbereich haben.

Nunmehr können wir den *Mittelpunkt* η *der Geraden* τ bestimmen aus den Gleichungen

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_1 = -(e_2 - e_3)\tau_2\tau_3, \qquad \text{u. s. w.;} \tag{74}$$

ferner müssen sich *die Brennpunkte* x, y *der Geraden* τ (vgl. Nr. 66, 69) darstellen lassen in der Form

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \quad x_1 = -(e_2 - e_3)\tau_2\tau_3 - \tau_0\tau_1, \\ y_0 &= 1, \quad y_1 = -(e_2 - e_3)\tau_2\tau_3 + \tau_0\tau_1 \text{ u. s. f.}, \end{aligned} \tag{75}$$

wo nun die Grösse τ_0, der negativ genommene Abstand des Brennpunktes x vom Mittelpunkte η, nicht mehr, wie früher, aus einer reinen quadratischen Gleichung

$$\tau_0^2 + (p-e_2)(p-e_3)\tau_1^2 + (p-e_3)(p-e_1)\tau_2^2 + (p-e_1)(p-e_2)\tau_3^2 = 0 \tag{76}$$

zweiwerthig zu bestimmen ist, sondern sich *rational* durch bereits eingeführte Wurzelgrössen ausdrücken lassen muss. Dies gelingt mit Hülfe der Bemerkung, dass die Grössen τ_i als Coordinaten einer Ebene angesehen werden können, die die Gerade σ und also auch den Punkt ξ enthält (vgl. Nr. 39). Es findet sich so für τ_0 der Werth

$$\tau_0 = \frac{i\sqrt{\Pi_\lambda} \mp \sqrt{\Pi_\mu}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda - \mu}}, \tag{77}$$

der in der That die Gleichung (76) befriedigt, übrigens auch dem Ausdruck (70a) entnommen werden kann, dessen Zähler die Bedeutung $\mp(\lambda-\mu)(y_1-x_1)$ hat. — Man achte darauf, dass der Nenner $\sqrt{2}\sqrt{\lambda-\mu}$ allen vier Grössen τ_i gemeinsam ist, und also da entbehrt werden kann, wo es sich nur um die Verhältnisse dieser Grössen handelt.

Nunmehr gelingt es, auf einfache Weise die elliptischen Coordinaten λ', μ' *der Geraden* τ *durch die elliptischen Coordinaten* λ, μ *der Geraden* σ *auszudrücken.*

Was unter den „elliptischen Coordinaten" einer Geraden τ der *zweiten* Congruenz zu verstehen sei, geht im Wesentlichen aus dem Vorhergehenden hervor. Da aber über die Art der Bezeichnung Zweifel walten können (insofern nämlich die Grössen e_1, e_2, e_3 hier durch $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$ vertreten werden), setzen wir ausdrücklich fest, dass die Beziehung der Grössen λ', μ' zu den Grössen τ_α und e_α ebenfalls durch die Formeln (57) (und im reellen Gebiete (55)) bestimmt sein soll*). Nun ergeben sich aus den zu (60) analogen Gleichungen

*) Danach wird also die Spiegelung am Mittelpunkt o ausgedrückt durch die Gleichungen $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$.

$$\begin{aligned} &\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 1 \\ (78)\qquad &e_1\tau_1^2 + e_2\tau_2^2 + e_3\tau_3^2 = -\frac{p}{2} = -\lambda' - \mu', \\ &e_2e_3\tau_1^2 + e_3e_1\tau_2^2 + e_1e_2\tau_3^2 = \lambda'\mu' \end{aligned}$$

und aus der nunmehr leicht abzuleitenden Gleichung

$$\begin{aligned} &e_2e_3\tau_1^2 + e_3e_1\tau_2^2 + e_1e_2\tau_3^2 = -\tfrac{1}{2}p^2 - \tau_0^2 = \\ (79)\qquad &= \tfrac{1}{2}\left\{ -\lambda\mu + e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 \pm \frac{2i\sqrt{\Pi_\lambda}\sqrt{\Pi_\mu}}{\lambda - \mu} \right\} \end{aligned}$$

die gesuchten Werte von λ' und μ':

$$\begin{aligned} 4\lambda' &= -\lambda - \mu + \sqrt{9(\lambda+\mu)^2 + 16\tau_0^2} \\ 4\mu' &= -\lambda - \mu - \sqrt{9(\lambda+\mu)^2 + 16\tau_0^2} \end{aligned} \qquad (80)$$

(s. Nr. 77).

Ebenso lassen sich umgekehrt die elliptischen Coordinaten λ, μ der Geraden σ durch die elliptischen Coordinaten λ', μ' der Geraden τ einfach ausdrücken.

Die Gleichungen

$$\lambda + \mu = -2\lambda' - 2\mu', \left\{ \frac{i\sqrt{\Pi_\lambda} \mp \sqrt{\Pi_\mu}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda - \mu}} \right\}^2 = -(2\lambda' + \mu')(2\mu' + \lambda'),$$

deren zweite das Analogon zur Nr. (63) ist, müssen nämlich die Gerade (λ, μ) — oder vielmehr die Gruppe von vier Geraden, in der diese Gerade enthalten ist — zweideutig bestimmen vermöge einer für $(\lambda - \mu)^2$ quadratischen Gleichung, deren Coefficienten *rational* von λ', μ' abhängen. In der That findet sich, nach ziemlich umständlicher Rechnung, statt der zweiten der angeführten Gleichungen die folgende:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{\lambda-\mu}{2}\right)^4 \cdot (\lambda' - \mu')^2 - 2\left(\tfrac{\lambda-\mu}{2}\right)^2 \cdot \{(\lambda' + 2\mu')\,\Pi_\lambda' + (\mu' + 2\lambda')\,\Pi_\mu'\} + \\ &+ \left\{ \frac{(\lambda' + 2\mu')\,\Pi_\lambda' - (\mu' + 2\lambda')\,\Pi_\mu'}{\lambda' - \mu'} \right\}^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus die gesuchten Werthe der Grössen λ, μ hervorgehen:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + \mu}{2} &= -\lambda' - \mu', \\ (81)\qquad \frac{\lambda - \mu}{2} &= \frac{\sqrt{(\lambda' + 2\mu')\,\Pi_\lambda'} + \sqrt{(\mu' + 2\lambda')\,\Pi_\mu'}}{\lambda' - \mu'} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind also die Auflösung des durch (77) und (80) zusammen dargestellten Gleichungspaares.

Uebrigens lassen sich die Coordinaten σ_i der beiden zu gegebener Geraden τ gehörigen Geraden der ersten Congruenz auch unmittelbar

finden. Soll z. B. die Gerade σ gesucht werden, die ihren Grenzpunkt im Punkte x hat, so ergeben sich die Grössen $\sigma_0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ als Coordinaten der Tangentialebene der Parameterfläche $-\frac{p}{2}$ im Punkte y, dem zweiten Brennpunkt von τ, also z. B.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{y_1}{\left(\frac{p}{2} + e_2\right)\left(\frac{p}{2} + e_3\right)}, \tag{82}$$

wovon man sich auch durch Rechnung überzeugen kann.

Allen diesen Entwickelungen liegt natürlich die Voraussetzung zu Grunde, dass in den betrachteten Ausdrücken die Nenner nicht verschwinden, und dass die Grössen λ, μ, λ', μ' endlich sind. Es müssen also die Geraden σ, τ beide eigentlich und nicht im Minimalcomplex gelegen sein: σ darf weder in einer Cuspidalebene der ersten Congruenz, noch in einer Cuspidalebene der zweiten Congruenz verlaufen. Auch ist zu den verschiedenen Parameterdarstellungen der Brennfläche zu bemerken, dass *keine* von ihnen ohne Weiteres, nämlich ohne Grenzübergänge, *alle* Punkte dieser Fläche liefern wird. Die Formeln zeigen selbst die Ausnahmefälle an: Eine besondere Behandlung verlangen bei den von uns näher betrachteten Parameterdarstellungen die uneigentlichen und zum Theil auch die in den acht Cuspidalebenen gelegenen Punkte der Brennfläche. Reell sind von solchen Punkten nur zwei Scheitel. Die Gleichungen (66), die in dieser Hinsicht mehr leisten als die eleganteren Formeln (75), werden auch für diesen Fall ($\lambda = e_2 = \mu$) nicht illusorisch. *Wir haben also in den Gleichungen (66) eine im reellen Gebiet ausnahmslos brauchbare Parameterdarstellung der Brennfläche vor uns.*

Covariante Differentialausdrücke.

Construiren wir die gemeinsame Normale zweier benachbarter Congruenzlinien $\sigma\,(\lambda, \mu)$ und $\sigma + d\sigma\,(\lambda + d\lambda, \mu + d\mu)$, so wird diese, sofern sie bestimmt ist, die Gerade (λ, μ) in einem gewissen Punkte treffen, dessen Abstand vom Mittelpunkte ξ der Geraden r genannt werden soll. Diese Grösse r stellt sich bekanntlich als Quotient zweier quadratischer Differentialformen dar*), die wir nun berechnen wollen. Wir setzen, uns der üblichen Bezeichnungsweise anschliessend

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \lambda}\right)^2,\quad F = \Sigma \frac{\partial \sigma_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu},\quad G = \Sigma\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu}\right)^2,$$

$$e = \Sigma \frac{\partial \sigma_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda},\quad f = \Sigma \frac{\partial \sigma_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu},\quad f' = \Sigma \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda},\quad g = \Sigma \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu},$$

*) Nach Kummer. S. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. Lukat, Leipzig, 1899, Kap. 10.

und finden

$$e = F = g = 0,$$

$$E = -\frac{\lambda-\mu}{4\Pi_\lambda},\quad G = -\frac{\mu-\lambda}{4\Pi_\mu},\tag{83}$$

$$f = \frac{i(\lambda-\mu)(2\mu+\lambda)}{4\sqrt{\Pi_\lambda}\sqrt{\Pi_\mu}},\quad f' = \frac{i(\mu-\lambda)(2\lambda+\mu)}{4\sqrt{\Pi_\lambda}\sqrt{\Pi_\mu}}.$$

Es wird also

$$d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + d\sigma_3^2 = Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda d\mu + Gd\mu^2 =$$
$$= -\frac{\lambda-\mu}{4}\left\{\frac{d\lambda^2}{\Pi_\lambda} - \frac{d\mu^2}{\Pi_\mu}\right\},\tag{84}$$

$$d\sigma_1 d\xi_1 + d\sigma_2 d\xi_2 + d\sigma_3 d\xi_3 = ed\lambda^2 + (f+f')\,d\lambda d\mu + gd\mu^2 =$$
$$= -\frac{i}{4}\frac{(\lambda-\mu)^2}{\sqrt{\Pi_\lambda}\sqrt{\Pi_\mu}}\,d\lambda d\mu,\tag{85}$$

und

$$r = -\frac{ed\lambda^2+(f+f')\,d\lambda d\mu+gd\mu^2}{Ed\lambda^2+2Fd\lambda d\mu+Gd\mu^2} = -i\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{\Pi_\lambda}\sqrt{\Pi_\mu}}\cdot\frac{d\lambda d\mu}{\left\{\frac{d\lambda^2}{\Pi_\lambda}-\frac{d\mu^2}{\Pi_\mu}\right\}}.\tag{86}$$

Aus diesen Formeln lassen sich nun eine Anzahl von Sätzen ablesen, von denen wir mehrere hervorheben wollen.

Zunächst sagt die Gleichung $F = 0$ aus, was wir ohnehin schon wissen, dass die sphärischen Bilder der durch die Gleichungen $\mu = \text{const.}$ und $\lambda = \text{const.}$ zusammengefassten Congruenzlinien zwei zu einander orthogonale Curvenschaaren (nämlich verschiedene Zweige einer Schaar confocaler sphärischer Kegelschnitte) bilden. Zu einer neuen Einsicht aber, die übrigens auch schon im Vorhergehenden implicite enthalten ist, kommen wir, wenn wir $r = 0$ setzen:

Durch die Gleichungen $\mu = \text{const.}$ oder $\lambda = \text{const.}$ werden die Geraden der ersten Congruenz zu geradlinigen Flächen zusammengefasst, deren Strictionscurve zugleich die Curve der Mitten jener Geraden, und also auch die zum Mittelpunkt o der Congruenz gehörige Fusspunktcurve ist. Jede solche Fläche ist Ort aller Congruenzlinien, die mit zusammengehörigen Focalaxen, insbesondere mit den reellen Focalaxen der Congruenz, Winkel von constanter Summe oder Differenz bilden.

Die fraglichen Flächen bilden, wie aus einer weiterhin noch zu erwähnenden Betrachtung ohne Weiteres sich ableiten lässt, eine einzige analytische Schaar von Flächen 6. Ordnung, deren jede eine Parameterfläche längs ihrer Fusspunktcurve, einer der schon erwähnten rationalen Raumcurven 4. Ordnung, berührt. Durch jede reelle Congruenzlinie gehen zwei reelle Flächen dieser Art.

Verlangen wir ferner, die Congruenzlinien zu sogenannten *Haupt-*

flächen zusammenzufassen, nämlich zu Flächen, die ihre Strictionscurven auf der Grenzfläche haben, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda^2}{\Pi_\lambda} + \frac{d\mu^2}{\Pi_\mu} = 0, \tag{87}$$

die mit Hülfe elliptischer Functionen ohne Weiteres integrirt werden kann. Die linke Seite von (87) ist, wenn σ als reell vorausgesetzt wird, eine Differenz zweier Quadrate, da Π_λ dann negativ, Π_μ positiv ist. Man erhält zwei reelle Schaaren von im Allgemeinen transcendenten Flächen.

Versuchen wir drittens, die Congruenzlinien zu abwickelbaren Flächen zusammenzufassen, so erhalten wir zwar eine Differentialgleichung, die namentlich bei Einführung elliptischer Functionen ebenfalls eine bemerkenswerthe Gestalt hat, einen unmittelbaren Weg zur Integration aber nicht erkennen lässt. Wir kommen indessen zur Lösung des bezeichneten Problems auf andere Art, nämlich auf Grund des folgenden Satzes:

Jede Hauptfläche der ersten der beiden reciproken Kettencongruenzen ist Ort der Binormalen einer Curve, deren Tangenten der zweiten Congruenz angehören, und umgekehrt ist jede solche Binormalenfläche Hauptfläche.

Die genannte Curve ist nämlich die Strictionscurve, die auf Grund der abgeleiteten Sätze orthogonale Trajectorie der Geraden σ (und zugleich geodätische Linie) auf der Hauptfläche ist. Die Tangenten τ dieser Curve liegen also in der reciproken Congruenz. Gehören umgekehrt die Tangenten τ einer Curve der zweiten Congruenz an, so liegen deren Binormalen σ in der ersten Congruenz. Die Curve selbst ist Strictionslinie auf dem Ort von σ, und ausserdem liegt sie auf der Grenzfläche. Also ist der Ort der Strahlen σ eine Hauptfläche der ersten Congruenz.

Um die Geraden der zweiten (ersten) Congruenz zu abwickelbaren Flächen zusammenzufassen, braucht man demnach nur die der ersten (zweiten) Congruenz zu Hauptflächen zusammenzufassen. Man bestätigt das auch unschwer durch Rechnung, am bequemsten mit Hülfe der Ausdrücke (66). Das für $d\lambda : d\mu$ zu wählende Verhältniss ist

$$d\lambda : d\mu = \mp i\sqrt{\Pi_\lambda} : \sqrt{\Pi_\mu}, \tag{88}$$

da $r = -\sigma_0 = \pm\frac{\lambda - \mu}{2}$ werden muss.

Hiermit ist zunächst die eine Schaar von abwickelbaren Flächen in der reciproken Congruenz gefunden. Damit sind aber beide ge-

funden: Zwischen den mit x und y bezeichneten Punkten besteht ein algebraischer Unterschied nicht. Wir haben oben die Gleichungen entwickelt, die das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Grössen λ, μ und λ', μ' ausdrücken: Man hat, um die zweite Schaar abwickelbarer Flächen zu erhalten, nur von dem einen Lösungssystem λ, μ zu dem anderen λ_1, μ_1 überzugehen.

Durch die angegebenen Substitutionen wird also im einem Falle die eine, im anderen die andere der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\mu' + 2\lambda')\, \Pi_{\mu'}}\, d\lambda' + \sqrt{(\lambda' + 2\mu')\, \Pi_{\lambda'}}\, d\mu' = 0 \\ &\sqrt{(\mu' + 2\lambda')\, \Pi_{\mu'}}\, d\lambda' - \sqrt{(\lambda' + 2\mu')\, \Pi_{\lambda'}}\, d\mu' = 0 \end{aligned} \tag{89}$$

der abwickelbaren Flächen in der reciproken Congruenz in die integrirbare Form (87) übergeführt, was unmittelbar wahrscheinlich nur durch beschwerliche Rechnungen festzustellen sein wird.

Wie die Hauptflächen, so sind auch die abwickelbaren Flächen in unseren Congruenzen im Allgemeinen transcendent.

Einführung elliptischer Functionen.

Wir identificiren nunmehr die e_1, e_2, e_3 genannten irrationalen Bewegungsinvarianten unserer Figur mit den in der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen ebenso genannten Grössen und führen durch die Gleichungen

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}} = u, \quad \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}} = v \tag{90}$$

an Stelle der elliptischen Coordinaten λ, μ zwei neue Grössen u, v ein, die wir nun als unabhängige Veränderliche benutzen werden. Die Vorzeichen, die man den Wurzelgrössen in diesen Integralen ertheilen will, sind an sich, ebenso wie die Integrationswege, willkürlich; es wird sich aber aus dem Folgenden ergeben, dass es zweckmässig ist, sie bestimmten Einschränkungen zu unterwerfen.

Vergleichen wir nun die entwickelten Formeln mit solchen, die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt sind, so zeigt sich zunächst, dass die Mehrzahl der eingeführten Wurzelgrössen mit veränderlichen Argumenten *eindeutige* Functionen der Argumente u, v werden, und dass überdies die eingeführten numerischen Irrationalitäten ebenfalls eindeutige Functionen der Perioden $2\omega_1$, $2\omega_3$ der elliptischen Integrale (90) sind.*)

*) Wir verwenden durchweg das System von Bezeichnungen, das sich in dem Werke von Tannery und Molk (Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,

Man findet ohne Weiteres, dass man für die von uns betrachteten Grössen die folgenden Werthe einsetzen kann:

$$\lambda = \wp u, \quad \mu = \wp v, \tag{91}$$

$$\lambda - \mu = \wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}, \tag{92}$$

$$\sqrt{\lambda - e_\alpha} = \sqrt{\wp u - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{\mu - e_\alpha} = \sqrt{\wp v - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha v}{\sigma v}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{93}$$

$$\sqrt{\Pi_\lambda} = -\tfrac{1}{2}\wp' u, \quad \sqrt{\Pi_\mu} = -\tfrac{1}{2}\wp' v. \tag{94}$$

Es folgt also:

Die Coordinaten eines veränderlichen Punktes oder einer veränderlichen Ebene der Grenz- oder Brennfläche lassen sich auf mannigfache Art darstellen als eindeutige, und zwar elliptische, Functionen zweier Parameter u, v.

Einige der gemeinten Parameterdarstellungen erhält man durch Substitution der Werthe (91)...(94) in die Ausdrücke (66)...(77), und eine Methode, mit deren Hülfe man die ganze Kette dieser Parameterdarstellungen finden „kann", ist enthalten in unseren vorausgehenden Betrachtungen, insbesondere in den Formeln (27) und (29).*)

Dass die genannten Parameterdarstellungen *nicht alle* reellen und imaginären Punkte und Ebenen der Brennfläche liefern, geht schon aus unseren bisherigen Darlegungen hervor. Betrachten wir z. B. u, v als Parameter des Punktes x, so sind die in den Cuspidalebenen der ersten Congruenz gelegenen Punkte ausgeschlossen, die die von uns ψ genannten Kegelschnitte erfüllen (S. 484). Aehnlichen Einschränkungen, die in jedem Falle besonders festgestellt werden müssen, unterliegen die anderen Parameterdarstellungen. Wir wollen nur die Abhängigkeit der Geraden σ und damit auch die des Punktes x von den Parametern u, v noch etwas genauer betrachten.

Paris, 1893—1898) entwickelt findet, und das durch einen glücklichen Zufall (da es sich um willkürliche Entscheidung zwischen zwei gleichwerthigen Möglichkeiten handelt) genau übereinstimmt mit dem Bezeichnungssystem, das der Verfasser seiner gleichzeitigen Untersuchungen über die Additionstheoreme der σ-Functionen zu Grunde gelegt hat. Es kommen aus dem genannten Werke besonders in Betracht Bd. I, Nr. 110—122, Bd II, Nr. 287—300.

*) Nämlich bei jeder einzelnen durch eine endliche Zahl sogenannter ausführbarer Operationen. Es bieten aber schon die ersten Schritte Schwierigkeiten. Vgl. Seite 124.

Zunächst sieht man, dass die durch den Gebrauch der elliptischen Functionen eingeführten Bestimmungen

$$(95) \qquad \sqrt{e_1 - e_2} > 0, \quad \sqrt{e_1 - e_3} > 0, \quad \sqrt{e_2 - e_3} < 0$$

bei der Art, wie diese Wurzelgrössen in die Formeln eingehen, eine Einschränkung für die Lage der Geraden σ nicht bedeuten können, sofern nur die Variabilität der übrigen Wurzelgrössen es erlaubt, von jedem Parametersystem σ_1, σ_2, σ_3 zu den acht Systemen $\pm\sigma_1$, $\pm\sigma_2$, $\pm\sigma_3$ überzugehen. Das ist aber wirklich der Fall:

Durch Einführung der Parameter u, v werden die durch die elliptischen Coordinaten λ, μ zusammengefassten vier Congruenzlinien σ wieder getrennt, und es werden überdies auch deren Orientirungen unterschieden.

Es entspricht nämlich jedem Werthsystem u, v, vorausgesetzt, dass weder u noch v eine Periode ist, eine bestimmte orientirte Gerade σ.

Diese ändert sich nicht, wenn man u oder v um eine doppelte Periode $4\omega_\alpha$, oder u und v zugleich um dieselbe Periode $2\omega_\alpha$ vermehrt.

Die hiernach noch übrigen vier wesentlich-verschiedenen Periodenänderungen vertauschen je vier zusammengehörige Gerade unter einander.

Ferner ändert die dargestellte Congruenzlinie sammt ihrer Orientirung sich nicht, wenn man u, v durch $-u$, $-v$ ersetzt.

Aendert man jedoch das Vorzeichen von u oder v, so erhält jede Gerade σ die entgegengesetzte Orientirung, und es werden zugleich ihre beiden Grenzpunkte vertauscht.

Umgekehrt kann man, wenn die orientirte nicht dem Minimalcomplex angehörige Gerade σ und einer ihrer Grenzpunkte x gegeben sind, die zugehörigen Werthe von u und v, abgesehen von den beschriebenen Vielfachen von Perioden, auf eine einzige Weise bestimmen.

Alle diese Sätze folgen sehr leicht aus der Theorie der elliptischen Functionen; wir können uns deshalb wohl eine weitere Erörterung darüber ersparen. Angemerkt zu werden verdient jedoch, wie mit Hülfe der beiden Integrale (90) die wirkliche Bestimmung von u und v geschehen kann.

Wenn wir in den Integralen (90) die Vorzeichen der Wurzelgrössen und die Integrationswege beliebig wählen, so werden wir bei Substition der Werthe u, v in die Ausdrücke (91)...(94), und bei Substitution wiederum dieser Werthe in die zuvor entwickelten Formeln nicht nothwendig gerade die vorgelegte orientirte Gerade und deren Grenzpunkt x erhalten; es kann sich vielmehr irgend eine der acht zusammengehörigen orientirten Geraden mit ihrem Grenzpunkt ergeben.

Es fragt sich also, wie die Mehrdeutigkeit der Grössen u, v zu beschränken ist, damit die gegebene orientirte Gerade σ selbst reproducirt werde. Es würde genügen, diese Beschränkung für *eine* Lage der Geraden σ bezeichnet zu haben: Für alle übrigen ergiebt sie sich dann durch analytische Fortsetzung. Die genannte Beschränkung kann jedoch allgemein festgestellt werden unter der Voraussetzung, dass der vorgelegte Strahl σ *reell* ist.

Um uns kurz ausdrücken zu können, bezeichnen wir mit h eine übrigens unbestimmte reelle und zwar *positive* Grösse.

Die Wurzelfunctionen $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ haben nun die Eigenschaft, reelle oder rein-imaginäre Werthe anzunehmen für alle Werthe des Argumentes u, die durch Addition einer *halben* Periode ϖ in reelle oder rein-imaginäre Werthe übergeführt werden, und es lassen sich überdies auch die Vorzeichen dieser Grössen angeben. $\wp u$ selbst ist für alle diese Werthe reell, und es wächst, wenn man das Rechteck $0, \omega_3, -\omega_2, \omega_1$ im angegebenen Sinne umläuft, continuirlich durch alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, derart, dass jedem Werthe von $\wp u$ eine völlig bestimmte Stelle auf dem Rande dieses Rechtecks entspricht.

Die folgende kleine Tafel bezeichnet das Verhalten der drei Wurzelfunctionen auf dem Rande des genannten Rechtecks:

	$\sqrt{\wp u - e_1}$	$\sqrt{\wp u - e_2}$	$\sqrt{\wp u - e_3}$	$\wp' u$
$-\infty < \wp u < e_3$	$-ih$	$-ih$	$-ih$	$-ih$
$e_3 < \wp u < e_2$	$-ih$	$-ih$	h	h
$e_2 < \wp u < e_1$	$-ih$	h	h	ih
$e_1 < \wp u < +\infty$	h	h	h	$-h$

Vergleichen wir die letzte Colonne mit der Formel (94), so ergiebt sich, dass die Integrale (90) eines der gesuchten Werthsysteme u, v dann liefern, wenn wir (allgemein für den Fall eines reellen ϱ) die Integrationen im reellen Gebiete durch wachsende Werthe von ϱ erstrecken, und über das Vorzeichen von $\sqrt{\Pi_\varrho}$ die Bestimmung treffen:

	$-\infty < \varrho < e_3$	$e_3 < \varrho < e_2$	$e_2 < \varrho < e_1$	$e_1 < \varrho < +\infty$
$\sqrt{\Pi_\varrho}$	ih	$-h$	$-ih$	h

Die übrigen derselben orientirten Geraden σ entsprechenden Werthepaare (u, v) ergeben sich daraus ohne Weiteres, und damit ist, wie bemerkt, die gestellte Aufgabe auch für den Fall einer beliebigen Geraden σ gelöst.

Eine besondere Folgerung, die in der vorausgehenden Darlegung enthalten ist, verdient noch hervorgehoben zu werden. Man hat auf Grund der getroffenen Festsetzungen

$$\omega_3 = -\int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}}; \quad \omega_1 = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{d\varrho}{2\sqrt{\Pi_\varrho}};$$

es ergiebt sich daher:

Den reellen Punkten x der Grenzfläche entsprechen Werthe von u, die sich um ungerade Vielfache von ω_1 von rein imaginären Werthen unterscheiden, und Werthe von v, die sich um ungerade Vielfache von ω_3 von reellen Werthen unterscheiden, und umgekehrt.

Die reellen Punkte der Fläche werden also abgebildet auf Punktepaare der Zahlenebene, die auf den Geraden eines rechteckigen durch Verschiebung des Periodengitters $(2\omega_1, 2\omega_3)$ um $-\omega_1$, $-\omega_3$ entstehenden Gitters liegen. Eine Gruppe von vier zusammengehörigen, nämlich durch die Spiegelungen an den Hauptstrahlen in einander übergehenden Punkten der Brennfläche entsteht aus einem von ihnen z. B. durch Addition von $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ zu u. Den mit $u = \omega_2$ $v = \omega_2$ äquivalenten Stellen entsprechen die beiden reellen *Knotenpunkte* der Brennfläche, den mit

$$\omega_2, \omega_3; \quad \omega_1, \omega_3; \quad \omega_1, \omega_2$$

äquivalenten Stellen die Grenzpunkte der drei Hauptstrahlen.

Die *Hauptflächen* entstehen nach dem Vorhergehenden, wenn man

$$\pm iu - v = \text{const.} \tag{96}$$

setzt. Im Falle einer reellen Hauptfläche muss die Constante die Form

$$a + \left\{(2k+1)\,\omega_1 + (2k'+1)\,\frac{\omega_3}{i}\right\} i$$

haben, wo k, k' ganze Zahlen bedeuten und a eine reelle Grösse ist.

Zur Ergänzung des auf Seite 441 Gesagten fügen wir noch die Bemerkung hinzu, dass die ausgeführte Bestimmung der abwickelbaren Flächen in einer aplanaren Kettencongruenz als Grenzfall der folgenden anscheinend sehr verschiedenartigen Aufgabe betrachtet werden kann.

„Zwei congruente Kugeln sind (2-2)-deutig auf einander abgebildet durch eine collineare Transformation zwischen den Linienbündeln ihrer Mittelpunkte. Man soll die einander entsprechenden Curven von gleicher Bogenlänge finden."

Wir erlauben uns, auf dieses interessante Problem aufmerksam zu machen.

§ 39.

Specielle Gewindebündel und zugehörige zweidimensionale Ketten.

Es bleiben nun noch die übrigen in § 36 aufgezählten Gewindebüschel und die zugehörigen Oerter ihrer Hauptaxen zu betrachten.

In der folgenden Untersuchung reden wir, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, nur von reellen Figuren.

Eine erste Grenzlage der aplanaren Gewindebündel des ersten Typus sind

Die aplanaren Gewindebündel des zweiten Typus (β),

deren es ∞^7 giebt. Diese und die zugehörigen ∞^6 Kettencongruenzen weichen bereits namentlich in den Eigenschaften der Brennfläche von dem allgemeinen Fall wesentlich ab. Ihre Eigenthümlichkeiten sind aber doch unschwer als Grenzfälle der von uns ausführlich behandelten zu verstehen, weshalb wir wohl von einer näheren Erörterung des Gegenstandes absehen dürfen. Charakteristisch ist, dass diese Figuren eine continuirliche Gruppe von Drehungen zulassen, die Gruppe der Drehungen um den isolirten Hauptstrahl.

Einiges Interesse hat wohl eine metrische Erzeugung, die den aplanaren Kettencongruenzen des zweiten Typus eigenthümlich ist:

*Fällt man von zwei eigentlichen Punkten, die auf der Rotationsaxe einer aplanaren Kettencongruenz des zweiten Typus in entgegengesetzt gleichen Abständen von deren Mittelpunkt angenommen sind, Senkrechte auf die Congruenzstrahlen, so sind die beiden construirten Bündel dadurch congruent auf einander bezogen.**)

Unterwirft man umgekehrt ein Strahlenbündel mit eigentlichem Scheitel einer solchen Schraubung um einen seiner Strahlen, deren Schraubungshöhe nicht gleich Null, und deren Schraubungswinkel mod π von Null verschieden ist, so erfüllen die gemeinsamen Normalen zwischen zugeordneten Strahlen des gegebenen Bündels und des durch die Schraubung entstandenen, sammt ihren Grenzlagen, eine aplanare Kettencongruenz des zweiten Typus.

Diese Construction ist ein sehr specieller Fall einer Erzeugungsweise aplanarer Kettencongruenzen durch andere, die projectiv auf einander bezogen sind und drei Strahlen entsprechend gemein haben. —

Zu nicht uninteressanten Bemerkungen geben Anlass

---

*) Die Zuordnung zwischen den ternären Gebieten der beiden Bündel und dem der Congruenz wird durch eine *quadratische* birationale Transformation vermittelt.

Die aplanaren Gewindebündel des dritten Typus (γ),

deren es nur ∞^4 giebt, und zwar noch ∞^1 wesentlich verschiedene. Sie lassen die dreigliedrige Gruppe aller Drehungen um ihren Mittelpunkt zu, und können daher leicht erzeugt werden durch Bewegung eines Gewindes. Alle Gewinde des einzelnen Bündels haben jetzt, wie wir wissen, denselben Parameter p; die Gewinde des reciproken Bündels haben den entgegengesetzten Parameter. Die Congruenz der Hauptaxen ist von der ersten Ordnung und nullten Classe. Um diese Erscheinung als Grenzfall der zuvor untersuchten zu verstehen, lasse man die mit e_1, e_2, e_3 bezeichneten Grössen in das Werthsystem (0, 0, 0) übergehen. An Stelle der Parameterflächen erhält man dann eine *doppelt überdeckte* lineare Schaar von Flächen 2. Classe oder ein doppelt überdecktes Büschel von Flächen 2. Ordnung, bestehend aus concentrischen Kugeln.

Der Radius einer solchen Kugel ist $\sqrt{-p^2}$, also rein-imaginär bei reellem p; die Kugel hat also ein reelles Polarsystem. Lässt man auch imaginäre Werthe von p zu, so ergeben sich auch Kugeln mit *reellen* Punkten, und diese müssen nun ebenfalls als Grenzfälle von (imaginären) Parameterflächen angesehen werden, während in den vorhergehenden Fällen nicht-geradlinige Flächen mit ∞^2 reellen Punkten *auch bei complexen Werthen von* p nicht auftreten konnten. Die Erzeugenden der Kugeln des betrachteten Büschels bilden eine Congruenz 2. O. 2. Cl., und diese scheidet sich, im Plücker'schen Liniencontinuum, von den beiden zu einander reciproken Congruenzen ab, so dass also jetzt, wenn man die Ordnung und Classe (3, 2) wieder erreichen will, *beide* Schaaren von Erzeugenden einer jeden dieser Kugeln zur Kettencongruenz hinzugefügt werden müssen. Man kann aber den Uebergang von einer Kettencongruenz des ersten oder zweiten Typus zu einer Congruenz des dritten Typus noch auf andere Weise ausführen, indem man die Congruenz als durch die gemeinsamen Normalen von Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades bestimmt ansieht, und diese in einen *Kegel* übergehen lässt. Jetzt erscheint also irgend einer der ∞^5 zum Mittelpunkt o gehörigen Kegel 2. Ordnung als Grenzlage einer Parameterfläche. Die Erzeugung der Congruenz mit Hülfe einer Fläche 2. Grades wird demnach in unserem Falle nicht illusorisch, aber ihr Unbestimmtheitsgrad erhöht sich von 1 auf 5. Insbesondere können die aplanaren Kettencongruenzen des dritten Typus auf ∞^4 Arten durch reelle Strahlenbüschel erzeugt werden, während eine ähnliche Erzeugungsweise der Kettencongruenzen des zweiten Typus *nicht* möglich ist. Zwei der reciproken Gewindebündel haben, wenn $p \neq 0$

ist, kein Gewinde gemein. Ist aber $p = 0$, so fallen sie ganz zusammen.

Die planaren Gewindebündel und Kettencongruenzen des ersten Typus (α).

Diese ∞^8 Gewindebündel, und namentlich die zugehörigen ∞^7 Kettencongruenzen sollen wieder etwas eingehender behandelt werden. Sie zeigen fast in jeder Hinsicht ein von dem „allgemeinen“ Fall stark abweichendes Verhalten, obgleich sie nur von einer Constanten weniger abhängen, als dieser. Schon die Grundlage der in den §§ 37 und 38 durchgeführten Untersuchung, die Abbildung auf die unendlich ferne Ebene, wird hier illusorisch. Es tritt ferner der bemerkenswerthe Umstand ein, dass Eigenschaften, die wir im allgemeinen Fall bei einer und derselben mit der Congruenz invariant-verbundenen Fläche gefunden haben, sich nun auf mehrere nicht mehr analytisch zusammenhängende Flächen vertheilen.

Wir entnehmen zunächst den Ausdrücken (III bα), S. 450 eine analytische Darstellung der beiden reciproken Gewindebündel durch Parameter $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ und $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$:

$$(1)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{X}_{01} = q\sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{02} = \sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{03} = \sigma_3, \\ \mathfrak{X}_{23} = \sigma_1 + pq\sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{31} = p\sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{12} = q\sigma_1 + p\sigma_3, \end{gathered}$$

$$(2)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{U}_{01} = -q\tau_3, \quad \mathfrak{U}_{02} = \tau_2, \quad \mathfrak{U}_{03} = \tau_3, \\ \mathfrak{U}_{23} = \tau_1 + pq\tau_3, \quad \mathfrak{U}_{31} = -p\tau_2, \quad \mathfrak{U}_{12} = -q\tau_1 - p\tau_3. \end{gathered}$$

($q \neq 0, +1, -1$). Variirt man p, so erhält man die ∞^1 zusammengehörigen Paare von Bündeln; dieselben Formeln stellen also, bei Auffassung der Grössen $\mathfrak{X}_{ik}$, $\mathfrak{U}_{ik}$ als Strahlencoordinaten erster Art, die beiden reciproken Kettencongruenzen vor. Die mit den Kettencongruenzen verbundenen Parallelenbündel beider Schichten werden, in Strahlencoordinaten erster Art, dargestellt durch die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{X}'_{01} = \sigma_1', \quad \mathfrak{X}'_{02} = 0, \quad \mathfrak{X}'_{03} = q\sigma_1', \\ \mathfrak{X}'_{23} = q\sigma_3' + p'\sigma_1', \quad \mathfrak{X}'_{23} = (1-q^2)\sigma_2', \quad \mathfrak{X}'_{12} = \sigma_3' + p'q\sigma_1', \end{gathered}$$

und

$$(4)\qquad \begin{gathered} \mathfrak{U}'_{01} = \tau_1', \quad \mathfrak{U}'_{02} = 0, \quad \mathfrak{U}'_{03} = -q\tau_1', \\ \mathfrak{U}'_{23} = -q\tau_3' - p'\tau_1', \quad \mathfrak{U}'_{23} = (1-q^2)\tau_2', \quad \mathfrak{U}'_{12} = \tau_3' + p'q\tau_1', \end{gathered}$$

wobei die mit p' behafteten Glieder auch weggelassen werden können.*)

*) Auf die Deutung der Grössen $\mathfrak{X}'_{ik}$, $\mathfrak{U}'_{ik}$ als Gewindecoordinaten kommen wir weiter unten zurück.

Die Geraden oder Strahlen $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{U}$ schneiden sich, nothwendig unter rechtem Winkel, wenn

$$\sigma_1'\tau_1 + \sigma_2'\tau_2 + \sigma_3'\tau_3 = 0, \tag{5}$$

und Entsprechendes gilt für $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{X}$.

Die Forderung, dass zwei Gerade $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ der reciproken Congruenzen selbst einander schneiden sollen, kann auch hier auf *zwei* Arten erfüllt werden. Die Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ oder σ, τ schneiden sich, und zwar unter rechtem Winkel, wenn

$$\sigma_2\tau_2 + (1 - q^2)\sigma_3\tau_3 = 0. \tag{6}$$

Alle Geraden τ, die eine gegebene Gerade σ der ersten Congruenz auf diese Art schneiden, bilden eines der in der zweiten (der reciproken) Congruenz enthaltenen Parallelenbüschel. Die Geraden σ, τ schneiden sich aber auch dann, wenn zwei zu demselben Werthe von p gehörige Gewinde, die in ihnen ihre Hauptaxen haben, Parameter P_σ und P_τ erhalten, die entgegengesetzt gleiche Werthe haben. Nun ist z. B.

$$P_\sigma = p + \frac{2q\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2 + (1+q^2)\sigma_3^2}; \tag{7}$$

bestimmen wir p aus der Gleichung $P_\sigma = 0$, so erhalten wir die Gerade σ dargestellt in Plücker'schen Liniencoordinaten. Die fragliche Bedingungsgleichung wird dann

$$-\frac{2q\sigma_1\sigma_3}{\sigma_2^2 + (1+q^2)\sigma_3^2} = p = -\frac{2q\tau_1\tau_3}{\tau_2^2 + (1+q^2)\tau_3^2}. \tag{8}$$

Halten wir p fest, und lassen wir die Grössen σ_i, τ_i variiren, so erhalten wir beide Schaaren von Erzeugenden einer der ∞^1 *Parameterflächen*, die hier Paraboloide oder Ausartungen von solchen sind.

Die „erste" Schaar von Erzeugenden einer Parameterfläche p besteht aus Geraden der ersten Congruenz (1), in der zweiten durchdringen sich die Gewinde des durch den Parameter p bestimmten planaren Bündels. Daraus ergeben sich *die Gleichungen der Parameterflächen*

$$p^2(1 - q^2)x_0^2 + x_1^2 - q^2x_3^2 + 2pqx_0x_2 = 0, \tag{9}$$

$$-pq^2u_1^2 + p(1 - q^2)u_2^2 + pu_3^2 - qu_0u_2 = 0. \tag{10}$$

Bevor wir in eine Erörterung dieser Gleichungen eintreten, werden wir zweckmässig einige Eigenschaften der Paraboloide besprechen, die sonst wohl nicht in der hier erwünschten Vollständigkeit zu finden sein werden.

Uebersicht über einige elementare Eigenschaften der Paraboloide.

Die Kugeln, die den Poltetraedern eines Paraboloids umschrieben sind, haben eine gemeinsame Orthogonalebene ω, die als Ausartung der Umfassungskugel eines Ellipsoids oder Hyperboloids angesehen werden kann, und senkrecht steht auf der Hauptaxe der Fläche. Sie ist ein Analogon zur Leitlinie einer Parabel: Wie diese der Ort aller Punkte ist, in denen sich zwei Tangenten der Curve unter rechtem Winkel schneiden, so ist jene Ebene der Ort aller Punkte, in denen sich drei Tangentialebenen des Paraboloids rechtwinklig schneiden. Wir wollen die Ebene ω *Querebene* des Paraboloids nennen. Sie schneidet, wenn die Fläche ein elliptisches Paraboloid ist, diese nicht; ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, so schneiden Querebene und Fläche sich in einer Hyperbel. Diese ist der Ort aller Punkte, in denen sich zwei Erzeugende des Paraboloids rechtwinklig treffen. Ist das Paraboloid insbesondere orthogonal, schneiden sich die durch den Scheitel gehenden Erzeugenden rechtwinklig, so fällt die Querebene zusammen mit der Tangentialebene im Scheitel, schneidet also die genannten beiden Erzeugenden aus.

Der Pol der Querebene in Bezug auf das Paraboloid, der Punkt der Hauptaxe also, dessen Abstand von der Querebene durch den Scheitel halbirt wird, hat nun, eben wegen dieser seiner Definition, eine gewisse Analogie zu dem Brennpunkt einer Parabel. Wir nennen ihn deswegen den *Quasifocus des Paraboloids.**)

Wir wollen zuerst annehmen, das betrachtete Paraboloid sei *nicht orthogonal.*

Der Abstand des Quasifocus vom Scheitel ist das arithmetische Mittel aus den beiden Hauptkrümmungsradien im Scheitel. Für uns kommen indessen andere Sätze in Betracht, die sich auf den Kegel beziehen, durch den das Paraboloid vom Quasifocus aus projicirt wird. Dieser Projectionskegel ist ein Kegel von besonderer Art. *Zwei Focalaxen des zum Quasifocus gehörigen Tangentialkegels (dieselben, die senkrecht stehen auf der Hauptaxe des Paraboloids) stehen senkrecht auf je einer Tangentialebene des Kegels.* Der Kegel kann also auf zwei wesentlich verschiedene Arten erzeugt werden durch Projection einer Parabel aus einem Punkte σ, dessen Fusspunkt in der Ebene der Parabel deren Brennpunkt ist. Die beiden Schaaren erzeugender Parabeln haben

*) Als Quasifoci eines Hyperboloids kann man entsprechend bezeichnen die sechs Scheitel der zugehörigen aplanaren Kettencongruenzen.

überdies die Eigenschaft, ein *Orthogonalsystem* auf dem Kegel zu bilden. *Aus dem Paraboloid schneiden die Ebenen der den Tangentialkegel des Quasifocus erzeugenden Parabeln die beiden Schaaren von Geraden aus.* Die besprochenen zu ihnen senkrechten Focalaxen des Kegels sind zugleich *Focalaxen des Paraboloids.* Sie kreuzen, nach dem Gesagten, jede eine Schaar von Erzeugenden des Paraboloids rechtwinklig. Der Tangentialkegel des Quasifocus wird von dem Paraboloid in einer Hyperbel berührt, deren Ebene natürlich eben die Querebene ω des Paraboloids ist, von der wir ausgegangen waren.

Unter den Geraden, die mit den Erzeugenden einer Schaar rechte Winkel bilden, befinden sich insbesondere die *Strictionsgeraden*, die gemeinsamen Normalen von consecutiven Erzeugenden (S. 493). Es liegt also in dem Gesagten bereits der folgende für uns wichtige Satz: *Die Strictionscurven eines nicht-orthogonalen Paraboloids sind zwei Parabeln, deren Ebenen durch die Hauptaxe der Fläche gehen. Diese Ebenen sind die Polarebenen der unendlich fernen Punkte der beiden durch den Quasifocus gehenden Focalaxen, der Focalaxen des zugehörigen Tangentialkegels, in Bezug auf Kegel und Paraboloid.*

Natürlich handelt es sich hier überall um reelle Figuren nur dann, wenn das Paraboloid hyperbolisch ist.

Wird das Paraboloid insbesondere orthogonal, so rückt der Quasifocus in den Scheitel der Fläche. Sein Tangentialkegel zerfällt, als Ort von Ebenen, in die beiden zu einander senkrechten Erzeugenden durch den Scheitel, die zugleich Focalaxen des ausgearteten Kegels, und Strictionscurven auf dem Paraboloid sind.

Auf gesonderte Beweise dieser elementaren Sätze glauben wir verzichten zu dürfen. Sie kommen, in anderer Anordnung, grösstentheils in den folgenden Betrachtungen von Neuem vor. Das Gesagte soll nur dazu dienen das Verständniss des Folgenden zu erleichtern. Namentlich wird uns die eingeführte Terminologie eine kurze Ausdrucksweise ermöglichen. — Wir wenden uns nun wieder zu unserem eigentlichen Gegenstand.

Die Parameterflächen.

Die reellen Parameterflächen sind nicht-orthogonale hyperbolische Paraboloide. Sie haben den Hauptstrahl ($x_1 = 0 = x_3$) *der zu einander reciproken planaren Congruenzen als gemeinsame Hauptaxe. Sie schneiden die unendlich ferne Ebene in denselben beiden Geraden (eben denen, die von allen Geraden der einen oder anderen Congruenz getroffen werden).*

Die erste (zweite) dieser uneigentlichen Geraden:

$$(11) \qquad x_0 = 0, \quad x_1 - q x_3 = 0; \qquad x_0 = 0, \quad x_1 + q x_3 = 0$$

ist natürlich *Brennlinie* der ersten (zweiten) Congruenz. Ihre Punkte sind die Scheitel der Parallelenbüschel $\sigma_2 : \sigma_3 = \text{const.}$ ($\tau_2 : \tau_3 = \text{const.}$), zu denen man die Geraden der ersten (zweiten) Congruenz zusammenfassen kann.

Alle Parameterflächen haben denselben Quasifocus, und sie werden aus ihm durch denselben Kegel (von der beschriebenen besonderen Beschaffenheit) projicirt. Der Quasifocus ist überdies Scheitel (und zwar der einzige) für jede der beiden Congruenzen, d. h. er ist Mittelpunkt einer auf ein ebenes Büschel reducirten Kette.

Der fragliche Punkt ist nämlich der Anfangspunkt o des von uns benutzten Coordinatensystems; zu ihm gehören die beiden Büschel $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$, die in den beiden Ebenen

$$x_1 - q x_3 = 0, \quad x_1 + q x_3 = 0 \tag{12}$$

verlaufen. Diese Ebenen schneiden aus der unendlich fernen Ebene die Brennlinien (11) der beiden Congruenzen aus; zu ihnen parallele Ebenen also schneiden jede Parameterfläche noch in je einer Geraden der ersten oder zweiten Congruenz. Die Ebenen (12) sind ferner Scheitelebenen des Kegels

$$-(1-q^2)x_1^2 + q^2 x_2^2 + q^2(1-q^2)x_3^2 = 0, \tag{13}$$

der die Parameterflächen aus o projicirt, und in der That die behauptete besondere Beschaffenheit hat. Die zum Hauptstrahl senkrechten Focalaxen sind also senkrecht zu den beiden Ebenen (12): Wir werden diese Geraden, die zugleich Focalaxen aller Parameterflächen sind, nach der bei den aplanaren Congruenzen eingeführten Terminologie auch als *Focalaxen* der einen oder anderen Congruenz zu bezeichnen haben. Dann ergiebt sich weiter:

Die Focalaxe der ersten (zweiten) Congruenz liegt in dem die zweite (erste) Congruenz begleitenden Parallelenbündel.

Die Focalaxe der ersten Congruenz entspricht den Parameterwerthen

$$\tau_1' : \tau_2' : \tau_3' = 1 : 0 : 0 \qquad \text{(Nr. 4)}.$$

Die Parameterfläche p berührt den zum Quasifocus o gehörigen Tangentialkegel in einer (nicht-gleichseitigen) Hyperbel, deren Ebene die Querebene der Fläche p ist:

$$p(1-q^2)x_0 + q x_2 = 0. \tag{14}$$

Der Tangentialkegel des Quasifocus ist also Ort aller Flächenelemente (Punkte und Ebenen), die durch je zwei zu einander orthogonale Erzeugende einer Parameterfläche bestimmt werden.

Wir kommen auf diese Eigenschaft weiter unten zurück, und vervollständigen zunächst die angeführten Sätze nach anderer Richtung:

Die Parameterflächen liegen in einem Bündel von Flächen 2. Ordnung, das ein Büschel zerfallender Flächen enthält. Jede Fläche dieses Büschels besteht aus der unendlich fernen Ebene und der Querebene einer Parameterfläche.

Ordnet man die Flächen des Bündels projectiv den Geraden einer Ebene zu, so umhüllen die Bilder der Parameterflächen einen irreducibelen Kegelschnitt. Die Punkte der Ebene ausserhalb dieses Kegelschnitts entsprechen den Schnittlinien je zweier Parameterflächen, die sämmtlich Hyperbeln sind. Den Berührungscurven der Parameterflächen mit ihrem gemeinsamen Tangentialkegel werden die Punkte des Kegelschnitts selbst zugeordnet.

Die Parameterflächen bilden ferner eine lineare Schaar von Flächen 2. Classe. Sie berühren alle Ebenen

$$u_0 = 0, \quad -q^2 u_1^2 + (1-q^2) u_2^2 + u_3^2 = 0 \tag{15}$$

des zum Quasifocus gehörigen Kegels, und ausserdem alle Ebenen der beiden Büschel

$$u_2 = 0, \quad q u_1 + u_3 = 0; \qquad u_2 = 0, \quad -q u_1 + u_3 = 0, \tag{16}$$

deren Axen die Brennlinien der beiden planaren Congruenzen sind.

Für die planaren Kettencongruenzen selbst folgt: Jede planare Congruenz des ersten (oder zweiten) Typus ist von der *zweiten* Ordnung und der *ersten* Classe.

Die Erniedrigung von Ordnung und Classe von (3, 2) auf (2, 1) kommt dadurch zu Stande, dass sich das die Congruenz begleitende Parallelenbündel und das Feld der uneigentlichen Geraden abgeschieden hat.

Von besonderer Bedeutung ist folgender Satz:

Der gemeinsame Scheitel der reciproken Congruenzen bestimmt eine eingliedrige Gruppe von perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, die die zusammengehörigen Gewindebündel, und ebenso die ∞^1 Parameterflächen unter einander vertauschen.

Hierin liegt, dass (von der unendlich fernen Ebene abgesehen) überhaupt *alle* mit unseren Congruenzen gegenüber Aehnlichkeitstransformationen invariant verbundenen Flächen Kegel sein müssen.

Ferner ergeben sich daraus ∞^∞ viele Erzeugungen unserer Congruenzen mit Hülfe von Regelflächen, die in ihnen enthalten sind, z. B.:

Unterwirft man ein nicht orthogonales geradliniges Paraboloid den perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centrum der Quasifocus der Fläche ist, so gehen aus den beiden Schaaren von Erzeugenden die Geraden zweier reciproker planarer Congruenzen des ersten Typus hervor, und aus dem Paraboloid selbst die zugehörigen Parameterflächen.

Die Brennfläche.

Wir betrachten nun näher den schon mehrfach besprochenen Kegel.

Der zum Quasifocus gehörige gemeinsame Tangentialkegel der Parameterflächen ist Brennfläche für beide Congruenzen.

Er stellt den in Endlichen verlaufenden „Mantel der Brennfläche" dar: An Stelle des zweiten Mantels tritt die eine oder andere der beiden Brennlinien.

Jede der beiden Congruenzen enthält eine Gerade, die ganz aus Brennpunkten besteht. Diese beiden Geraden sind die Scheitellinien der Brennfläche ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\tau_1 = \tau_2 = 0$).

Um die Geraden etwa der ersten Congruenz zu abwickelbaren Flächen zusammenzufassen, schneide man die Brennfläche mit den zu ihrer ersten Focalaxe orthogonalen Ebenen. Die Tangenten der so entstehenden Parabeln sind Congruenzlinien, und diese bilden, so angeordnet, die eine der beiden in der Congruenz enthaltenen Schaaren abwickelbarer Flächen. Die andere aus Parallelenbüscheln bestehende Schaar wird gebildet von den Parabeltangenten in den Punkten je einer Erzeugenden der Brennfläche.

Beide die Brennfläche überdeckenden Schaaren von Parabeln durchsetzen einander orthogonal.

Hierin liegt, da man die Brennfläche, als Kegel von der geschilderten besonderen Beschaffenheit, willkürlich annehmen kann, eine besonders einfache und anschauliche Erzeugungsweise der planaren Kettencongruenzen des ersten Typus.

Geht die bewegliche Ebene durch den Quasifocus o, so wird sie Theil der Parameterfläche $p = 0$ und *Scheitelebene* des Kegels sowohl als der der ersten Congruenz. Sie enthält von dieser *erstens* das Büschel von Geraden, dessen Mittelpunkt der Scheitel ist ($\sigma_1 = 0$),

zweitens ein Büschel paralleler Gerader, die zum Hauptstrahl senkrecht sind ($\sigma_2 = 0$), und sich auf die ∞^1 übrigen Parameterflächen vertheilen. *Es gilt also hier nicht der Satz, dass durch jede Conyruenzlinie nur eine Parameterfläche geht.* Aber für die zuletzt genannten Congruenzlinien $\sigma_2 = 0$ wird der Werth des Parameters p (Nr. 8) keineswegs unbestimmt: *Wir können durch eine besondere Definition festsetzen, dass zur Fläche $p = 0$ nur die Congruenzlinien „gehören" sollen, deren Parameter p wirklich den Werth Null hat.* Wir haben dann auf der betrachteten Scheitelebene erstens das Büschel $\sigma_1 = 0$ der ersten Congruenz, sodann das Büschel der zum Hauptstrahl parallelen Geraden der reciproken Congruenz ($\tau_3 = 0$), beide gehörig zur Fläche $p = 0$, drittens die ∞^1 Geraden $\sigma_2 = 0$, die abgesehen von der Scheitellinie $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ der Fläche $p = 0$ *nicht* „angehören".

Ein Theil vom Inhalt des letzten Satzes kann offenbar auch so ausgedrückt werden:

Unterwirft man die Tangenten einer Parabel allen perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centrum o als Fusspunkt auf der Ebene der Parabel deren Brennpunkt hat, so erfüllen die entstehenden Geraden, zusammen mit ihren Grenzlagen, eine planare Kettencongruenz des ersten Typus.

Umgekehrt kann jede solche Congruenz auf eine Art so erzeugt werden.

Natürlich ist angenommen, dass der Punkt o im Endlichen und nicht im Brennpunkt der Parabel selbst liegt. Die durch Grenzübergang besonders zu construirenden Congruenzlinien sind die, die auf der Fläche $p = 0$ liegen, ihr aber nicht angehören.

Um die Zusammenfassung der Congruenzlinien zu Parabeltangenten auch algebraisch sichtbar zu machen, stellen wir die Bedingung dafür auf, dass zwei Congruenzlinien σ, $\bar{\sigma}$ einander schneiden. Diese Bedingungsgleichung wird hier reducibel:

$$(17) \quad 0 =$$

$$= \frac{\sigma_1 \bar{\sigma}_3 + \sigma_3 \bar{\sigma}_1}{\sigma_2 \bar{\sigma}_2 + (1+q^2)\,\sigma_3 \bar{\sigma}_3} - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_2^2 + (1+q^2)\,\sigma_3^2} - \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}_2^2 + (1+q^2)\,\bar{\sigma}_3^2} =$$

$$= \frac{\sigma_2 \bar{\sigma}_3 - \sigma_3 \bar{\sigma}_2}{\sigma_2 \bar{\sigma}_2 + (1+q^2)\,\sigma_3 \bar{\sigma}_3} \cdot \left\{ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2^2 + (1+q^2)\,\sigma_3^2} - \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_2^2 + (1+q^2)\,\bar{\sigma}_2^2} \right\},$$

Der erste Factor rechts führt, gleich Null gesetzt, zur Zusammenfassung der Congruenzlinien zu Parallelenbüscheln; es muss also

$$(18) \qquad \frac{2q\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{1+q^2}\,\{\sigma_2^2 + (1+q^2)\,\sigma_3^2\}} = \text{const.}$$

die andere Zusammenfassung darstellen. In der That bedeutet der Ausdruck (18) den Abstand der Geraden σ von der Scheitelebene.

Die gemeinsamen Normalen von je zwei nicht parallelen (eigentlichen) Geraden σ liegen in dem die reciproke Congruenz begleitenden (von Geraden zweiter Schicht gebildeten) Parallelenbündel, also nicht in der zweiten Congruenz selbst. Es ist daher nicht ohne Weiteres möglich, unsere planaren Congruenzen mit Hülfe von Regelflächen zweiten Grades so zu erzeugen, wie wir es bei den aplanaren Kettencongruenzen gethan haben. Man kann aber eine Erzeugungsweise angeben, die als Grenzfall von jener angesehen werden kann:

Zieht man in der Ebene von je zwei einander senkrecht schneidenden Erzeugenden eines nicht-orthogonalen geradlinigen Paraboloids alle Parallelen zu beiden, so erfüllen die so erklärten Parallelenbüschel und ihre Grenzlagen ein Paar reciproker planarer Kettencongruenzen des ersten Typus.

Es werden also, abweichend von der entsprechenden Construction bei den aplanaren Congruenzen, alle reellen Congruenzstrahlen reell construirt. Ausgezeichnet ist die zerfallende Parameterfläche $p = 0$:

Es sei vorgelegt ein Geradenbüschel mit eigentlichem Scheitel o und eine Ebene ω', die zur Ebene des Büschels weder parallel noch senkrecht ist.

Dann erfüllen alle Geraden, die parallel zu ω' und senkrecht zu Geraden des Büschels gezogen sind, eine planare Congruenz des ersten Typus.

Umgekehrt kann jede reelle Congruenz dieser Art auf eine einzige Weise so erzeugt werden. (Vg. S. 335, 464.)

Die Parameterfläche $p = 0$ ist übrigens noch in anderer Weise bemerkenswerth. Sie ist neben der Fläche $p = \infty$ die einzige ausgeartete Parameterfläche, und ihr allein entsprechen reciproke Gewindebündel, die ein (ausgeartetes) Gewinde (den Hauptstrahl) gemein haben. Sie wird endlich, wie wir gesehen haben, von jeder der übrigen Parameterflächen in zerfallenden Hyperbeln geschnitten, deren jede aus deren beiden Scheitelerzeugenden besteht.

Der zum Quasifocus gehörige Kegel erschien bisher als Brennfläche unserer Congruenzen. Er erscheint als *Grenzfläche*, freilich nicht ganz im gewöhnlichen Sinn des Wortes, in dem folgenden nunmehr evidenten Satz:

Die Hauptaxen aller in der ersten Congruenz enthaltenen Cylindroide sind parallel zur Focalaxe dieser Congruenz. Die beiden (stets reellen)

Schnittpunkte einer solchen Hauptaxe mit der Brennfläche sind „Grenzpunkte", d. h. die zur Hauptaxe senkrechten Tangenten der Brennfläche in den Schnittpunkten sind die Grenzstrahlen des zugehörigen Cylindroids).*

Jedes dieser Cylindroide schickt eine seiner Erzeugenden durch den Punkt o. Aus der Umkehrung dieser Bemerkung ergiebt sich eine für das Folgende wichtige Erzeugungsweise unserer Congruenzen:

Unterwirft man ein (reelles) Cylindroid allen perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centrum o ein auf dem Cylindroid selbst, aber nicht auf dessen Hauptaxe, gelegener eigentlicher Punkt ist, so gehen die Erzeugenden des Cylindroids über in Strahlen einer planaren Kettencongruenz des ersten Typus.

Der Ort der Mittelpunkte aller der Cylindroide der ersten Congruenz, deren Hauptaxen die Strahlen τ' des Bündels (4) sind, kann als „Mittelfläche" dieses Bündels angesehen werden. Er hat, als Polarebene des unendlich fernen Punktes der Focalaxe der ersten Congruenz in Bezug auf die Brennfläche, die Gleichung

$$x_1 + q^3 x_3 = 0. \tag{19}$$

Er ist zugleich Ort der Schnittpunkte aller Geradenpaare der ersten Congruenz, die sich unter rechtem Winkel treffen, Ort der Leitlinien aller Parabeln, deren Tangenten in der ersten Congruenz liegen. Diese Ebene hat aber noch eine andere Bedeutung, zu der man kommt, wenn man die *Strictionscurve* der Erzeugenden erster Art einer beliebigen Parameterfläche sucht. Diese Curve wird nämlich von der genannten Ebene ausgeschnitten: Sie ist eine Parabel, deren Hauptaxe mit der der Fläche zusammenfällt.

Die *Strictionsgerade* irgend einer Geraden σ der ersten Congruenz (vgl. S. 516) gehört natürlich zu dem die zweite Congruenz begleitenden Parallelenbündel (4); sie hat, wie man ohne Weiteres erkennt, die Parameter

$$\tau_1' = q\sigma_3,\ \tau_2' = p\sigma_2,\ \tau_3' = q\sigma_1 + p\,(1+q^2)\,\sigma_3. \tag{20}$$

Umgekehrt gehört eine Gerade allgemeiner Lage τ' des Bündels (4) als Strictionsgerade zu zwei verschiedenen Strahlen σ, deren Parameter ohne Weiteres angegeben werden können, nachdem p als Wurzel der quadratischen Gleichung

$$p^2\,(1+q^2)\,\tau_1'^2 - 2pq\tau_1'\tau_3' - q^2\tau_2'^2 = 0 \tag{21}$$

*) Man kann hieraus, beiläufig bemerkt, eine *neue Erzeugungsart des Cylindroids* entnehmen, die mit der auf Seite 366 beschriebenen einige Aehnlichkeit hat.

bestimmt ist. Alle drei Geraden schneiden einander unter rechten Winkeln im Mittelpunkt

$$(22) \qquad \begin{gathered} \eta_0' : \eta_1' : \eta_2' : \eta_3' = \\ = (1+q^2)\,\tau_1' : -\,q^3\tau_2' : (-1+q^2)\,\tau_3' : \tau_2' \end{gathered}$$

der Geraden τ', dem Strictionspunkt der beiden Geraden σ. Bei gegebenem Werthe von p durchläuft der Punkt (22) *die erste Strictionscurve der Parameterfläche p*. Sind beide Wurzeln p_1, p_2 der quadratischen Gleichung (21) gegeben, so hat man damit ein *System von quasi-elliptischen Coordinaten* für die Geraden τ' des die reciproke Congruenz begleitenden Parallelenbündels:

$$(23) \qquad \tau_1' = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}},\ \tau_2' = \sqrt{-p_1p_2},\ \tau_3' = \frac{p_1+p_2}{2}\sqrt{1+q^2}.$$

Die Gerade τ' ist hier bestimmt durch die beiden Parameterflächen p_1, p_2, die sie (in ihrer Mitte) berühren.

Grenzübergang von aplanaren zu planaren Kettencongruenzen.

Um die namentlich in den letzten Sätzen hervortretenden einigermassen verwickelten Erscheinungen besser zu verstehen, werden wir, wenigstens in den Grundzügen, auch noch einen Grenzübergang behandeln, durch den man von den Formeln der §§ 37 und 38 zu denen des gegenwärtigen § übergehen kann. Wir verschieben zunächst das dort benutzte Coordinatensystem derart, dass sein Anfangspunkt in einen der beiden reellen Scheitel der aplanaren Kettencongruenzen (Quasifoci der Parameterflächen) fällt; zugleich führen wir durch eine Substitution, die eine willkürliche Grösse ϱ enthält, neue Coordinaten ein, und lassen dann ϱ über alle Grenzen wachsen. Der Process ist in gewissem Grade willkürlich, kann aber so gewählt werden, dass die im Vorausgehenden unmittelbar entwickelten Formeln auch auf diesem Wege erhalten werden. Wir führen sogleich die fraglichen Substitutionen selbst vor, da eine heuristische Herleitung zu viel Raum beanspruchen würde.

Wir setzen

$$(24) \qquad \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_2}} = q,\ (e_2 \neq e_1,\ 0,\ e_3)$$

$$(25) \qquad e_1 = (2+q^2)\,\varrho,\quad e_2 = (q^2-1)\,\varrho,\quad e_3 = -\,(1+2q^2)\,\varrho,$$

$$(26) \qquad \begin{gathered} x_0 = \bar{x}_0,\quad x_1 = \bar{x}_1,\quad x_2 = \bar{x}_2 - 3q\varrho x_0,\quad x_3 = \bar{x}_3, \\ u_0 = \bar{u}_0 + 3q\varrho u_2,\quad u_1 = \bar{u}_1,\quad u_2 = \bar{u}_2,\quad u_3 = \bar{u}_3. \end{gathered}$$

Nach dem Uebergang zur Grenze $\varrho = \infty$ lassen wir dann die übergesetzten Striche wieder weg.

Als Grenzlage der als Punktort betrachteten Brennfläche erhält man die reducibele Fläche:

$$(27) \qquad x_0^4 \{ -(1-q^2)\, x_1^2 + q^2 x_2^2 + q^2 (1-q^2)\, x_3^2 \} = 0:$$

Ein Brennpunkt und *beide* Grenzpunkte irgend einer Congruenzlinie sind ins Unendliche gerückt, wie auch geometrisch evident.

Dass bei dem erklärten Grenzübergang von der als Ort von Ebenen betrachteten Brennfläche sich die unendlich fernen Scheitel der unsere Congruenzen begleitenden Parallelenbündel abscheiden werden, wird man wohl erwarten. Da sich diese Bündel von den reciproken Congruenzen abschnüren, und da in einem Bündel gerader Linien jede Ebene durch den Scheitel Brennebene ist, so sollte man meinen, es müssten auch alle diese Ebenen sich als Grenzlagen von Brennebenen einstellen. Diese Vermuthung bestätigt sich indessen nicht: *Man findet als Grenzlage der als Ort von Ebenen betrachteten Brennfläche einen doppelt zählenden unendlich fernen Kegelschnitt*

$$(28) \qquad \{ -q^2 u_1^2 + (1-q^2)\, u_2^2 + u_3^2 \}^2 = 0:$$

Jede zu einer Ebene der Brennfläche der planaren Congruenzen parallele Ebene ist also doppelt zählend Grenzlage einer Brennebene. (Dazu gehören, als *Grenzlagen von Grenzebenen*, insbesondere auch alle Ebenen, die zu den beiden Focalaxen senkrecht sind.) *In einer der bezeichneten ∞^2 Ebenen liegt trotzdem im Allgemeinen keine im Endlichen verlaufende Congruenzlinie. Ausgenommen* sind die Ebenen des Brennkegels selbst, die je ∞^1 Gerade *beider* Congruenzen enthalten, und die zu den Focalaxen senkrechten Ebenen, die von je einer Congruenz ∞^1 Gerade enthalten. Ausgezeichnet sind unter diesen wiederum die Scheitelebenen, die beiden Schaaren von Ebenen zugleich angehören (S. 520).

Die Theorie der aplanaren Kettencongruenzen giebt über diese Möglichkeiten keine Auskunft, und ebensowenig über die Existenz von Brennlinien bei besonderen Kettencongruenzen.

Als Grenzlage der Mittelfläche der ersten Congruenz erhalten wir eine aus vier Ebenen bestehende Fläche 4. Ordnung:

$$(29) \qquad \xi_0 \cdot \xi_0 \cdot \{ \xi_1 - q^3 \xi_3 \} \cdot \{ \xi_1 - q \xi_3 \} = 0\,.$$

Das doppelte Auftreten der unendlich fernen Ebene $\xi_0 = 0$ rührt daher, dass sich das Feld der unendlich fernen Geraden abgeschnürt hat, und dass die Mittelpunkte der Congruenzlinien allgemeiner Lage in's Unendliche gerückt sind. Die Bedeutung des dritten Factors haben wir soeben schon erörtert, für den Fall der reciproken Congruenz, wo q durch $-q$ zu ersetzen ist. (Nr. 19). Der letzte Factor bedeutet die

Scheitelebene der ersten Congruenz. In dieser liegen, wie wir gesehen haben, u. A. die zum Hauptstrahl orthogonalen Geraden $\sigma_2 = 0$. Da der Mittelpunkt der beiden Congruenzen in den unendlich fernen Punkt des Hauptstrahls gerückt ist, so kann jeder Punkt einer der durch $\sigma_2 = 0$ gekennzeichneten Geraden als Fusspunkt einer vom „Mittelpunkt" auf die Gerade gefällten Normale, als Grenzlage des Mittelpunkts der Congruenzlinie angesehen werden, der also in diesem Falle nicht schlechthin ins Unendliche rückt, sondern unbestimmt wird. So erklärt sich auch das Auftreten des letzten Factors.

Die bis jetzt angeführten Formeln enthalten nur Punkt- und Ebenencoordinaten. Treten die Paramater p, σ_i, τ_i hinzu, so sind neue Substitutionen vor dem Grenzübergang auszuführen, und zwar in verschiedener Weise je nach der Art des Grenzübergangs.

Setzen wir

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = q\bar{\sigma}_3 \cdot \varrho \quad , \quad \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \cdot \varrho \quad , \quad \sigma_3 = \frac{\bar{\sigma}_1}{3q} + \bar{\sigma}_3 \cdot \varrho , \\ &p - e_1 = \bar{p} - 3\varrho , \quad p - e_2 = \bar{p} , \quad p - e_3 = \bar{p} + 3q^2 \cdot \varrho , \end{aligned} \tag{30}$$

so führen wir den *Uebergang von der ersten aplanaren Congruenz zur ersten planaren* aus, wenn wir schliesslich $\varrho = \infty$ setzen. Auf diese Art erhalten wir von Neuem die Gleichungen (9), (10) der Parameterflächen, ebenso, wie zu erwarten, an Stelle der Umfassungskugeln Flächen 2. Ordnung, die in die unendlich ferne Ebene und die Querebenen der Parameterflächen zerfallen sind. *Man sieht nunmehr, wie es zugeht, dass die Parameterfläche $p = \infty$ im Grenzfall nicht mehr der absolute Kegelschnitt ist, sondern der Durchschnitt der unendlich fernen Ebene mit dem Kegel des Quasifocus.*

Setzen wir dagegen

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \bar{\sigma}_3' + 3q\bar{\sigma}_1' \cdot \varrho , \quad \sigma_2 = -q\bar{\sigma}_2' , \quad \sigma_3 = 3q^2 \cdot \bar{\sigma}_1' \cdot \varrho , \\ &p - e_1 = -\bar{p}' - 3q^2\varrho , \; p - e_2 = -\bar{p}' + 3(1-q^2)\varrho , \; p - e_3 = -\bar{p}' + 3\varrho , \end{aligned} \tag{31}$$

so erhalten wir den *Uebergang zu dem die erste planare Congruenz begleitenden Parallelenbündel.* An Stelle des Parameters der eine Congruenzlinie σ enthaltenden Parameterfläche tritt die Grösse

$$-p' = \frac{2q}{1+q^2} \frac{\sigma_3'}{\sigma_1'} , \tag{32}$$

an Stelle der Parameterflächen selbst tritt das Büschel von zerfallenen Flächen 2. Ordnung (ausgearteten Umfassungskugeln)

$$x_0 \{ p'(1-q^2)x_0 + 2qx_2 \} = 0 . \tag{33}$$

Eine Fläche dieser Art liegt mit zwei Parameterflächen p_1, p_2 in einem Büschel, wenn

$$p_1 + p_2 = p' : \tag{34}$$

Der Satz von den Büscheln, die Parameterflächen enthalten, gilt also auch jetzt noch, *aber an Stelle der drei Parameterflächen treten deren Grenzlagen, von denen nur zwei selbst Parameterflächen sind.* Die Fläche $p' = 2p$ schneidet aus jeder Erzeugenden σ der Parameterfläche p die Brennpunkte aus. (S. Nr. 14, vgl. S. 477.)

Wir verzichten auf die Vorführung weiterer Einzelheiten, und überlassen es dem Leser, insbesondere auch die Formeln zu entwickeln und zu erörtern, die die durch einen gegebenen Punkt gehenden oder in einer gegebenen Ebene liegenden Congruenzlinien liefern. Auf den Grenzübergang (31) jedoch werden wir in einem anderen Zusammenhang nochmals zurückzukommen haben.

Planare Gewindebündel und Kettencongruenzen des zweiten Typus (β).

Die canonische Basis III b β (S. 451) liefert uns für die zusammengehörigen Gewindebündel und Kettencongruenzen die Darstellung

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = 0\,, \quad \mathfrak{X}_{02} = \sigma_2 \quad , \quad \mathfrak{X}_{03} = \sigma_3 \quad , \\ &\mathfrak{X}_{23} = \sigma_1, \quad \mathfrak{X}_{31} = (p + r)\sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{12} = (p - r)\sigma_3, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{U}_{01} = 0\,, \quad \mathfrak{U}_{02} = \tau_2 \quad , \quad \mathfrak{U}_{03} = \tau_3 \quad , \\ &\mathfrak{U}_{23} = \tau_1, \quad \mathfrak{U}_{31} = -(p + r)\tau_2, \quad \mathfrak{U}_{12} = -(p - r)\tau_3, \end{aligned} \tag{36}$$

($r \neq 0$). Den reciproken Gewindebündeln kann man in diesem Falle *niemals* sechs linear-unabhängige Gewinde entnehmen. Sie haben immer ein uneigentliches Gewinde gemein, und, wenn $p = \pm r$ ist, sogar ein ganzes Gewindebüschel. Die zugehörigen Parallelenbündel bestehen beide aus den Parallelen zur x_1-Axe. Die Parameter der Gewinde (35), (36) sind

$$P_\sigma = p + r\,\frac{\sigma_2^{\,2} - \sigma_3^{\,2}}{\sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2}}, \quad P_\tau = -p - r\,\frac{\tau_2^{\,2} - \tau_3^{\,2}}{\tau_2^{\,2} + \tau_3^{\,2}}. \tag{37}$$

Zwei Congruenzlinien σ, τ schneiden einander rechtwinklig, wenn

$$\sigma_2\tau_2 + \sigma_3\tau_3 = 0; \tag{38}$$

sie schneiden sich ausserdem auch, wenn

$$-r\,\frac{\sigma_2^{\,2} - \sigma_3^{\,2}}{\sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2}} = p = -r\,\frac{\tau_2^{\,2} - \tau_3^{\,2}}{\tau_2^{\,2} + \tau_3^{\,2}}. \tag{39}$$

Die Gleichung $\sigma_2\sigma_3 = 0$ liefert die $2 \cdot \infty^1$ *Hauptstrahlen* beider Congrennzen, die in der Ebene $x_1 = 0$ verlaufen, und zur x_2-Axe und zur x_3-Axe parallel sind. Alle in der Congruenz (35) oder (36) enthaltenen Ketten sind parallel gestellte Cylindroide; *auf Strahlenbüschel mit eigentlichem Scheitel reducirte Ketten giebt es nicht.* Aus der ersten Bemerkung fliesst eine sehr einfache und anschauliche Erzeugungsweise dieser Congruenzen, die einen Grenzfall bildet einer zuvor besprochenenen Erzeugungsart der planaren Congruenzen des ersten Typus (S. 522):

Unterwirft man ein (reelles) Cylindroid allen Schiebungen senkrecht zu seiner Hauptaxe, so gehen die Strahlen des Cylindroids über in die eigentlichen Strahlen einer planaren Kettencongruenz des zweiten Typus, und ebenso die zugehörigen Gewindebüschel in die zur Congruenz gehörigen Gewindebündel.

Die reciproke Congruenz wird gefunden, wenn man das erzeugende Cylindroid durch einen rechten Winkel um seine Hauptaxe dreht.

Ferner enthält die Congruenz neben den genannten Ketten ∞^1 Parallelenbüschel. Die zugehörigen Gewindebüschel bestehen aus lauter congruenten Gewinden, ihre Hauptaxen sind sämmtlich Hauptstrahlen der von ihnen gebildeten Büschel (Typus II b β, S. 446, von Gewindebüscheln).

Die *Parameterflächen* sind, als Oerter von Punkten betrachtet, sämmtlich Ebenenpaare:

$$(p^2 - r^2)x_0^2 + x_1^2 = 0. \tag{40}$$

Jedes von diesen Ebenenpaaren (mit Ausnahme der Fläche $p = 0$) tritt zweimal auf. Nur die unter ihnen, deren Parameter p den Ungleichungen

$$-r \leqq p \leqq +r \tag{41}$$

genügt, enthalten reelle Gerade beider Congruenzen. Ausgezeichnet ist einmal die Fläche $p = \pm r$, die die Hauptstrahlen trägt, sodann die „*Grenzfläche*“ $p = 0$ des beide Congruenzen begleitenden Parallelenbündels. Dieses Ebenenpaar enthält die Grenzlinien aller Cylindroide beider Congruenzen; es ist Grenzlage der Brennfläche einer planaren Congruenz des ersten Typus, von der aus man zu dem gegenwärtigen Fall übergehen kann. Brennfläche, im üblichen Sinne des Wortes, der jetzt betrachteten Congruenzen ist sie indessen nicht; eine solche existirt überhaupt nicht, sondern nur eine unendlich ferne Brennlinie.

Jede in der Fläche $p = 0$ verlaufende Congruenzlinie besteht aus lauter Brennpunkten. Bemerkenswerth ist, dass auch hier (wie schon bei den aplanaren Kettencongruenzen des dritten Typus) Parameterflächen auftreten, die Oerter von ∞^2 reellen Punkten sind, aber reelle Congruenzlinien nicht enthalten, die nämlich, die rein-imaginären Werthen von p entsprechen. Besonders aber verdient der Umstand hervorgehoben zu werden, dass die in den bisher behandelten Fällen vorhandene Erzeugung der Kettencongruenzen durch die gemeinsamen Normalen von Geraden einer Parameterfläche im gegenwärtigen Fall vollkommen illusorisch wird: Es ist also unrichtig, dass *jeder* Ort von Hauptaxen eines Gewindebündels auf diese Weise erzeugt werden kann; der vorliegende Ausnahmefall lässt sich auf keine Weise hinwegdefiniren.

Die Fusspunktflächen der betrachteten Congruenzen sind unter einander congruente Cylindroide.

Ordnung und Classe auch dieser Congruenzen sind (2, 1). Die Constantenzahl ist fünf.

Planare Gewindebündel und Kettencongruenzen des dritten Typus (γ).

Die einfachen Eigenschaften der ∞^3 aus lauter Hauptstrahlen bestehenden planaren Congruenzen haben wir schon betrachtet. Die Erzeugung der zugehörigen Gewindebündel durch Drehung eines Gewindes um parallele Axen senkrecht zur Hauptaxe des Gewindes ist evident. Die vorhergehenden Fälle (III b α) (III b β) zeigen, dass als Grenzlagen ($\lim q = 0$, $\lim r = 0$) von Parameterflächen (deren Begriff hier illusorisch wird) die Ebenen betrachtet werden können, die parallel sind zu der Ebene des Feldes, das die Congruenzlinien enthält. Indessen jede in der genannten Ebene gelegene Curve 2. Classe kann, als Ort von Ebenen betrachtet, bei Grenzübergang von aplanaren Congruenzen her, gleichfalls Grenzlage einer Parameterfläche sein. Die Erzeugung durch Flächen zweiten Grades ist also hier wieder möglich, sie hat aber den Unbestimmtheitsgrad fünf.

Die Erniedrigung von Ordnung und Classe von (2, 1) auf (0, 1) wird durch Abschnürung zweier imaginärer Parallelenbündel bewirkt. Die Scheitel dieser Bündel sind die Schnittpunkte der Ebene aller Congruenzlinien mit dem absoluten Kegelschnitt.

Zwei reciproke planare Gewindebündel des dritten Typus, deren Parameter die Werthe p, $-p$ haben, stimmen, wenn $p \neq 0$ ist, nur in einem uneigentlichen Gewinde überein. Ist $p = 0$, so fallen sie ganz zusammen.

Das Normalennetz eines reellen eigentlichen Strahls (III c).

Dieser Fall kann leicht verstanden werden als Grenzfall der planaren Congruenz des ersten Typus. Es giebt ∞^6 zusammengehörige Normalennetze, und ∞^7 Paare zugehöriger Gewindebündel. Die analytische Darstellung wird erhalten, wenn man in den Formeln (1) u. s. w. q zur Grenze ± 1 übergehen lässt. Die Parameterflächen sind *orthogonale Paraboloide*, solche also, deren Scheitel zugleich Quasifocus ist. Die Erzeugenden durch den Scheitel sind die Hauptaxen der beiden Normalennetze, Focalaxen und zugleich Scheitelerzeugende des zum Quasifocus gehörigen ausgearteten Kegels, der, auf zwei Arten, als das doppelt überdeckte Innere eines rechten Winkels aufgefasst werden kann.

Die Parameterflächen bilden ein Büschel von Flächen 2. Ordnung und zugleich eine lineare Schaar von Flächen 2. Classe, mit vier geraden Basislinien; sie bilden die Gesammtheit der Paraboloide, die dieselben zu einander orthogonalen Scheitel-Erzeugenden haben. Eine Brennfläche, Enveloppe der Parameterflächen, existirt nicht, wohl aber hat jede Congruenz zwei Brennlinien. — Die Erniedrigung von Ordnung und Classe der Congruenz von (2, 1) auf (1, 1) rührt daher, dass sich von Neuem ein Parallenbündel abgeschnürt hat. Man erkennt dies geometrisch, wenn man den zum Quasifocus gehörigen Kegel sich abplatten lässt.

Führen wir in den Formeln (1) u. s. f. den Uebergang etwa zur Grenze $q = +1$ wirklich aus, so erhalten wir zunächst das Normalennetz:

$$(42) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = \sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{02} = \sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{03} = \sigma_3, \\ &\mathfrak{X}_{23} = \sigma_1 + p\sigma_3, \quad \mathfrak{X}_{31} = p\sigma_2, \quad \mathfrak{X}_{12} = \sigma_1 + p\sigma_3. \end{aligned}$$

In diesem Netz sind ausgezeichnet erstens der *Hauptstrahl*, der zugleich dem zweiten, von Geraden oder Strahlen τ gebildeten Normalennetz angehört, entsprechend den Parameterwerthen $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 1 : 0$.

Zweitens ist ausgezeichnet ein Strahl, den wir als *singulären Strahl* des als zweidimensionale Kette betrachteten Normalennetzes bezeichnen wollen. *Dieser singuläre Strahl hat unbestimmte Parameter*: Er wird gefunden, wenn wir

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = \lambda : 0 : 1$$

setzen, und unter λ eine beliebige Grösse verstehen. Er ist augenscheinlich die Hauptaxe des zweiten Normalennetzes; er ist die Hauptaxe eines Büschels coaxialer Gewinde, das allen zum ersten Normalennetz gehörigen Gewindebündeln zugleich angehört. Drittens sind ausgezeichnet die Strahlen des ersten Netzes, die zum singulären Strahl

parallel sind. *Diese ∞^1 Strahlen entziehen sich, mit Ausnahme des singulären Strahls, der Parameterdarstellung* (42). Sie sind *nicht* Hauptaxen eigentlicher Gewinde eines der betrachteten Bündel, sondern nur Grenzlagen solcher Hauptaxen (S. 313). Sie bilden den Durchschnitt unseres Normalennetzes mit dem Parallelenbündel, das den singulären Strahl enthält, und das zunächst als Grenzlage auftritt des die planare Congruenz begleitenden Bündels. Alle Strahlen dieses Bündels nähern sich, wie die Formeln (3) zeigen, bei unserem Grenzübergang einer völlig *bestimmten* Grenzlage, nämlich eben dem singulären Strahl.

Man kann zweitens vor dem Uebergang zur Grenze neue Parameter einführen, etwa durch folgende Substitutionen:

$$(43)\quad \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{p}}{1-q}\,\bar{\sigma}_3, \quad \sigma_2 = (1-q)\,\bar{\sigma}_2, \quad \sigma_3 = \bar{\sigma}_3, \quad p = \frac{\bar{p}}{1-q}.$$

An Stelle der Grenzlagen (42) erhält man dann, wenn man $\bar{p}$ als endlich festhält, andere Grenzlagen des Strahles $\mathfrak{X}$ (Nr. 1), nämlich diese:

$$(44)\quad \begin{aligned} &\bar{\mathfrak{X}}_{01} = \bar{\sigma}_3, && \bar{\mathfrak{X}}_{02} = 0, && \bar{\mathfrak{X}}_{03} = \bar{\sigma}_3, \\ &\bar{\mathfrak{X}}_{23} = \bar{\sigma}_1 - \bar{p}\,\bar{\sigma}_3, && \bar{\mathfrak{X}}_{31} = \bar{p}\,\bar{\sigma}_2, && \bar{\mathfrak{X}}_{12} = \bar{\sigma}_1 + \bar{p}\,\bar{\sigma}_3, \end{aligned}$$

So erhalten wir also in der That irgend einen Strahl, der zum singulären Strahl parallel ist; die Abschnürung des genannten Bündels wird algebraisch evident.

Die Art, wie sich beim Uebergang von der planaren Congruenz zum Normalennetz ein Parallelenbündel abtrennt, ist durchaus verschieden von dem Process der Abtrennung eines Parallelenbündels, der beim Uebergang von der aplanaren Kettencongruenz zur planaren stattfindet.

Die Formeln (31) führen nämlich dann schon zu allen Strahlen des abgetrennten Bündels, wenn man im Grenzfall dem mit $\bar{p}'$ bezeichneten Parameter einen *bestimmten* Werth beilegt. Dem entsprechend ergeben sich bei demselben Grenzübergang auch zwei reciproke Gewindebündel, nämlich die Bündel (3), (4), deren Hauptaxen die abgetrennten Parallelenbündel *erfüllen*. (Vgl. das weiterhin unter III d α Gesagte.) Aehnliches ist hier nun unmöglich. Denn reciproke Gewindebündel, deren Hauptaxen zwei *zu einander orthogonale* Parallelenbündel erfüllten, giebt es nicht. Dem entsprechend stellen die Gleichungen (44) und die zugehörigen Gleichungen

$$(45)\quad \begin{aligned} &\bar{\mathfrak{U}}_{01} = -\bar{\tau}_3, && \bar{\mathfrak{U}}_{02} = 0, && \bar{\mathfrak{U}}_{03} = \bar{\tau}_3, \\ &\bar{\mathfrak{U}}_{23} = \bar{\tau}_1 - \bar{p}\,\tau_3, && \bar{\mathfrak{U}}_{31} = \bar{p}\,\bar{\tau}_2, && \bar{\mathfrak{U}}_{12} = -\bar{\tau}_1 - \bar{p}\,\bar{\tau}_3 \end{aligned}$$

bei *gegebenen* Werthen von $\bar{p}$ zwar ebenfalls reciproke Gewindebündel dar; deren Hauptaxen erfüllen aber nicht ein Parallelen*bündel*,

sondern — da eine Aenderung der Parameter $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\tau}_1$ den Strahl $\bar{x}$ oder $\bar{u}$ ungeändert lässt — nur ein Paar zu einander orthogonaler Parallelen*büschel*. Erst dann, wenn man den Werth von $\bar{p}$ variirt, entsteht wirklich das besprochene Parallelen*bündel*. (Vgl. weiterhin den Fall IIIe.)

Das Normalennetz enthält, wie wir wissen, abweichend von allen zuvor betrachteten zweidimensionalen Ketten, ∞^3 Strahlenketten. Aber nur ∞^2 unter diesen Ketten sind Grenzlagen von Ketten einer aplanaren oder planaren Kettencongruenz, die nämlich, die den singulären Strahl enthalten. Alle diese Ketten haben dieselbe Hauptaxe: Der Ort der „Grenzpunkte", der in den zuvor behandelten Fällen stets eine Fläche war, ist hier nur eine Curve, die Hauptaxe des ersten und der singuläre Strahl des zweiten Netzes. Ferner liegen in der Normalencongruenz die ∞^1 Parallelenbüschel, die den singulären Strahl nicht enthalten. Sie entsprechen Gewindebüscheln des Typus IIbα (S. 446), solchen ohne Hauptstrahl. Zweitens ist wiederum das ausgezeichnete Parallelenbüschel aufzuführen, das den singulären Strahl enthält. Dieses Strahlenbüschel kann in gewisser Weise als dem zum singulären Strahl gehörigen Büschel coaxialer Gewinde entsprechend angesehen werden. In unserer Classification der mit eindimensionalen Ketten verbundenen Gewindebüschel kommt es natürlich nicht vor.

In Bezug auf die gemeinsamen Gewinde zweier reciproker Bündel verhält sich die Figur ebenso wie die Figur der planaren Congruenzen des ersten Typus (S. 521).

Die Figur zweier verschiedener Parallelenbündel. (IIIdα.)

Es giebt ∞^4 Paare von Parallelenbündeln, und ∞^5 Paare zu solchen gehöriger reciproker Gewindebündel. Da die Strahlen zweier Parallelenbündel, die überhaupt mit Gewindebündeln verknüpft sind, wie schon hervorgehoben, niemals rechte Winkel mit einander bilden können, so ist es unmöglich, diesen Fall durch Grenzübergang von planaren Gewindebündeln aus zu erhalten. Sie treten aber in Verbindung mit planaren Bündeln des ersten Typus auf, wenn man von aplanaren Bündeln zu diesen übergeht. In der That stellen die Gleichungen (3), (4), wenn man die Grössen $\mathfrak{X}'_k$, $\mathfrak{U}'_k$ als Gewindecoordinaten fasst, gerade die Figur zweier reciproker Gewindebündel dar, die zu unserer nunmehrigen Basis III$d\alpha$ (S. 452) gehört. Auch haben wir den genannten Grenzübergang selbst in diesem Zusammenhang schon ausgeführt (Nr. 24...26, 31...33). Es spaltet sich also (im Plücker'schen Continuum) bei dem betrachteten Uebergang von einem Paar aplanarer Kettencongruenzen zu einem Paar von Parallelenbündeln, neben dem Feld der

uneigentlichen Geraden, ein Paar von planaren Congruenzen ab, womit das Herabsinken von Ordnung und Classe von (3, 2) auf (1, 0) erklärt ist. Dieses Paar von planaren Congruenzen ist nicht bestimmt; es kann vielmehr, der höheren Constantenzahl der planaren Congruenzen entsprechend, variiren mit der Art des Grenzübergangs. Die vorausgehenden Betrachtungen enthalten den Beweis dafür, dass jedes Paar von nicht orthogonalen Parallelenbündeln ∞^3 Paare planarer Congruenzen begleitet: Das einzelne Paar ist bestimmt, sobald neben den beiden Parallelenbündeln der gemeinsame Scheitel o der beiden planaren Congruenzen gegeben ist. Die Parameterflächen sind, wie wir gesehen haben, die Ebenen, die die beiden unendlich fernen Scheitel der zwei Parallelenbündel enthalten. Als *Grenzlagen* von Parameterflächen aber entstehen ausserdem $\infty^4 = \infty^3 \cdot \infty^1$ Paraboloide, mit deren Hülfe die beiden Bündel von Parallelen als gemeinsame Normalen von gleichartigen Erzeugenden construirt werden können. Die Erzeugungsweise mit Hülfe von Flächen 2. Grades ist also hier vorhanden, sie hat aber, abweichend vom allgemeinen Fall, den Unbestimmtheitsgrad vier, oder, wenn man nur eines der beiden Bündel erzeugen will, den Unbestimmtheitsgrad sechs. (Man vergleiche das über die planaren Congruenzen des dritten Typus Gesagte: Dort stellen sich, bei der Erzeugung durch Kegelschnitte, natürlich auch Parallelenbündel ein.)

Die vorliegende Figur zweier getrennter Parallelenbündel gestattet die viergliedrige Gruppe der perspectiven Aehnlichkeitstransformationen; das einzelne Paar reciproker Gewindebündel noch die dreigliedrige Gruppe aller perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centra auf der zugehörigen Parameterfläche liegen, insbesondere also alle Schiebungen parallel zur Parameterfläche. Zweierlei Gewindebüschel giebt es demnach in einem solchen Bündel. Die ∞^2 Büschel allgemeiner Art gehören zu dem auf S. 446 näher beschriebenen Typus II bα, ohne Hauptstrahlen. ∞^1 Büschel aber gehören dem Typus II bβ an: diese, mit Hauptstrahlen behaftet, haben ihre Hauptaxen auf je einer der ∞^1 Parameterflächen.

Die letzten Sätze führen zu einer sehr einfachen Erzeugungsweise der betrachteten Gewindebündel:

Unterwirft man ein nicht ausgeartetes Gewinde allen perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, deren Centra auf einer eigentlichen Ebene ω liegen, die parallel ist zur Hauptaxe des Gewindes, diese Hauptaxe aber nicht enthält, so entstehen die Gewinde eines Bündels mit parallelen Hauptaxen. Das reciproke Gewindebündel ist von derselben Beschaffenheit, und gehört zu einem anderen Bündel zu ω paralleler Hauptaxen.

Umgekehrt kann jedes Paar reciproker Gewindebündel dieser Art im Wesentlichen auf eine Weise so erzeugt werden.

Im Wesentlichen: Man kann natürlich von irgend einem der ∞^2 nicht ausgearteten Gewinde eines der vorgelegten Bündel ausgehen.

Die reciproken Gewindebündel haben ein uneigentliches Gewinde, und niemals ein weiteres Gewinde gemein. — In den vier durch die Gleichungen (1)...(4) dargestellten Gewindebündeln haben wir eine bemerkenswerthe Figur vor uns. *Zwei aus* (1) *und* (2) *oder aus* (3) *und* (4) *entnommene Gewinde sind stets conjugirt. Zwei Gewinde aus* (1) *und* (4) *oder aus* (2) *und* (3) *sind stets orthogonal, d. h. ihre Hauptaxen kreuzen oder schneiden einander rechtwinklig. Sie sind conjugirt, wenn diese Hauptaxen sich schneiden.*

Die Figur zweier zusammenfallender Parallelenbündel (III dβ).

Die Figur zweier zusammenfallender Parallelenbündel (erster und zweiter Schicht) steht in eben der Beziehung zur Figur der planaren Kettencongruenzen des zweiten und dritten Typus, wie die Figur getrennter Parallelenbündel zu Kettencongruenzen des ersten Typus. Wir haben vor uns ∞^2 Parallelenbündel, und ∞^3 Paare zugehöriger Gewindebündel. Jedem Parallelenbündel kann auf ∞^3 Arten eine planare Congruenz (des zweiten oder dritten Typus) beigesellt werden, so dass, wenn man noch das uneigentliche Geradenfeld hinzunimmt, wieder eine Congruenz 3. O. 2. Cl. entsteht. In irgend einem Gewindebündel der hier zu betrachtenden Art haben alle Gewinde denselben Parameter. *Ein solches Bündel entsteht dadurch, dass man ein eigentliches Gewinde allen Schiebungen unterwirft.* Die Figur ist ein Grenzfall der aplanaren Gewindebündel des dritten Typus. Zwei zu demselben Parallelenbündel gehörige reciproke Gewindebündel haben im Allgemeinen ein uneigentliches Gewinde gemein; sie fallen zusammen, wenn sie zum Parameter $p = 0$ gehören.

Die Figur zweier reciproker Parallelenbüschel (III e).

Dieser Fall ist völlig singulär, da, nach seiner Definition, die Hauptaxen der zugehörigen Gewindebündel überhaupt keine Congruenz bilden. Die Figur ergiebt sich auf verschiedene Weise als Grenzlage von zuvor betrachteten Figuren. Lässt man die unter III dα genannte Ebene ω durch die Hauptaxe des erzeugenden Gewindes gehen, so kommt man zu dem hier vorliegenden Fall. Einfacher noch ist die auf der Hand liegende *Erzeugung durch Schiebung eines Büschels coaxialer Gewinde in einer zu seiner Hauptaxe senkrechten Richtung.*

Das Vorausgehende dürfte wohl genügen, um wenigstens die wesentlichsten der einigermaassen verwickelten Erscheinungen, die das Studium der speciellen Gewindebündel darbietet, verständlich zu machen. Es hat sich an unserem Beispiele gezeigt, wie wenig Berechtigung es hat, ohne eine sorgfältige Untersuchung die Theorie der Grenzfälle als in der Theorie des sogenannten allgemeinen Falles eingeschlossen zu betrachten. Derartige Dinge lassen sich nicht aus der Vogelperspective beurtheilen. Selbst bei Aufgaben, deren Lösung im „allgemeinen" Fall gar keine Schwierigkeiten hat, dürfte es die Regel sein, dass Grenzfälle zu Betrachtungen besonderer Art Veranlassung geben, und dass das Studium ihrer Beziehungen zu dem „allgemeinen" Fall nicht ganz „ohne Weiteres" ausgeführt werden kann.

Solche Beispiele sind schon zur Genüge bekannt. Wir erinnern an die Theorie der quadratischen und bilinearen Formen. Man muss sich daher eigentlich darüber wundern, dass Geometer immer wieder derselben Täuschung über die Tragweite ihrer Untersuchungen anheimfallen.

Eine besondere Motivirung der auf S. 227 und S. 329 abgegebenen Urtheile dürfte durch unsere positiven Darlegungen wohl entbehrlich geworden sein. Wer ein Interesse daran hat, die Einzelheiten dieser Motivirung kennen zu lernen, wird sich ohnehin der Aufgabe nicht entziehen können, die Angaben des Verfassers zu prüfen und sie mit denen seiner Vorgänger zu vergleichen.

Nützlicher als eine Kritik, die nur ein ganz ephemeres Interesse haben könnte, dürfte es wohl sein, die Wurzel eines Trugschlusses aufzudecken, der vielen in ungehöriger Allgemeinheit hingestellten Sätzen der Geometrie zu Grunde liegt. Sie scheint uns in der folgenden mit mehr oder weniger Bewusstsein geübten Argumentation zu liegen:

„Wenn zwei analytische Mannigfaltigkeiten in der Umgebung einer Stelle regulären Verhaltens übereinstimmen, so sind sie identisch."

Ein solcher Satz besteht in der That, *wenn die beiden betrachteten Mannigfaltigkeiten in einem und demselben wohldefinirten analytischen Continuum verlaufen.* Nur unter dieser Annahme offenbar hat ja der Process der analytischen Fortsetzung einen klaren Sinn. Jede *Cremona*'sche Transformation aber liefert Beispiele, in denen die entgegengesetzte Voraussetzung vorliegt. Jedem Mathematiker geläufig ist z. B. die Thatsache, dafs das nicht abgeschlossene Continuum aller irreducibelen Kegelschnitte einer Ebene in den Continuis aller Curven zweiter Ordnung und aller Curven zweiter Classe zwei ganz verschiedene und dabei sogar algebraische Ergänzungen findet. Kann man aus der Uebereinstimmung im sogenannten allgemeinen Fall nicht schliessen, dass die durch projective Linienbüschel erzeugten „Kegelschnitte" immer identisch sein müssen mit denen, die durch projective Punktreihen erzeugt werden, so wird bei anderen Figuren eine analoge Schlussweise auch nicht erlaubt sein.

§ 40.

Von der Beweglichkeit eines starren Körpers im Infinitesimalen.

Die ausgeführte Classification der linearen Systeme von Gewinden hat uns bisher dazu gedient, gewisse geometrische Oerter zu definiren, deren Eigenschaften uns dann weiter beschäftigt haben. Dasselbe Problem ist aber, wie in der Einleitung zu unserem dritten Abschnitt schon erwähnt worden ist, auch von Bedeutung für die theoretische Kinematik, und, insofern diese die Grundlage der Mechanik starrer Körper bildet, auch für die Mechanik. Indem wir der Mechanik der starren Körper selbst angehörige Anwendungen, die einen zu umfangreichen Stoff bilden würden, bei Seite lassen, wollen wir jetzt unseren Gegenstand von der kinematischen Seite her in Kürze betrachten.

Der gemeinte Zusammenhang zwischen der Geometrie der Gewinde und der Geometrie der *infinitesimalen* Bewegungen im Raume ist reingeometrisch bereits in unserem ersten Abschnitt behandelt worden. Der zugehörige analytische Apparat ergiebt sich ohne Weiteres, wenn man einige der in § 21 aufgestellten Sätze specialisiert. Da es sich zunächst nur um Dinge handelt, die schon vielfach erörtert worden sind*) und die wohl als allgemein bekannt gelten dürfen, so können wir uns kurz fassen.

Wir stellen eine sogenannte *infinitesimale Bewegung* analytisch dar, indem wir in den Formeln des § 21 die folgenden Substitutionen machen:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_i = \mathfrak{a}_i \delta t, \quad \beta_i = \mathfrak{b}_i \delta t \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Wir sagen, die infinitesimale Bewegung sei *qualitativ bestimmt*, wenn die Verhältnisse der sechs Grössen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ gegeben sind, oder also, wenn das Differential δt als eine unbestimmte Grösse betrachtet wird; wir sagen, sie sei *quantitativ bestimmt*, wenn die Producte $\mathfrak{a}_i \delta t$, $\mathfrak{b}_i \delta t$ selbst vorgeschrieben sind.

---

*) Zuerst von Möbius, Lehrbuch der Statik; Journal f. Math. 1838, Bd. 18 = Ges. Werke Bd. I, S. 545. Von Lehrbüchern nennen wir noch G. Königs, *Leçons de Cinématique*, Paris 1897. — In der ziemlich ausgedehnten neueren Litteratur über die Bewegungsfreiheit eines starren Körpers scheint die weiterhin im Texte formulirte Aufgabe merkwürdiger Weise noch nicht behandelt zu sein. Der besonders von Mannheim (Géométrie cinématique, Paris 1894) und Somoff behandelte Fall, in dem ein starrer Körper sich mit einigen seiner Punkte auf Flächen stützt, umfasst nicht alle Möglichkeiten und bietet auch noch aus anderen Gründen nicht den geeigneten Ausgangspunkt für allgemeine Erörterungen. Doch sind einzelne der abzuleitenden Sätze in den vorliegenden Untersuchungen, besonders denen von Mannheim und Ball, bereits aufgetreten.

Nach den Untersuchungen unseres ersten und zweiten Abschnittes können wir nun auf mehrere Arten einer jeden quantitativ bestimmten infinitesimalen Bewegung z. B. einen völlig bestimmten Motor zuordnen, derart, dass die Zusammensetzung mehrerer hinter einander auszuführender infinitesimaler Bewegungen durch (geometrische oder stereometrische) Addition dieser Motoren erfolgt, und jeder qualitativ bestimmten infinitesimalen Bewegung ein Gewinde (mit den rechtwinkligen Plücker'schen Coordinaten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$), das mit ihr ebenfalls eindeutig und gegenüber beliebigen Bewegungen invariant verbunden ist. Wo immer dieses Gewinde einem eigentlichen Punkte x eine bestimmte Nullebene

$$\mathfrak{a}_1(x_2y_3 - x_3y_2) + \mathfrak{a}_2(x_3y_1 - x_1y_3) + \mathfrak{a}_3(x_1y_2 - x_2y_1) +$$
$$+ \mathfrak{b}_1(x_0y_1 - x_1y_0) + \mathfrak{b}_2(x_0y_2 - x_2y_0) + \mathfrak{b}_3(x_0y_3 - x_3y_0) = 0$$

zuordnet, erfolgt dann die Fortschreitung des Punktes x bei der (qualitativ bestimmten) infinitesimalen Bewegung oder bei den (∞^1 quantitativ bestimmten) infinitesimalen Bewegungen senkrecht zu dieser Ebene, während im Falle des Unbestimmtwerdens der Nullebene der Punkt in Ruhe bleibt. (Vgl. § 21, Nr. 7, 26.)

Drücken wir die Grössen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ irgendwie als von einander unabhängige ganze lineare und homogene reelle Functionen von r Grössen $\sigma_1 \cdots \sigma_r (r = 1, 2, \cdots 6)$ aus, so liefern uns die Formeln (1), jedem Werthe von δt entsprechend, ein lineares System r^{ter} Stufe von Motoren, und allen diesen ∞^1 Systemen, deren jedes die sämmtlichen übrigen bestimmt, wird ein einziges reelles lineares System r^{ter} Stufe von *Gewinden* zugeordnet, das mithin ein „lineares" System r^{ter} Stufe von *qualitativ* bestimmten infinitesimalen Bewegungen bezeichnet.

Wir werden nun von einem starren Körper*), dem alle diese Bewegungen, aber keine anderen erlaubt sind, sagen, er habe *„r Grade der Bewegungsfreiheit"* oder *„Bewegungsfreiheit oder Beweglichkeit r^{ter} Stufe"* im Infinitesimalen; den Zusatz „im Infinitesimalen" werden wir übrigens in der Folge weglassen, da andere als infinitesimale Bewegungen zunächst nicht betrachtet werden sollen. Wir können danach sagen:

Jedem reellen linearen System von Gewinden entspricht eine bestimmte Art von Beweglichkeit eines starren Körpers, und umgekehrt. —

Wir stellen uns nun die Aufgabe:

Alle möglichen Arten von Beweglichkeit eines starren Körpers kinematisch zu beschreiben.

---

*) Ein starrer Körper wird hier immer den ganzen Raum erfüllend gedacht. Jeder Punkt hat in ihm eine bestimmte Lage in Bezug auf ein rechtwinkliges Axenkreuz z. B.; die Bewegung dieses übrigens beliebigen Axenkreuzes oder Coordinatensystems bestimmt die Bewegung des ganzen Körpers.

Das heisst, wir wollen Mechanismen auszudenken suchen von möglichst einfacher Structur, die so eingerichtet sind, dass jeder einem starren Körper eine bestimmte Art von Beweglichkeit (*im Infinitesimalen*) gestattet, und dass auf diese Weise alle möglichen Arten von Freiheit des Körpers erhalten werden. Zur Lösung dieser ihrer Natur nach in hohem Maasse unbestimmten Aufgabe haben wir offenbar dreierlei zu thun: Wir müssen erstens die verschiedenen Arten von Beweglichkeit *classificiren*, indem wir je zwei in eine Classe stellen, die mit einander *congruent* sind, d. h. durch irgend eine (endliche) Bewegung in einander übergeführt werden können. Dieser Theil unseres Problems deckt sich nach dem Gesagten völlig mit der Aufgabe, die wir in § 36 bereits behandelt haben. Wir müssen zweitens eine Anzahl von „einfachen" Mechanismen erklären, mit deren Hülfe wir die Beschreibung der verschiedenen Arten von Freiheit eines starren Körpers bewirken wollen. Schliesslich haben wir dann durch Hinter-einander-Schaltung von mehreren solchen Apparaten die kinematische Darstellung irgend einer der zuvor bestimmten Arten von Bewegungsfreiheit zu bewirken.

Als „einfache" Mechanismen dienen uns zunächst *die Schraube* mit ihren Grenzfällen.

Die Schraube erlaubt einem starren Körper, sich um eine in ihm und im Raume feste Axe derart zu drehen, dafs mit jeder Drehung durch den Winkel 2ϑ eine Schiebung $2\eta = \text{const.}\, 2\vartheta$ in der (durch den positiven Umlaufssinn der Winkel bestimmten) positiven Richtung der Axe verbunden ist. Der Quotient $\frac{2\eta}{2\vartheta} \cdot 2\pi$ heisst *Ganghöhe*, $\frac{\eta}{\vartheta}$ selbst *Parameter* der Schraube. Im Grenzfall $\eta = 0$ erhalten wir das *Kniegelenk* (das ebene Gelenk, Axengelenk, Charnier), das dem starren Körper nur Drehung (aber auch jede Drehung) um eine feste Axe erlaubt; der Grenzfall $\vartheta = 0$, der der Schiebung entspricht, wird realisirt durch eine *Prismenführung* oder etwa durch ein parallelogrammatisches Gelenkwerk. Diese einfachen Apparate, deren jeder zur Darstellung einer bestimmten Art von Freiheit *erster* Stufe dient, sind offenbar bereits ausreichend zur Beschreibung aller Arten der Bewegungsfreiheit; zweckmässig aber ist es, daneben noch einige andere zu benutzen, die zur Darstellung einiger Arten von Freiheit höherer Stufe dienen sollen. Wir verwenden noch die *Laufstange*, die einem beweglichen Körper die Drehungen um eine bestimmte Axe verbunden mit beliebigen Schiebungen in der Richtung dieser Axe, also eine besondere Art von Freiheit zweiter Stufe gestattet, und das *Kugelgelenk*, das ihm alle Drehungen um einen festen Punkt auszuführen

erlaubt, und also einer bestimmten Art von Freiheit dritter Stufe entspricht.

Z. B. zwei Schrauben und eine Prismenführung hinter einander schalten heisst: Es soll etwa die zweite Schraube mit der Mutter der ersten starr verbunden sein, und ebenso die Führung des Prismas mit der Mutter der zweiten Schraube. Das Prisma repräsentirt dann einen starren Körper mit drei, unter Umständen aber auch nur mit zwei Graden der Freiheit. Uebrigens ist die Reihenfolge, in der diese Apparate an einander befestigt werden, gleichgültig, da infinitesimale Bewegungen, die wir allein hier betrachten, mit einander vertauschbar sind.

Stellen wir auf solche Art mehrere der beschriebenen Apparate, deren Zahl natürlich noch vermehrt werden könnte, zusammen, so bestimmt ein jeder von ihnen, qualitativ, eine einzelne infinitesimale Bewegung oder ein lineares System von solchen; und es wird bei Beschreibung irgend einer Art von Freiheit eines starren Körpers lediglich darauf ankommen, Zahl und Gruppirung der Apparate derart auszuwählen, dass aus den dann verfügbaren infinitesimalen Bewegungen alle verlangten und keine anderen zusammengesetzt werden können. Von den Mechanismen selbst zu reden, werden wir dabei in der Regel nicht nöthig haben: Es genügt, die zugehörigen infinitesimalen Bewegungen zu kennen.

Bevor wir, auf Grund der Untersuchung des § 36, zur Beantwortung der bezeichneten und einiger damit zusammenhängender Fragen übergehen, wollen wir zunächst noch zwei Irrthümer berichtigen, die dort (S. 446, 452) untergelaufen sind: *Die* ∞^6 *Gewindebüschel des Typus* IIbα) *bilden nicht, wie angegeben,* ∞^2, *sondern nur* ∞^1 *Classen, und ebenso die* ∞^5 *Gewindebündel des Typus* IIIdα). Man kann nämlich, wenn $q \neq 0$, im ersten Falle nach Ausführung der Schiebung

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = \frac{p}{q} x_0 + x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3,$$

im zweiten nach Ausführung der Schiebung

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = -\frac{p}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right) x_0 + x_2, \quad x_3' = x_3$$

durch geeignete Aenderung der Basis den Parameter p zum Verschwinden bringen.

Wir berechnen nun die Zuwüchse, die die (homogenen) Punkt-Gewinde- und Ebenencoordinaten bei den im Ausdruck (1) enthaltenen sechs linear-unabhängigen infinitesimalen Bewegungen

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} \alpha_1 = \delta t, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 0, & \beta_i = 0 \quad \text{u. s. w.} \\ \beta_1 = \delta t, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0, & \alpha_i = 0 \quad \text{u. s. w.} \end{array}$$

erfahren, indem wir, nach dem Vorgange von S. Lie, den Coefficienten von δt im Zuwuchs irgend einer an der betrachteten Stelle regulären analytischen Function f jener Coordinaten hinschreiben. Wir erhalten dann die folgenden sogenannten *Symbole* der angeführten infinitesimalen Bewegungen:

$$\mathfrak{A}_1 f = 2\left\{x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}\right\}, \quad \mathfrak{B}_1 f = -2\frac{\partial f}{\partial x_1}; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_1 f = 2\left\{\mathfrak{x}_{03}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{02}} - \mathfrak{x}_{02}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{03}} + \mathfrak{x}_{12}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{31}} - \mathfrak{x}_{31}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{12}}\right\}, \\ \mathfrak{B}_1 f = 2\left\{\mathfrak{x}_{03}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{31}} - \mathfrak{x}_{02}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{12}}\right\};\end{gathered} \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}_1 f = 2\left\{u_3\frac{\partial f}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial f}{\partial u_3}\right\}, \quad \mathfrak{B}_1 f = 2u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}; \tag{5}$$

(u. s. w.)*) Die infinitesimale Transformation (1), die eine beliebige infinitesimale Bewegung vorstellt, erhält dann das Symbol

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_1 f + \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_2 f + \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_3 f + \mathfrak{b}_1\mathfrak{B}_1 f + \mathfrak{b}_2\mathfrak{B}_2 f + \mathfrak{b}_3\mathfrak{B}_3 f. \tag{6}$$

Sie reducirt sich auf eine Drehung oder Schiebung, wenn

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 = 0 \tag{7}$$

ist, und zwar auf eine Schiebung dann, wenn

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 = 0 \tag{8}$$

ist. Schliessen wir den letzten Fall aus, so haben wir vor uns eine Schraubung oder insbesondere eine Drehung um eine *bestimmte* Axe mit den Plücker'schen Coordinaten

$$\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}_3 : \mathfrak{b}_1 - \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3}\mathfrak{a}_1 : \cdots, \tag{9}$$

mit dem Drehungswinkel

$$2\vartheta = -2\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2}\cdot\delta t \tag{10}$$

und der Schiebungsgrösse

$$2\eta = -2\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3}{\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{a}_2^2 + \mathfrak{a}_3^2}}\cdot\delta t. \tag{11}$$

*) Da Missverständnisse nicht wohl möglich sind, so benutzen wir der Einfachheit halber die gleichen Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, f zur Darstellung derselben infinitesimalen Bewegung in den verschiedenen Arten von Veränderlichen. — Die Lie'schen Abkürzungen, die ja auch sonst vielfach gebraucht werden, verwenden wir aus diesem Grunde auch hier. Sie leisten bei Fragen, wie sie hier behandelt werden, eben dieselben Dienste wie die viel specielleren Symbole eines sogenannten Schraubencalculs. Die Einführung neuer Zeichen scheint uns nur da gerechtfertigt zu sein, wo sie wirklich auch einen besonderen Vortheil bieten.

Die zusammengehörigen qualitativ bestimmten Schraubungen, auf die es hier allein ankommt, haben daher den Parameter

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3}, \tag{12}$$

der zugleich der Parameter des entsprechenden Gewindes ist. (Vgl. Nr. 19, S. 179.) —

Wir stellen nunmehr die einzelnen Typen von linearen Systemen infinitesimaler Bewegungen durch je eine *Basis* dar, die einer Basis des zugehörigen Systems von Gewinden entspricht, indem wir eine Anzahl natürlich in gewissem Grade willkürlich gewählter quantitativ bestimmter infinitesimaler Bewegungen hinschreiben, aus denen dann, mit Hülfe homogener Parameter, alle zugehörigen (qualitativ oder quantitativ bestimmten) infinitesimalen Bewegungen abgeleitet werden können. Unter den aufzuzählenden linearen Systemen infinitesimaler Bewegungen sind insbesondere alle die enthalten, die (reelle) *continuirliche Gruppen* von Bewegungen definiren*). Sie sind durch beigefügte Sterne ausgezeichnet. —

Im Folgenden wird überall, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, nur von *reellen* Figuren und von *eigentlichen* Punkten, Geraden und Ebenen geredet werden.

Freiheit erster Stufe.

Ia) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f + p\mathfrak{B}_1 f}$ * ∞^5.

Schraubung vom Parameter p (im Falle $p = 0$ also Drehung) um eine bestimmte Axe (die x_1-Axe). Ist $p \neq 0$, so bleibt kein Punkt in Ruhe. Die Ebene, die auf der zu irgend einem Punkt x gehörigen Fortschreitungsrichtung**) senkrecht steht, ist dem Punkte x zugeordnet in dem zur Schraubung gehörigen Nullsystem

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 + p(x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0 \tag{13}$$

(Möbius). Die Leitlinien dieses Nullsystems oder die Geraden des eigentlichen Gewindes

$$\mathfrak{X}_{23} + p\mathfrak{X}_{01} = 0 \tag{13a}$$

*) Eine elementare Bestimmung der reellen continuirlichen Bewegungsgruppen findet man Math. Ann. Bd. 39 (1891) S. 486.

**) Wir reden der Kürze halber von *einer* Fortschreitungsrichtung, wo zwei einander entgegengesetzte gemeint sind. Nach unserer Definition der „Freiheit" eines starren Körpers ist zugleich mit irgend einer quantitativ bestimmten infinitesimalen Bewegung auch deren entgegengesetzte möglich.

haben die für sie charakteristische Eigenschaft, auf den zu ihren Punkten gehörigen Sehnen senkrecht zu stehen, d. h. *jeder Punkt einer solchen Geraden $\mathfrak{X}$ wird von der Schraubung in einer Richtung fortgeführt, die auf der von $\mathfrak{X}$ senkrecht ist* (Möbius). Wie dieser Satz im Falle $p = 0$ und im Grenzfall Ib) abgeändert werden muss, ist evident.

Ib) $\boxed{\mathfrak{B}_1 f}$ * ∞^2.

Schiebung in einer bestimmten Richtung. Das zugehörige Gewinde ist uneigentlich und daher immer ausgeartet (ein Liniengebüsch).

Freiheit zweiter Stufe.

IIa) $\boxed{\mathfrak{A}_2 f + (p+r)\mathfrak{B}_2 f, \quad \mathfrak{A}_3 f + (p-r)\mathfrak{B}_3 f}$ ∞^8.

(Hinter einander geschaltete, qualitativ bestimmte) Schraubungen um zwei im Falle $r \neq 0$ völlig bestimmte Axen, die einander rechtwinklig schneiden. Jede dieser Schraubungen kann sich auf eine Drehung reduciren ($p^2 = r^2$). Die Axen aller Schraubungen, die der starre Körper ausführen kann, erfüllen ein *Cylindroid*, wenn, wie wir zunächst annehmen wollen, $r \neq 0$ ist (α, S. 446, 455).

Hat die quadratische Gleichung

(14) $$(p+r)\sigma_2^2 + (p-r)\sigma_3^2 = 0$$

reelle und getrennte Wurzeln, so ist eine noch einfachere Darstellung dieser Art von Freiheit zweiter Stufe, nämlich mit Hülfe zweier Kniegelenke, möglich. Es befinden sich dann unter den Schraubungen des betrachteten linearen Systems zwei verschiedene (wie immer qualitativ bestimmte) reelle Drehungen um Axen, die die Hauptstrahlen des Cylindroids zu Winkelhalbirenden haben (S. 455).

In allen Fällen bilden die Fortschreitungsrichtungen eines Punktes, der keiner Drehungsaxe angehört, ein ebenes Büschel, und die Normalen aller durch diese Büschel bestimmten Flächenelemente liegen in einer irreducibelen Congruenz 1. O., 1. Cl., dem Ort aller Geraden $\mathfrak{X}$, die auf den zu ihren Punkten gehörigen Sehnen senkrecht stehen. (Vgl. Nr. 13.) Die (reellen und getrennten, oder zusammenfallenden, oder conjugirt-imaginären) Drehungsaxen sind die Brennlinien dieser Congruenz. (*Satz von Schönemann und Mannheim.*)

Ist $r = 0$ (β), so erhält man ein Büschel von Schraubungen gleichen Parameters p, deren Axen ein ebenes Büschel erfüllen, und

die sich im Falle $p = 0$ sämmtlich auf Drehungen reduciren (S. 457). Ist $r = 0$, $p \neq 0$, so ist die Congruenz (1, 1) eine Rotationscongruenz mit conjugirt-imaginären Brennlinien (S. 458). Beim Uebergang zur Grenze $r = 0$, $p = 0$ zerfällt sie in eine Congruenz (1, 0) und eine Congruenz (0, 1), die beide das Büschel der Drehungsaxen enthalten.

Im Falle $r = 0$, $p = 0$ gehört ∞^2 Punkten nur je eine Fortschreitungsrichtung an, nämlich allen Punkten allgemeiner Lage in der Ebene der Drehungsaxen die zu dieser Ebene senkrechte Richtung, und der Scheitel des Büschels aller Drehungsaxen bleibt ganz in Ruhe. (*Cardanisches oder Hooke'sches Gelenk.*)

II b α) $\boxed{\mathfrak{A}_2 f, \quad q\mathfrak{B}_2 f + \mathfrak{B}_3 f}$ $(q \neq 0)$. ∞^6.

Drehung um eine *bestimmte* Axe, verbunden mit Schiebung in einer Richtung, die mit dieser Axe einen *schiefen* Winkel bildet. Die Drehungsaxe ist der Ort aller (eigentlichen) Punkte, denen nicht ein ebenes Büschel, sondern nur eine einzige Fortschreitungsrichtung entspricht. Zu dieser linearen Schaar von Schraubungen gehört eine wie soeben definirte Congruenz (1, 1) mit reellen Brennlinien, deren eine die Drehungsaxe ist, während die andere unendlich fern in den Ebenen senkrecht zur Richtung der Schiebung liegt.

II b β) $\boxed{\mathfrak{A}_2 f + p\mathfrak{B}_2 f, \quad \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^5.

Schraubung (im Falle $p = 0$ Drehung) um eine gewisse Axe, verbunden mit einer Schiebung, die einen *rechten* Winkel mit der Axe der Schraubung bildet. Die Schraubungsaxe selbst ist in gewissem Grade *unbestimmt*. Sie kann nämlich parallel verschoben werden in einer Richtung, die senkrecht zu ihrer eigenen und zur Richtung der Schiebung ist. Der Parameter p der Schraubung ändert sich dabei nicht.

Ist $p \neq 0$, so giebt es keinen (eigentlichen) Punkt, der nach weniger als ∞^1 Richtungen fortschreiten könnte. Die Geraden $\mathfrak{X}$, die auf den zugehörigen Sehnen senkrecht stehen, bilden dann eine *irreducibele* Congruenz (1, 1) mit zusammenfallenden unendlich fernen Brennlinien. Ist $p = 0$, hat man also eine Schaar von ∞^1 Drehungen um die Geraden eines Parallelenbüschels vor sich, so zerfällt diese Congruenz, wie unter II a), in das Bündel und das Feld, dem die Drehungsaxen angehören. Jeder Punkt in der Ebene der Drehungsaxen schreitet dann nur in einer Richtung fort, und zwar senkrecht zu dieser Ebene.

IIc) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f,\ \mathfrak{B}_1 f}$ * ∞^4.

Drehung um eine Axe, verbunden mit Schiebung *in der Richtung dieser Axe.* Es liegen also vor ∞^1 Schraubungen um eine *bestimmte* Axe, aber mit willkürlichem Parameter (dazu, dem Parameter ∞ entsprechend, die Schiebung). Die zugehörige Congruenz (1, 1) ist die Normalencongruenz einer eigentlichen Geraden; jeder nicht auf der Schraubenaxe gelegene Punkt schreitet in ∞^1 Richtungen (auf einem Rotationscylinder) fort. Der zugehörige Mechanismus ist die oben erwähnte *Laufstange.*

IId) $\boxed{\mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ * ∞^2.

Alle Schiebungen senkrecht zu einer bestimmten Richtung. Verbindung zweier nicht paralleler Prismenführungen. Statt der Congruenz (1, 1) erhält man in diesem Fall, im Endlichen, nur eine Congruenz (1, 0).

Freiheit dritter Stufe

IIIa) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f + a_1 \mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{A}_2 f + a_2 \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f + a_3 \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^9.

Die Basis liefert unmittelbar die Darstellung des entsprechenden linearen Systems infinitesimaler Bewegungen durch drei Schraubungen (ev. Drehungen), deren (nur im Falle α völlig bestimmte) Axen einander unter rechten Winkeln schneiden. Sind a_1, a_2, a_3 der Grösse nach geordnet (wie man es voraussetzen darf), so hängt die benutzte Bezeichnung mit der früher (S. 461) verwendeten entweder durch die Substitution $a_\varkappa = p - e_\varkappa$ oder durch die Substitution $a_\varkappa = e_\varkappa - p$ ($e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1 > e_2 > e_3$) zusammen. Die Hauptaxen der ∞^2 Schraubungen des Systems, deren keine sich auf eine Schiebung reduciren kann, erfüllen eine aplanare Kettencongruenz des ersten (α), zweiten (β) oder dritten (γ) Typus.

Ein Punkt allgemeiner Lage wird von diesen Schraubungen, wenn nicht $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist (γ; $p = 0$), nach ∞^2 Richtungen fortgeführt; eine ihm zugeschriebene Fortschreitungsrichtung bestimmt dann die Fortschreitungsrichtung jedes der übrigen Punkte. Die Forderung, Punkte zu finden, die nach weniger Richtungen fortschreiten, führt zur Gleichung

$$(15)\qquad -\frac{1}{x_0}\begin{vmatrix} -a_1 x_0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & -a_2 x_0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & -a_3 x_0 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 x_0^2 + \sum_1^3 a_\varkappa x_\varkappa^2 = 0.$$

(Reelle) Punkte dieser Eigenschaft existiren also nur dann, wenn die ternäre quadratische Form

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \tag{16}$$

indefinit ist, und sie erfüllen dann, wenn ausserdem die Discriminante $a_1 a_2 a_3$ dieser Form nicht verschwindet, ein Hyperboloid, die *Parameterfläche* (15) des betrachteten linearen Systems infinitesimaler Bewegungen.

Die Erzeugenden erster Art der Parameterfläche sind die Axen der im System infinitesimaler Bewegungen enthaltenen Drehungen. Die Erzeugenden zweiter Art haben die für diese Geraden charakteristische Eigenschaft, auf den zugehörigen Sehnen senkrecht zu stehen. (S. S. 472, Nr. 27.)

Unter den soeben über die quadratische Form (16) gemachten Voraussetzungen lässt sich die Beweglichkeit des starren Körpers auf ∞^3 Arten dadurch beschreiben, dass man drei Axen (beliebige Erzeugende erster Art der Parameterfläche) angiebt, um die er sich soll drehen können. Auch kann man für drei passend gewählte, nämlich *zu drei verschiedenen Erzeugenden zweiter Art gehörige*, Punkte der Parameterfläche Flächenelemente (senkrecht zu den entsprechenden Erzeugenden zweiter Art) vorschreiben, in deren Ebenen sie sich bewegen sollen.

Verlangt man von einer Ebene, dass sie von den Schraubungen des Systems nur um ∞^1 ihrer Geraden gedreht werden kann, so kommt man zu der Gleichung

$$\frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 u_1 & 0 & u_3 & -u_2 \\ a_2 u_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ a_3 u_3 & u_2 & -u_1 & 0 \end{vmatrix} = a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0,$$

die wiederum die soeben schon betrachteten Ebenen liefert. Jede von ihnen dreht sich bei allen infinitesimalen Bewegungen des Systems um den Punkt, in dem sie von einer Erzeugenden zweiter Art der Parameterfläche senkrecht getroffen wird. Verlangt man von dreien dieser Ebenen, *deren keine zwei parallel sind*, dass sie sich um die zugehörigen Punkte drehen sollen, so ist auch dadurch die Beweglichkeit des starren Körpers definirt.

Verschwindet von den Grössen a_1, a_2, a_3 eine einzelne, und zwar entweder a_1 oder a_3, so haben nur die Punkte eines Hauptstrahls der aplanaren Kettencongruenz die Eigenschaft, in Flächenelementen fortzuschreiten. Die soeben beschriebene Erzeugung der infinitesimalen

Bewegungen des betrachteten Systems durch bewegliche Dreiecke oder Dreiflache wird dann illusorisch. Dagegen ist sie möglich, wenn a_2 verschwindet. In diesem Falle giebt es auch Punkte, die nur in einem bestimmten Linienelement fortschreiten können, nämlich die reellen (getrennten oder zusammenfallenden) Scheitel der von den Schraubenaxen gebildeten aplanaren Kettencongruenz. Durch jeden Scheitel gehen im Falle $a_2 = 0$ ∞^1 Axen von Drehungen des betrachteten Systems, und dessen übrige infinitesimale Bewegungen führen ihn alle in der Richtung der zugehörigen Focalaxe der *zweiten* Kettencongruenz fort (S. 465, Nr. 11).

In dem zuvor ausgeschlossenen Falle $a_i = 0$ (d. h. $e_i = 0$, $p = 0$) und in ihm allein erzeugen die infinitesimalen Bewegungen des Systems

$$\boxed{\mathfrak{A}_1 f, \quad \mathfrak{A}_2 f, \quad \mathfrak{A}_3 f}^{*}$$

eine Gruppe, die Gruppe aller Drehungen um einen festen Punkt o. (*Hooke'sches Gelenk* in der gewöhnlichen Anwendung auf Uebertragung von Drehungen, oder *Cardanische Aufhängung.*) Jedem von o verschiedenen Punkt gehört dann selbstverständlicher Weise ein ebenes Büschel von Fortschreitungsrichtungen zu, da jeder solche Punkt bei allen Drehungen der Gruppe auf einer Kugelfläche frei beweglich ist. Wir stellen diese besondere Art von Freiheit eines starren Körpers durch das *Kugelgelenk* dar.

III b α) $\quad \boxed{\begin{matrix} \mathfrak{B}_1 f + q\mathfrak{B}_3 f, & \mathfrak{A}_2 f + p\mathfrak{B}_2 f \\ q(\mathfrak{A}_1 f + p\mathfrak{B}_1 f) + (\mathfrak{A}_3 f + p\mathfrak{B}_3 f) & \end{matrix}} \quad \begin{matrix} (q \neq -1, 0, +1) \\ \infty^8. \end{matrix}$

Die Axen aller möglichen nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems erfüllen eine planare Kettencongruenz des ersten Typus, die ∞^2 Axen der Schiebung des Systems das begleitende Parallelenbündel. Die beiden Schraubungen in der angegebenen Basis bestimmen ein lineares System zweiter Stufe von Schrauben gleichen Parameters p mit eigentlichem Scheitel (Typus II a β, s. oben). Fügt man dazu eine Schiebung (Prismenführung) in einer Richtung, die mit der Ebene der genannten ∞^1 Schraubenaxen einen *schiefen* Winkel bildet, so hat man damit die vorgelegte Art der Beweglichkeit eines starren Körpers auf eine völlig *bestimmte* Weise erzeugt*). Dieselbe

*) Unterwirft man das Coordinatensystem der Drehung

$$x_0' = x_0, \quad (1+q^2)x_1' = x_1 - qx_3, \quad x_2' = x_2, \quad (1+q^2)x_3' = qx_1 + x_3,$$

so ergiebt sich nach Ausführung der Substitution $r = \dfrac{2q}{1-q^2}$ eine Basis

Art von Beweglichkeit lässt sich aber immer auch mit Hülfe dreier Kniegelenke, oder zweier Kniegelenke und einer Prismenführung darstellen. Es giebt nämlich im vorliegenden Falle *stets* ∞^2 Punkte, die bei allen möglichen infinitesimalen Bewegungen nach weniger als ∞^2 Richtungen fortschreiten. Sie erfüllen die Parameterfläche

$$(17)\qquad -\frac{1}{x_0}\cdot\begin{vmatrix} -x_0 , & 0 , & -qx_0 \\ -x_3 , & -px_0 , & x_1 \\ -pqx_0+x_2, & -x_1+qx_3, & -px_0-qx_2 \end{vmatrix} =$$

$$= p^2(1-q^2)x_0^2 + 2pqx_0x_2 + x_1^2 - q^2x_3^2 = 0.$$

Die Erzeugenden erster Art dieser Fläche sind die Axen aller Drehungen, die in dem System infinitesimaler Bewegungen enthalten sind. Irgend ein Punkt der Fläche kann nur senkrecht zur entsprechenden Erzeugenden zweiter Art fortschreiten. Ist $p \neq 0$, so bestimmen irgend drei unter den zur Ebene $x_1 - qx_3 = 0$ parallelen Erzeugenden erster Art, als Axen möglicher Drehungen, das ganze System, und wenn $p = 0$, drei passend gewählte. (Vgl. S. 520.) Eine der drei Drehungen kann durch eine Schiebung ersetzt werden. Im Falle $p = 0$ schreitet der Scheitel o der zum System gehörigen aplanaren Kettencongruenz nur in einer Richtung fort, nämlich in der Richtung der Focalaxe der reciproken Kettencongruenz. —

$$\text{III b}\beta)\qquad \underline{\mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{A}_2 f + (p+r)\mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f + (p-r)\mathfrak{B}_3 f}\quad (r \neq 0)$$
$$\infty^6.$$

Die canonische Form setzt die in ∞^2 Exemplaren vorhandene Erzeugung des Systems durch zwei Schraubungen, deren Axen einander senkrecht schneiden, und durch eine Schiebung in Evidenz, deren Richtung zu denen der beiden Schraubenaxen senkrecht ist. Die Axen aller möglichen nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems erfüllen eine planare Kettencongruenz des zweiten Typus. Die nur nach ∞^1 Richtungen fortschreitenden Punkte erfüllen die Parameterfläche

$$(18)\qquad (p^2 - r^2)x_0^2 + x_1^2 = 0,$$

$$\underline{\mathfrak{B}_1 f + r\mathfrak{B}_3 f,\ \mathfrak{A}_2 f + p\mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f + p\mathfrak{B}_3 f}\quad (r \neq 0),$$

die die genannten Eigenschaften noch etwas besser in Evidenz setzt, überdies zu ihrer Herstellung nur rationale Operationen verlangt. Wir haben diese einfachere Form der Basis, in der man einen Grenzfall einer bei den Systemen III a α) in zwei reellen (und vier imaginären) Exemplaren vorhandenen Form der Basis erkennt, bisher nicht benutzt, weil wir die beiden reciproken Figuren gleichzeitig zu betrachten hatten.

(reelle eigentliche) Punkte der Art giebt es also nur dann, wenn $r^2 > p^2$ ist. Und nur dann ist es möglich, die Beweglichkeit des starren Körpers mit Hülfe von drei Drehungen zu beschreiben, deren eine durch eine Schiebung vertreten werden kann. Alle Drehungsaxen sind, wie im vorausgehenden Falle, stets zur selben Ebene parallel, zwei von ihnen aber nunmehr auch nothwendig in derselben Ebene gelegen und zu einander parallel, während die dritte in einer anderen zu jener parallelen Ebene verläuft. Alle Geraden, die auf den Sehnen ihrer Punkte senkrecht stehen, erfüllen zwei auf der Parameterfläche gelegene Parallelenbüschel. Punkte, denen nur eine einzige Fortschreitungsrichtung zukäme, giebt es nicht.

IIIbγ) $\quad \mathfrak{B}_1 f, \quad \mathfrak{A}_2 f + p\mathfrak{B}_2 f, \quad \mathfrak{A}_3 f + p\mathfrak{B}_3 f \quad \infty^4.$

Dieser Fall verhält sich im Wesentlichen wie der vorige. Nur liegen jetzt die Axen aller nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems in einer Ebene, und alle diese Schraubungen haben denselben Parameter. Irgend drei von ihnen, deren Axen nicht demselben Büschel angehören, erzeugen das ganze System infinitesimaler Bewegungen. Ausgezeichnet ist der Fall $p = 0$, in dem alle jene Schraubungen sich auf Drehungen reduciren. Die Punkte der Ebene $x_1 = 0$ der Drehungsaxen haben dann die Eigenschaft, nur nach einer Richtung fortzuschreiten; in den übrigen Fällen giebt es keine Punkte, die nach weniger als ∞^2 Richtungen fortschreiten könnten.

IIIc) $\quad \mathfrak{A}_1 f + p\mathfrak{B}_1 f, \quad \mathfrak{A}_1 f, \quad \mathfrak{B}_2 f \quad \infty^7.$

Die hier wieder nur in einem Exemplar vorhandene Basis legt es nahe, das System mit Hülfe der Coordinatenbezeichnungen zu beschreiben. Wir sehen, dass das System erzeugt werden kann mit Hülfe einer Schraubung (Drehung, wenn $p = 0$) um die x_1-Axe, einer Drehung um die x_2-Axe und einer Schiebung in der Richtung eben dieser Axe, dass also diese Art von Freiheit hergestellt werden kann durch die Verbindung einer Laufstange mit einer Schraube, deren Axe die der Laufstange senkrecht schneidet. Jede Gerade des Normalennetzes der x_3-Axe, mit Ausnahme derer, die parallel sind zur x_2-Axe, ist Axe einer bestimmten nicht auf eine Schiebung reducirten Schraubung im System. Einer Geraden parallel zur x_2-Axe entspricht die Schiebung, und der x_2-Axe selbst eine unbestimmte Schraubung (eine solche mit willkürlichem Parameter, dazu, als Grenzfall, wieder die Schiebung). Ort

aller Punkte, die nach weniger als ∞^2 Richtungen fortschreiten, ist die Parameterfläche

$$x_2 x_3 + p x_0 x_1 = 0, \tag{19}$$

wenn $p \neq 0$, ein orthogonales Paraboloid. Die (zur x_3-Axe senkrechten Erzeugenden) erster Art dieser Fläche sind die Axen aller im System enthaltenen Drehungen; drei verschiedene unter ihnen dienen zur Darstellung des Systems. Ist $p = 0$, so zerfällt die Parameterfläche, und man erhält erstens ein Büschel von Drehungen mit parallelen Axen in der Ebene $x_2 = 0$, zweitens in der Ebene $x_3 = 0$ das zum „Scheitel" $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gehörige Büschel von Drehungsaxen. Auch in diesem Falle lässt sich die Beweglichkeit des starren Körpers mit Hülfe von drei Drehungen darstellen, wie oben unter III b α). Nur wenn p verschwindet, giebt es einen Punkt (den genannten Scheitel), der nur nach einer einzigen Richtung fortschreitet.

III d α) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f + q\mathfrak{A}_3 f, \quad \mathfrak{B}_2 f, \quad q\mathfrak{B}_1 f + \mathfrak{B}_3 f}$ $(q \neq 0, \pm 1)$ ∞^5.

Hier, wo es sich nicht darum handelt, reciproke Gewindebündel oder die entsprechenden linearen Systeme von infinitesimalen Bewegungen gleichzeitig zu betrachten, werden wir die Basis wohl besser so wählen, dass die Axen der zu betrachtenden Schraubungen einer Coordinatenaxe parallel werden. Wir erreichen dies durch eine Drehung des Coordinatensystems

$$x_0' = x_0, \quad \sqrt{1+q^2}\cdot x_1' = x_1 + q x_3,$$
$$x_2' = x_2, \quad \sqrt{1+q^2}\cdot x_3' = -q x_1 + x_3;$$

setzen wir dann noch $r = \frac{2q}{1-q^2}$, so entsteht eine Basis der Form

$$\boxed{\mathfrak{A}_1 f, \quad \mathfrak{B}_2 f, \quad r\mathfrak{B}_1 f + \mathfrak{B}_3 f} \quad (r \neq 0).$$

Dieses System infinitesimaler Bewegungen kann erzeugt werden durch eine Drehung, verbunden mit allen Schiebungen parallel zu einer Ebene, die mit der Drehungsaxe einen *schiefen* Winkel bildet. Alle nicht auf eine Schiebung reducirten Schraubungen des Systems haben parallele Axen.

Die genannte Drehungsaxe ist in gewissem Grade *unbestimmt*. Sie kann parallel verschoben werden in einer Ebene ($x_2 = 0$), die mit der Richtung der zu den Drehungsaxen senkrechten zulässigen Schiebung ebenfalls einen rechten Winkel bildet. Diese Ebene ist zugleich der Ort aller Punkte, die nur in ∞^1 Richtungen fortschreiten. Sie

enthält ein zweites Parallelenbüschel, dessen Gerade die charakteristische Eigenschaft haben, zu den Sehnen ihrer Punkte senkrecht zu sein.

III d β) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f + p\mathfrak{B}_1 f,\quad \mathfrak{B}_2 f,\quad \mathfrak{B}_3 f}^{*}$ ∞^3.

Diese Art von Beweglichkeit eines starren Körpers kann auf ∞^2 Arten dadurch dargestellt werden, dass man eine Schraubung vom Parameter p mit den Schiebungen *senkrecht* zu ihrer Axe verbindet. Alle nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des linearen Systems haben denselben Parameter. Wenn $p \neq 0$ ist, schreitet jeder Punkt nach ∞^2 Richtungen fort, ist aber $p = 0$, nach ∞^1 Richtungen. Die Punkte aller Geraden eines Parallelen*bündels* werden dann senkrecht zu deren Richtungen fortgeführt. Man hat dann die infinitesimalen Transformationen der continuirlichen Gruppe von Bewegungen vor sich, die eine Schaar paralleler Ebenen einzeln in Ruhe lassen.

III e) $\boxed{\mathfrak{B}_1 f,\quad \mathfrak{A}_2 f,\quad \mathfrak{B}_2 f}$ ∞^4.

Diese Schaar von infinitesimalen Bewegungen enthält alle Schraubungen, deren Axen in einem Parallelenbüschel liegen. Eine Laufstange verbunden mit einer zu ihr senkrechten Prismenführung realisirt diesen Fall. Die Punkte der Ebene des Parallelenbüschels ($x_1 = 0$) schreiten nur nach ∞^1 Richtungen fort. Die Geraden des reciproken Parallelenbüschels stehen auf ihren Sehnen senkrecht.

III f) $\boxed{\mathfrak{B}_1 f,\quad \mathfrak{B}_2 f,\quad \mathfrak{B}_3 f}^{*}$ ∞^0.

Die Gesammtheit aller infinitesimalen Schiebungen.

Freiheit vierter Stufe.

IV a) $\boxed{\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1 f, & \mathfrak{B}_1 f, \\ \mathfrak{A}_2 f - (p+r)\mathfrak{B}_2 f, & \mathfrak{A}_3 f - (p-r)\mathfrak{B}_3 f \end{array}}$ ∞^8.

Die canonische Form der Basis setzt die Erzeugung dieser Art von Beweglichkeit eines starren Körpers mit Hülfe einer Laufstange und zweier Schrauben in Evidenz, deren Axen einander und die Axe der Laufstange rechtwinklig schneiden. Die Axen der zu betrachtenden ∞^4 Schraubungen, einschliesslich der ∞^2 Axen der Schiebung des Systems, erfüllen einen Kettencomplex. Jeder nicht singuläre Strahl dieses Complexes ist Axe einer (qualitativ) bestimmten Schraubung des

Systems, die sich auf die im System enthaltene Schiebung reducirt, wenn der Strahl zum singulären Strahl parallel wird, ohne mit diesem zusammenzufallen; dem singulären Strahl entsprechen ∞^1 Schraubungen, oder also es entspricht ihm eine Schraubung mit willkürlich bleibendem Parameter.

Immer sind ∞^2 Schraubungen vorhanden, die sich auf Drehungen oder Schiebungen reduciren. Ihre Axen erfüllen, wenn man von dem der Schiebung entsprechenden Parallelenbündel absieht, die *Parametercongruenz*

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0, \\ (p+r)\mathfrak{x}_{02} + \mathfrak{x}_{31} = 0, \quad (p-r)\mathfrak{x}_{03} + \mathfrak{x}_{12} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Greift man aus diesen Geraden vier solche heraus, die nicht einer Regelschaar zweiten Grades angehören, deren Coordinaten also nicht einer weiteren linearen Gleichung genügen, so hat man die Axen von vier Drehungen, aus denen sich die sämmtlichen infinitesimalen Bewegungen des Systems zusammensetzen lassen. Eine dieser Drehungen kann durch eine Schiebung vertreten werden.

Ist $r \neq 0$, so giebt es nur dann Punkte, die von allen Bewegungen des Systems nur nach je ∞^1 Richtungen fortgeführt werden, wenn die durch die Gleichung (14) bestimmten Brennlinien der Congruenz (20) reell sind. Die Punkte dieser Brennlinien schreiten nämlich in Richtungen fort, die zu den Brennlinien selbst senkrecht sind. Sind diese nicht nur reell, sondern überdies getrennt, so kann man die Beweglichkeit des starren Körpers auch dadurch beschreiben, dass man für je einen Punkt der beiden Brennlinien die entsprechenden Flächenelemente vorschreibt und die Punkte in diesen laufen lässt.

Ist $r = 0$ und ausserdem auch $p = 0$, so zerfällt die sonst irreducibele Congruenz (20). Alle Punkte einer Ebene schreiten dann nach ∞^1 Richtungen fort, mit Ausnahme eines einzigen, der nur nach einer Richtung fortschreitet. Man kann dann die Beweglichkeit des starren Körpers besonders einfach beschreiben durch Verbindung eines Kugelgelenks mit einer Prismenführung.

Man vergleiche hiermit die Auseinandersetzungen auf Seite 321, 457 und 542.

IV b α) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f, \quad \mathfrak{B}_1 f, \quad \mathfrak{A}_2 f - q\mathfrak{A}_3 f, \quad \mathfrak{B}_3 f}$ $(q \neq 0)$ $\cdot \infty^6$.

Die canonische Form lässt erkennen, dass jede infinitesimale Bewegung dieses Systems aus zwei Componenten zusammengesetzt werden kann: Einer Drehung, deren Axe eine gewisse Gerade $(x_1 = x_3 = 0)$

schneidet und parallel ist zu einer Ebene $(qx_2 - x_3 = 0)$, die mit dieser Geraden einen *schiefen* Winkel bildet, im Uebrigen aber willkürlich bleibt, und einer Schiebung, deren Richtung zu jener Geraden senkrecht, sonst aber ebenfalls beliebig ist. Ein zur Erzeugung dieser Art von Beweglichkeit geeigneter Mechanismus ist, wie ebenfalls die canonische Form der Basis zeigt, eine Laufstange (in der Richtung der x_1-Axe), verbunden mit einem *Kniegelenk* und einer Prismenführung (in der Richtung der x_3-Axe), deren Axen die Axe der Laufstange senkrecht schneiden, unter einander aber einen *schiefen* Winkel bilden. Diese ganze Figur kann in der Richtung der ausgezeichneten Geraden (der x_2-Axe) parallel verschoben werden, so dass ∞^1 solche Erzeugungen möglich sind.

Die Axen der nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems liegen in einem planaren Complex $(q\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{03} = 0)$. Die (eigentlichen) Strahlen oder Geraden dieses Complexes sind von dreierlei Beschaffenheit. Jedem Complexstrahl, der nicht zur Axe der Laufstange parallel ist, entspricht eine (natürlich nur qualitativ) bestimmte Schraubung (Drehung) im System $\left(\text{mit dem Parameter } -\frac{\mathfrak{X}_{31}}{\mathfrak{X}_{02}}\right)$. Jeder Geraden dieses Bündels ferner, die nicht zu dem Parallelenbüschel der Laufstangen $(\mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{X}_{23} = \mathfrak{X}_{31} = 0)$ gehört, entspricht die Schiebung $\mathfrak{B}_1 f$ in der Richtung der Laufstangen. Einer Geraden dieses (in der Ebene $x_3 = 0$ gelegenen) Büschels schliesslich entspricht eine Schraubung mit unbestimmt bleibendem Parameter. Dazu kommen dann noch die Richtungen der dem starren Körper möglichen Schiebungen, deren im Endlichen gelegene Axen einen zweiten planaren Complex bilden. (Vgl. S. 321.)

Der zuerst genannte planare Complex enthält eine irreducibele Congruenz (1, 1), die *Parametercongruenz*

$$q\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{03} = 0, \quad \mathfrak{X}_{31} = 0, \tag{21}$$

in der die Axen aller nicht auf Schiebungen reducirten Drehungen des Systems liegen. Eine Brennlinie dieser Congruenz liegt unendlich fern, die andere, die bereits genannte ausgezeichnete Gerade, ist der Ort aller Punkte, die nur nach ∞^1 Richtungen (den zu ihr senkrechten Richtungen der Schiebungen des Systems) fortschreiten.

Die Beweglichkeit des starren Körpers kann auch in diesem Falle in mannigfacher Art durch vier Drehungen dargestellt werden, deren höchstens zwei, wie in der oben angeführten Construction, durch Schiebungen ersetzt werden können. Man vergleiche hiermit auch das unter IIbα) Gesagte.

IV b β) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f,\ \mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{A}_2 f - p\mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^5.

Laufstange, *Schraube* (Kniegelenk, wenn $p = 0$) und Prismenführung, deren Axen einander unter *rechten* Winkeln schneiden. Die Figur gestattet alle Schiebungen senkrecht zur Richtung der Prismenführung, sodass ∞^2 solche Erzeugungen möglich sind.

Die Axen der nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems liegen in einem planaren Complex ($\mathfrak{X}_{03} = 0$). Jedem Complexstrahl, der nicht zur Laufstange parallel ist, entspricht eine bestimmte Schraubung im System $\left(\text{mit dem Parameter } -p - \frac{\mathfrak{X}_{31}}{\mathfrak{X}_{12}}\right)$. Jeder der hiermit ausgeschlossenen Geraden ferner, die nicht zu dem Parallelenbüschel der Laufstangen selbst gehört, entspricht die Schiebung $\mathfrak{B}_1 f$ in der Richtung der Laufstangen. Einer Geraden des genannten Büschels aber entspricht eine Schraubung mit willkürlich bleibendem Parameter. Dazu kommen noch die Richtungen der möglichen Schiebungen, deren im Endlichen gelegene Axen einen zweiten planaren Complex ($\mathfrak{X}_{02} = 0$) bilden.

Der erste der beiden planaren Complexe enthält die *Parametercongruenz*

(22) $$\mathfrak{X}_{03} = 0,\quad p\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31} = 0.$$

In dieser liegen die Axen aller nicht auf Schiebungen reducirten Drehungen im System. Sie ist, wenn $p \neq 0$, irreducibel und hat zwei vereinigte unendlich ferne Brennlinien. Im Falle $p = 0$ zerfällt sie in das Bündel aller Parallelen zur x_2-Axe und in das Feld der Geraden in der Ebene $x_3 = 0$. Und nur in diesem Falle giebt es Punkte, die nur nach ∞^1 Richtungen (senkrecht zur x_2-Axe) fortgeführt werden können, nämlich eben die Punkte der genannten Ebene.

Die Beweglichkeit des starren Körpers lässt sich darstellen durch vier Drehungen, deren eine oder zwei durch Schiebungen sich ersetzen lassen.

IV c) $\boxed{\mathfrak{A}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f,\ \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^4.

Diese Art von Beweglichkeit eines starren Körpers kann auf ∞^4 Arten dargestellt werden durch Verbindung zweier nicht paralleler Laufstangen, z. B. (auf ∞^2 Arten) durch Verbindung von zwei solchen, deren Axen einander rechtwinklig schneiden. Oder man kann etwa vier Kniegelenke zusammenstellen, deren Axen demselben Normalennetz, aber nicht derselben Regelschaar zweiten Grades angehören. Die

Axe des Normalennetzes ist der Ort aller Punkte, die nur nach ∞^1 Richtungen fortschreiten können.

IV d) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f,\ \mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ * ∞^2.

Drehung verbunden mit allen Schiebungen, oder etwa Laufstange verbunden mit zwei geeigneten Prismenführungen. Die Axen aller nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen liegen in einem Parallelenbündel.

Freiheit fünfter Stufe.

V a) $\boxed{\mathfrak{A}_1 f - p\mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{A}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f,\ \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^5.

Eine Schraube (ein Kniegelenk, wenn $p = 0$), verbunden mit zwei Laufstangen, deren Axen einander und die Axe der Schraube senkrecht schneiden, erzeugt auf ∞^2 Weisen diese Art von Beweglichkeit eines starren Körpers. Im Falle $p = 0$ wird man einfacher ein Kugelgelenk verbunden mit zwei nicht parallelen Prismenführungen benutzen, oder noch einfacher eine Verbindung von zwei Kugelgelenken. Jede Gerade, die die Axe der zuerst genannten Schraube nicht senkrecht kreuzt oder schneidet, ist Axe einer völlig bestimmten Schraubung des Systems infinitesimaler Bewegungen, vom Parameter $-p - \frac{x_{23}}{x_{01}}$. Irgend eine Gerade, die die Schraubenaxe senkrecht *kreuzt*, gehört zu einer bestimmten Schiebung, jede Normale der Schraubenaxe aber zu einer Schraubung mit willkürlich bleibendem Parameter (sowie natürlich zu der ihrer Richtung entsprechenden Schiebung). Die Axen aller im System enthaltenen Drehungen erfüllen den *Parametercomplex*

$$p x_{01} + x_{23} = 0.$$

Irgend fünf dieser Drehungen, deren Axen nicht einer Congruenz $(1, 1)$ angehören, erzeugen alle infinitesimalen Bewegungen des Systems. Eine oder zwei dieser Drehungen können durch Schiebungen vertreten werden.

V b) $\boxed{\mathfrak{A}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f,\ \mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}$ ∞^2.

Diese Art von Beweglichkeit eines starren Körper kann z. B. erzeugt werden durch die Verbindung zweier Laufstangen, deren Axen einander senkrecht schneiden, mit einer Prismenführung, deren Axe zu jenen senkrecht ist, und zwar auf ∞^4 Arten. Die Axen aller nicht auf Schiebungen reducirten Schraubungen des Systems liegen in einem

planaren Complex, und jede Gerade dieses Complexes gehört zu einer Schraubung mit willkürlich bleibendem Parameter. Fünf Drehungen um Gerade dieses Complexes, die nicht derselben Congruenz (1, 1) angehören, erzeugen alle infinitesimalen Bewegungen des Systems. Eine, zwei oder drei von den Drehungen können durch Schiebungen ersetzt werden.

(Eigentliche) Punkte, die nur nach ∞^1 Richtungen fortschreiten könnten, giebt es bei Freiheit fünfter Stufe niemals.

Freiheit sechster Stufe.

VI. $\boxed{\mathfrak{A}_1 f,\ \mathfrak{A}_2 f,\ \mathfrak{A}_3 f,\ \mathfrak{B}_1 f,\ \mathfrak{B}_2 f,\ \mathfrak{B}_3 f}^{\,*}$ ∞^0.

Ein Körper, der z. B. um drei Laufstangen sich bewegen kann, deren Axen paarweise mit einander rechte Winkel bilden, ist völlig frei. Ebenso ein Körper, der um sechs Gerade sich drehen kann, die, wie die Kanten eines Tetraeders, die Eigenschaft haben, nicht einem linearen Liniencomplex anzugehören (Möbius). Ferner ein Körper, der sechs Schraubenbewegungen ausführen kann, vorausgesetzt, dass die entsprechenden (z. B. paarweise conjugirten) Gewinde von einander linear unabhängig sind, u. A. m.

Anhang.

Grundzüge einer neuen Methode der Kinematik.

Am Ende des Weges, den wir uns vorgezeichnet hatten, dürfen wir uns vielleicht noch einen Ausblick auf eine Welt geometrischer Gestalten erlauben, die, bis jetzt nur an der Peripherie gestreift, wenn nicht alle Anzeichen trügen, eines der dankbarsten Gebiete geometrischer Forschung zu werden verspricht. Das Vorzutragende, für das wir nur die Bedeutung einer Skizze werden in Anspruch nehmen können, soll zugleich dazu dienen, den bisher behandelten Stoff dem Leser nochmals in seinen Hauptlinien und sozusagen in einem vergrösserten Maassstabe vor Augen zu stellen und durch weitere Anwendungen die Tragweite der zuvor entwickelten Theorie ins Licht zu setzen. —

Einen Hauptgegenstand der theoretischen Kinematik, die von der Maschinenlehre heute wohl abgetrennt werden muss, bildet das Studium der (analytischen) Mannigfaltigkeiten von ∞^r $(r = 1 \ldots 6)$ Lagen eines starren Körpers im Raume, d. h. von relativen Lagen dieses Körpers in Bezug auf einen anderen, der unbeweglich genannt, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, gedacht wird. Im Ganzen ist diese Lehre noch wenig entwickelt, besonders in den Fällen, in denen die etwa als *Beweglichkeitsgrad* des Körpers zu bezeichnende Dimensionenzahl r grösser als zwei ist*). In mancher Richtung ist man über den Aufgaben der Technik entlehnte Beispiele und tastende Versuche, etwas Ordnung in die sich darbietenden Einzelheiten zu bringen, noch kaum

*) Ist $r > 2$, so kann zu der Forderung, dass ein starrer Körper eine vorgeschriebene Mannigfaltigkeit von Lagen soll einnehmen können, bekanntlich noch eine andere treten, die durch ein nicht-integrables System Pfaff'scher Gleichungen auszudrücken ist. Der die Beweglichkeit im Infinitesimalen bezeichnende „Freiheitsgrad" wird dann auch an einer Stelle „allgemeiner Lage" kleiner als r. — Im Texte werden wir uns immer nur auf den viel einfacheren Fall beziehen, in dem diese beiden wohl auch in der Terminologie zu unterscheidenden Zahlen einander gleich sind.

hinausgekommen*). Man kann aber hierher, von anderen nicht direct in kinematischem Gewande auftretenden Theorien abgesehen, einen besonders wichtigen Theil der Differentialgeometrie der Raumcurven und krummen Flächen rechnen, wie Herr Darboux in seinem grossen Werke über diesen Gegenstand näher ausgeführt hat. — Im Folgenden soll nun, nachdem wir im vorigen Paragraphen die infinitesimale Beweglichkeit eines starren Körpers untersucht haben, ein weiterer Beitrag zu diesem auch als „Geometrie der Bewegung" bezeichneten Theile der theoretischen Kinematik, und zwar nunmehr zur Lehre von der Beweglichkeit eines starren Körpers im Endlichen geliefert werden.

Das Soma und seine Coordinaten.

Wir denken uns den starren Körper stets repräsentirt durch ein rechtwinkliges Axensystem, nämlich durch drei den Indices 1, 2, 3 zugeordnete einander rechtwinklig schneidende orientirte Gerade oder Strahlen, mit denen ein System von rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten verbunden werden kann. Diese Figur kann durch Bewegung in ∞^6 verschiedene Lagen gebracht werden. Jede einzelne von diesen Lagen nennen wir *ein Soma*, und eine beliebig aber bestimmt herausgegriffene *das Protosoma*. Aus dem Protosoma geht dann jedes andere Soma durch eine *bestimmte* Bewegung hervor, und diese wird dargestellt durch die in § 21 und § 25 entwickelten Formeln, wenn die Coordinaten ohne Accent sich auf das Protosoma, die mit Accenten auf das andere Soma beziehen, und durch alle diese Coordinaten dieselben mit dem Protosoma starr verbundenen Figuren (Punkte, Gerade oder Strahlen, Ebenen, und weiterhin Oerter von solchen) dargestellt werden. *Mithin können die Parameter* (α, β) *dieser Bewegung als Coordinaten des Soma betrachtet werden.* Wir wiederholen nun die schon früher benutzte Bemerkung, dass die besprochenen Formeln ihre Gestalt gar nicht oder nur unwesentlich ändern, wenn man die Parameter β_i um dasselbe Vielfache der entsprechenden Parameter α_i vermehrt — sofern man nämlich zur Darstellung der Strahlen *nicht* Plücker'sche Liniencoordinaten, sondern unsere *Strahlencoordinaten* benutzt (S. 174 ff., S. 220, Nr. 9). Wir können also die Parameter zu dualen Verbindungen zusammenfassen (S. 220, Nr. 10). Um dann die Zeichen $\mathfrak{a}_i = \alpha_i + \beta_i \varepsilon$ wieder zur Darstellung von beliebigen Bewegungen benutzen zu können, führen wir schliesslich an ihrer Stelle neue Zeichen ein:

*) Man vergleiche etwa den kürzlich erschienenen Artikel IV, 3 der Mathematischen Encyclopädie.

Als Coordinaten eines Soma können vier (reelle) homogene duale Grössen

$$(1)\qquad \begin{gathered} X_0 = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_{123}\cdot\varepsilon, \\ X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}\cdot\varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31}\cdot\varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12}\cdot\varepsilon \end{gathered}$$

oder deren scalare und vectorielle Coefficienten verwendet werden, vorausgesetzt, dass die ersten, also die Grössen $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_{01}$, $\mathfrak{X}_{02}$, $\mathfrak{X}_{03}$ *nicht sämmtlich verschwinden.*

Hier bereits erscheint also der Begriff Soma, zunächst allerdings rein formal, als eine *Erweiterung des Begriffs: reeller eigentlicher Strahl* (S. 200).

Wir bestimmen nun die Bewegung mit den dualen Parametern $\mathfrak{a}_i$, die das Soma X mit irgend einem anderen Soma Y zur Deckung bringt. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $\dot{\mathfrak{a}}$ oder $\dot{A}$ eine Quaternion oder vielmehr Biquaternion der Form

$$(2)\qquad \dot{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_0 e_0 + \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3\ ^*),$$

mit $\dot{\bar{\mathfrak{a}}}$ oder $\dot{\bar{A}}$ deren durch Zeichenwechsel von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ entstehende Conjugirte, und finden dann ohne Weiteres

$$(3)\qquad \dot{A} = \dot{\bar{X}}\cdot\dot{Y}.$$

Das heisst, die gesuchte Bewegung hat die dualen Parameter

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_0 &= \alpha_0 + \beta_0\varepsilon = X_0Y_0 + X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3, \\ \mathfrak{a}_1 &= \alpha_1 + \beta_1\varepsilon = X_0Y_1 - X_1Y_0 - X_2Y_3 + X_3Y_2, \\ \mathfrak{a}_2 &= \alpha_2 + \beta_2\varepsilon = X_0Y_2 - X_2Y_0 - X_3Y_1 + X_1Y_3, \\ \mathfrak{a}_3 &= \alpha_3 + \beta_3\varepsilon = X_0Y_3 - X_3Y_0 - X_1Y_2 + X_2Y_1, \end{aligned}$$

oder endlich überzählige Parameter (α, β), deren beiden ersten α_0, β_0 diese Werthe zukommen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{X}\,|\,\mathfrak{Y}) &= \mathfrak{X}_0\mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{03}, \\ (\mathfrak{X}\mathfrak{X}) &= \mathfrak{X}_0\mathfrak{Y}_{123} + \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{12} \\ &\quad + \mathfrak{X}_{123}\mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{03}. \end{aligned}$$

Hieraus können wir nun sogleich einige wichtige Folgerungen ziehen. Wir nennen *parallel* zwei Somata, oder, wie wir lieber sagen wollen,

---

*) e_0, e_1, e_2, e_3 sind die sogenannten Einheiten der Quaternionentheorie, die in Schriften über diesen Gegenstand gewöhnlich mit $1, i, j, k$ bezeichnet werden, wiewohl der Gebrauch des Zeichens i in diesem Sinne offenbar nur Verwirrung stiften kann und thatsächlich auch solche schon angerichtet hat.

Somen, wenn das eine aus dem anderen durch eine (Euklidische) Schiebung hervorgeht. Wir nennen *hemisymmetral* zwei Somen, wenn das eine aus dem anderen durch eine Umschraubung hervorgeht; wir nennen endlich *symmetral* zwei Somen, die durch eine Umwendung vertauscht werden können*). Nun ergiebt sich sofort:

Zwei Somen X, Y sind parallel, wenn die scalaren Bestandtheile ihrer dualen Coordinaten X_i, Y_i zu einander proportional sind, und umgekehrt. —

Zwei Somen X, U sind hemisymmetral, wenn die scalaren Bestandtheile ihrer dualen Coordinaten X_i, U_i der Gleichung

$$(6) \qquad (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{X}) = \mathfrak{U}_0 \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{U}_{01} \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{U}_{02} \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{U}_{03} \mathfrak{X}_{03} = 0$$

genügen; sie sind überdies symmetral, wenn ihre dualen Coordinaten X_i, U_i selbst der synektischen Gleichung (oder dem Gleichungspaar)

$$(7) \qquad \begin{aligned} (UX) &= (\mathfrak{U} \mid \mathfrak{X}) + (\mathfrak{U}\mathfrak{X}) \cdot \varepsilon = \\ &= U_0 X_0 + U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(Nr. 5)}$$

genügen.

Die Umwendungsaxe hat dann die dualen Coordinaten $\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}_3$ (Nr. 4). —

Nennen wir *Büschel, Bündel, Gebüsch* von (parallelen) Somen den Inbegriff aller Somen, die aus irgend einem Soma durch eine ein-, zwei-, dreigliedrige Gruppe von Schiebungen hervorgehen, so finden wir nunmehr unmittelbar eine analytische Darstellung dieser einfachsten von Somen gebildeten Mannigfaltigkeiten; die Büschel z. B. werden durch irgend zwei ihrer Elemente X', X'' mit Hülfe zweier scalarer Verhältnissgrössen $\sigma' : \sigma''$ ausgedrückt in der Form $X = \sigma' X' + \sigma'' X''$. Die Begriffe Büschel, Bündel, Gebüsch paralleler Somen sind also Analoga der Begriffe Büschel, Bündel paralleler eigentlicher Strahlen. — Indem wir noch die evidenten Bemerkungen hinzufügen, dass die Büschel, Bündel und Gebüsche von Somen in je ∞^7, ∞^6, ∞^3 Exemplaren vorhanden sind, und dass die ∞^6 Somen sich zu ∞^3 auf die ∞^3 Gebüsche vertheilen lassen, wenden wir uns zu dem wichtigsten der angeführten Sätze, dem, der durch die Gleichung (7) ausgedrückt wird.

---

*) Symmetrale Somen sind also immer auch hemisymmetral. Wir verkennen nicht das Missliche einer solchen Terminologie, haben aber keine bessere zur Verfügung.

Die synektische bilineare Gleichung (7) *unterscheidet sich nur durch die Zahl der Veränderlichen von der Gleichung zwischen dualen Strahlencoordinaten, die die Bedingung des rechtwinkligen Schneidens von zwei eigentlichen Strahlen darstellt, und nur durch das Auftreten dualer Grössen von der Gleichung, die die vereinigte Lage eines Punktes und einer Ebene im dreidimensionalen Continuum der projectiven Geometrie bezeichnet.*

Diese Thatsachen haben offenbar eine grundlegende Bedeutung:

*Es folgt, dass sich durch ein functionentheoretisches Problem ein besonderer Zweig der Geometrie definiren lassen muss, der die projective Geometrie des Raumes sammt der radial-projectiven Geometrie umfassen wird, und dessen Objecte die von Somen gebildeten Figuren, also die Gegenstände der theoretischen Kinematik eines starren Körpers sind**).

Die projectiven Transformationen der Somen.

Die zu stellende Aufgabe wird offenbar diese sein:

Es sollen alle analytischen Transformationen der Somen gefunden werden, die aus dem Inbegriff der zu irgend einem Soma symmetralen Somen stets wieder einen solchen Inbegriff hervorgehen lassen.

Natürlich müssen diese Transformationen, die wir *projective Transformationen der Somen* oder, mit einer ja etwas gewagten Wortbildung, *somatisch-projectiv* nennen werden, eine Gruppe bilden. Durch diese Gruppe und gewisse ihrer Untergruppen werden Aequivalenzbegriffe definirt sein, die zu dem elementaren Begriff der Congruenz geometrischer Figuren eine ähnliche Beziehung haben müssen, wie der Aequivalenzbegriff der projectiven Geometrie. Und es wird zu erwarten sein, dass, wie der letzte Aequivalenzbegriff, so auch mehrere von den neuen leichter zu handhaben sein werden als die etwas schwerfällige Aequivalenz der Elementargeometrie: Man wird die Objecte der Kinematik zu grösseren Classen zusammenfassen und so zu Eigenschaften dieser Gebilde vordringen können, die der elementaren Betrachtungsweise durch eine Menge von Einzelheiten verdeckt werden.

Das bezeichnete Problem lässt sich auf die entsprechende zur Definition der radial-projectiven Geometrie dienende Aufgabe zurück-

*) Offenbar kann man in ähnlicher Weise, wie wir es für *einen* starren Körper gezeigt haben, auch Systeme von mehreren Körpern darstellen, deren jeder sich in einer bestimmten Lage befindet. Unsere Methode erstreckt sich also auf die ganze Kinematik. Wir betrachten aber im Texte überall nur Lagen eines einzigen Körpers.

führen, und die Lösung hat auch eine vollkommen analoge Form. Da wir uns jedoch noch die weitere Frage vorzulegen gedenken, *wie denn diese Transformationen geometrisch construirt werden können*, so holen wir etwas weiter aus.

Wir bemerken zunächst, dass die Gruppe $\mathfrak{g}_7$ der Aehnlichkeitstransformationen eine ebenfalls siebengliedrige continuirliche Gruppe definirt, deren Object das Soma ist und deren Transformationen trivialer Weise die verlangte Eigenschaft haben. Eine Aehnlichkeitstransformation ordnet nämlich jedem der ∞^6 die verschiedenen Somen charakterisirenden rechtwinkligen Axenkreuze $(1, 2, 3)$ ein bestimmtes Axenkreuz $(1', 2', 3')$ derart zu, dass auf jeder der neuen Axen die ursprüngliche Längeneinheit in einem gewissen Verhältniss k geändert erscheint. Die neue Längeneinheit lässt sich dann wieder auf die ursprüngliche reduciren, indem man die zu dem Schnittpunkt der neuen Axen und zu dem Werthe k^{-1} gehörige perspective Aehnlichkeitstransformation ausführt. So entsteht ein neues System orientirter Axen, das aus dem ersten auch durch eine völlig bestimmte Bewegung abgeleitet werden kann. Das heisst, jedem Soma X wird ein anderes Soma X' eindeutig zugeordnet. Alle diese „Aehnlichkeitstransformationen der Somen" oder *somatischen Aehnlichkeitstransformationen* aber (die bereits einen für die Geometrie neuen Begriff darstellen) entstehen schon, wenn man die ∞^6 Bewegungen (mit Somen als Objecten) zusammensetzt mit der eingliedrigen Gruppe von perspectiven Aehnlichkeitstransformationen der Somen, die irgend ein Soma, z. B. das Protosoma, in Ruhe lassen. Man findet für die Transformationen der zuletzt genannten speciellen Gruppe die analytische Darstellung:

$$(8) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{X}'_0 = \mathfrak{X}_0, \quad \mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}'_{02} = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathfrak{X}'_{03} = \mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{X}'_{123} = k\mathfrak{X}_{123}, \quad \mathfrak{X}'_{23} = k\mathfrak{X}_{23}, \quad \mathfrak{X}'_{31} = k\mathfrak{X}_{31}, \quad \mathfrak{X}'_{12} = k\mathfrak{X}_{12} \end{gathered}$$

($k \neq 0$; vgl. S. 239, Nr. 10). —

Wir definiren sodann eine gewisse unendliche Gruppe von Transformationen der Somen durch die Forderung, dass die homogenen dualen Coordinaten des transformirten Soma homogene synektische Functionen der Coordinaten des zu transformirenden sein sollen. Unter diesen *synektischen Transformationen der Somen*, zu denen die soeben erklärten Aehnlichkeitstransformationen nicht gehören*), haben die im ganzen Somencontinuum definirten linearen

*) Beide Arten von Transformationen erzeugen zusammen eine neue Gruppe, in der die Gruppe der synektischen Transformationen offenbar invariant und so enthalten ist, dass die zugehörige Factorgruppe endlich und zwar eingliedrig wird.

$$(9)\qquad \begin{matrix} X_i' = \mathfrak{a}_{i0}X_0 + \mathfrak{a}_{i1}X_1 + \mathfrak{a}_{i2}X_2 + \mathfrak{a}_{i3}X_3 \\ \{\mathfrak{a}_{ix} = a_{ix} + \alpha_{ix}\cdot\varepsilon, \quad |a_{00}a_{11}a_{22}a_{33}| \neq 0\} \end{matrix} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

ebenfalls evidenter Weise die zuvor geforderte Eigenschaft. Sie bilden eine Gruppe mit 30 wesentlichen Parametern, analog der Gruppe der Collineationen im Raume; wir nennen ihre Transformationen daher *dual-projectiv*.

Nunmehr lässt sich die Lösung der gestellten Aufgabe kurz formuliren:

Alle projectiven Transformationen der Somen entstehen durch Zusammensetzung der dual-projectiven mit den Aehnlichkeitstransformationen der Somen. Sie bilden eine continuirliche Gruppe mit 31 wesentlichen Parametern, deren sämmtliche Transformationen im Continuum aller Somen überall wohldefinirt, eindeutig und stetig sind.

Die zugehörigen, den Gleichungen (5) auf Seite 237 vollkommen analogen Formeln bezeichnen wir hier mit Nr. (10), schreiben sie aber nicht besonders hin; dagegen wollen wir das System der invarianten Untergruppen unserer Gruppe noch kurz besprechen, und mit ihm die auf Seite 393 angeführten analogen Systeme zusammenstellen:

Aehnlichkeits-transformationen.	*Radiale Collineationen.*	*Somatische Collineationen.*
$\mathfrak{g}_7$	G_{17}	$\mathcal{G}_{31}$
$\mathfrak{g}_6$ $\mathfrak{g}_4$	G_{16} G_9	$\mathcal{G}_{30}$ $\mathcal{G}_{16}$
$\mathfrak{g}_3$	G_8	$\mathcal{G}_{15}$

Die Gruppen $\mathcal{G}_{31}$ und $\mathcal{G}_{30}$ sind die bereits erklärten. Die Gruppe $\mathcal{G}_{16}$ ist charakterisirt durch die Bedingungen $a_{ii} = a_{xx}$, $a_{ix} = 0 (i, x = 0, 1, 2, 3)$, bei den Transformationen von $\mathcal{G}_{15}$ ist ausserdem $k = 1$. Alle Transformationen von $\mathcal{G}_{16}$ lassen jedes einzelne Gebüsch paralleler Somen in Ruhe und vertauschen dessen Somen durch je eine perspective Aehnlichkeitstransformation. Geht diese bei *einem* Gebüsch in eine Schiebung über, so findet dies immer statt; die Transformation gehört dann der Untergruppe $\mathcal{G}_{15}$ an. Die Transformationen dieser letzten Gruppe sind synektisch und ausserdem vertauschbar. Sie heissen *dual-projective Schiebungen der Somen.* (Vgl. S. 235, Nr. 3.) Für jedes einzelne Gebüsch paralleler Somen reduciren sie sich, wie gesagt, auf gewöhnliche Schiebungen. Das Gleiche gilt überhaupt von der ähnlich zu definirenden unendlichen Gruppe der „synektischen Schiebungen", die deshalb besonders leicht der Behandlung zugänglich sind.

Analytische Mannigfaltigkeiten von Somen.

Wir betrachten jetzt irgend eine (reelle) analytische Schaar oder Mannigfaltigkeit von ∞^r Somen, oder also ein irreducibeles System analytischer Bedingungen, das einem starren Körper von bestimmter Lage gegen dieses System r Grade der Beweglichkeit (im Endlichen) lässt. Von den r wesentlichen Parametern, durch die man in der Umgebung einer (eben hierdurch gekennzeichneten) Stelle allgemeiner Lage ein solches Gebilde in mannigfacher Weise analytisch ausdrücken kann, wird dann eine gewisse Zahl ϱ auch noch für die Verhältnisse der Grössen $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_{01}$, $\mathfrak{X}_{02}$, $\mathfrak{X}_{03}$ wesentlich sein. Wir setzen $r = \varrho + \varrho'$ und bemerken, dass dann die ∞^r Somen sich auf ∞^ϱ Mannigfaltigkeiten von je $\infty^{\varrho'}$ parallelen Somen vertheilen lassen. Offenbar hat in den Fällen $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ die Zahl ϱ' mindestens den Werth 0, 0, 0, 1, 2, 3. Den Ueberschuss von ϱ' über diesen Minimalwerth nennen wir *Grad der Planarität* der vorgelegten Mannigfaltigkeit, und wir reden demgemäss auch von *aplanaren, uniplanaren, biplanaren* und *triplanaren* Somenschaaren.

Unter den genannten Mannigfaltigkeiten befinden sich nun einige Familien, die ein besonderes Interesse zu haben scheinen.

Es sei zunächst $\varrho = \varrho'$ und also r eine der Zahlen 2, 4, 6. Wenn dann (wie nothwendig im Falle $r = 6$) die dualen Coordinaten X_i eines veränderlichen Soma der Mannigfaltigkeit als synektische Functionen von ϱ ebenfalls dualen Parametern ausgedrückt werden können, so wollen wir die vorliegende Mannigfaltigkeit *synektisch* nennen.

Es erscheint nicht erforderlich, auf die analytischen Kriterien für die erklärten Eigenschaften einzugehen, da diese sehr leicht abzuleiten sind; nützlich aber dürfte es sein, die Brauchbarkeit der eingeführten Begriffe sogleich durch einige, übrigens ebenfalls sehr einfache, aber wichtige Anwendungen zu erläutern.

Jede aplanare analytische Mannigfaltigkeit von ∞^1 Somen liegt in einer einzigen zweidimensionalen synektischen Mannigfaltigkeit von Somen.

Jede aplanare analytische Mannigfaltigkeit von ∞^2 Somen liegt in einer einzigen vierdimensionalen synektischen Mannigfaltigkeit von Somen.

Wenn zwei aplanare analytische Mannigfaltigkeiten von je ∞^3 Somen nach irgend einem analytischen Gesetz ganz oder theilweise auf einander abgebildet sind, so giebt es eine einzige synektische Transformation der Somen, die (oder deren Entgegengesetzte) eben diese Abbildung bewirkt).*

*) Man beweist leicht entsprechende Sätze, die sich auf die Gruppe aller reellen und imaginären analytischen Punkttransformationen einer n-fach ausge-

Wir werden weiterhin einer Anzahl von besonderen Fällen dieser Sätze begegnen.

Wir betrachten ferner solche Mannigfaltigkeiten von ∞^r Somen, deren Coordinaten $x_0 \ldots x_{12}$ auf eine besonders einfache Art, nämlich als *lineare* homogene Functionen von $r+1$ (oder mehr) Parametern dargestellt werden können. Diese Figuren nennen wir *Somenketten*, und wir rechnen dazu auch die ∞^6 einzelnen Somen, als dem Falle $r=0$ entsprechend. Es gehören dahin z. B. die bereits betrachteten Büschel, Bündel und Gebüsche von Somen, die einzigen r-dimensionalen Somenketten, die im Grade r planar sind. Da zu erwarten ist, dass diese zwar natürlich sehr speciellen, aber bereits einen grossen Reichthum von Gestalten umfassenden Figuren verhältnissmässig leicht zugängliche geometrische Eigenschaften haben werden, so stellen wir die Aufgabe: *Die Somenketten mit Bezug auf die Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ (und die Gruppe $\mathcal{G}_{30}$) zu classificiren und die Ketten jeder einzelnen Classe durch geometrische Constructionen zu erzeugen.*

Die Lösung des ersten dieser Probleme gestaltet sich völlig conform den in § 29 angestellten Betrachtungen; sie erfolgt durch Darstellung der verschiedenen Arten von Somenketten durch je eine *Basis*. Wie dort, so hat man auch hier zu beachten, dass die Darstellung einer Kette durch linear auftretende Parameter nicht immer vollständig sein wird — dass sich vielmehr gewisse Somen der Kette ihr nothwendiger Weise entziehen können — ferner, dass die Zahl der für die Verhältnisse der Grössen $x_0 \ldots x_{12}$ wesentlichen Parameter nicht in allen Fällen die Dimension der zugehörigen Kette eindeutig bestimmt, und dass daher auch der Uebergang von einer Parameterdarstellung der Kette zu einer anderen ebenfalls linearen durchaus nicht immer nur durch lineare Substitutionen geschehen kann.

Wir schicken der Lösung der bezeichneten Aufgaben noch einige speciellere Betrachtungen voraus, die uns zunächst zur Construction der Transformationen (9) führen werden. *Eine r-dimensionale Kette wird weiterhin vielfach kurz als „eine C_r“ bezeichnet.*

Einfachste Reciprocitätsbeziehungen.

Es wird durch das Gesagte klar geworden sein, dass es zweckmässig ist, alle Somen doppelt zu setzen, das ganze Somencontinuum mit zwei Schichten, oder, wie wir hier sogleich sagen wollen, *Blättern*

---

dehnten Mannigfaltigkeit beziehen. Aehnliche Sätze bestehen übrigens auch bei anderen unendlichen Gruppen.

zu überdecken. Jede projective Transformation der Somen $X, Y, Z, \ldots$ des ersten Blattes bewirkt dann eine andere der Somen $U, V, W, \ldots$ des zweiten Blattes, die als zur ersten contragredient oder *discordant* zu bezeichnen sein wird. Oder man betrachtet besser noch diese Transformationen als identisch, aber angewendet auf verschiedene Objecte. Es ergeben sich dann genau wie in der Strahlengeometrie (S. 232 ff.) begriffliche Unterscheidungen zwischen (somatischen) Collineationen und Correlationen, dualen Collineationen und Anticollineationen u. s. w. Für den alle diese Begriffe umfassenden Begriff der somatischen Projectivitäten gilt ferner der charakteristische Satz:

Somatische Projectivitäten lassen invariant Parallelismus von Somen desselben Blattes und hemisymmetrale sowie symmetrale Lage von Somen verschiedener Blätter.

Unzerstörbar durch somatische Projectivitäten sind daher die in der folgenden selbstverständlichen Aussage vorkommenden Eigenschaften:

„Wenn von zwei Schaaren von Somen verschiedener Blätter jede aus allen Somen besteht, die zu den Somen der anderen Schaar symmetral oder hemisymmetral sind, so sind beide Schaaren Ketten."

Wir nennen diese zu Paaren geordneten Ketten, die sehr leicht zu bestimmen sind, zu einander *reciprok*, vorbehaltlich späterer Erweiterungen dieses Begriffs. Es giebt in jedem Blatt sechs (drei) Classen von gegenüber Collineationen verschiedenen Ketten, die auf die erste (zweite) Art mit Ketten des anderen Blattes gepaart sind, und im Ganzen vier (zwei) Classen von Paaren solcher reciproker Ketten, die gegenüber Collineationen *und* Correlationen verschieden sind.

Wir betrachten zuerst die durch symmetrale Lage ihrer Somen gepaarten Ketten.

Bei jedem Paar reciproker Ketten stellen wir, wie in § 29, eine canonische Form der Basis her, wobei wir uns aber nun einer weniger Raum einnehmenden Bezeichnungsweise bedienen wollen. Da nämlich in jeder Horizontalreihe einer solchen Basis immer nur eine der Einheiten $1, \varepsilon$ stehen wird, so brauchen wir nur die in den vier Verticalreihen im Ganzen vorkommenden Einheiten aufzuzählen. Die in [ ] beigefügten Zeichen beziehen sich auf die später auszuführende Classification sämmtlicher Ketten. Die Classen [2, C] und [4, C] enthalten zusammen mit [6] die einzigen synektischen Ketten.

$$[0]. \quad \begin{Bmatrix} 1 & & & \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{Bmatrix} \quad [4, C].$$

Es giebt in jedem Blatt des Somencontinuums ∞^6 synektische vierdimensionale Somenketten, oder, wie wir kürzer sagen wollen, ebene Ketten. Jede von diesen ist zu einem bestimmten Soma des anderen Blattes reciprok.

Durch irgend drei Somen U_1, U_2, U_3 (des zweiten Blattes), die nicht zu mehr als einem Soma symmetral sind, geht *eine* ebene Kette. Ist U irgend ein weiteres Soma dieser Kette, so ist stets

$$(11) \qquad (U_1 U_2 U_3 U) = 0,$$

und damit ist die Kette selbst und das reciproke Soma $X = \widehat{U_1 U_2 U_3}$ bestimmt*). Um es auch zu construiren, suche man zuerst die Bewegungen S_1, S_2, S_3 auf, die die drei Somen cyklisch vertauschen, so dass

$$U_1\{S_3\}U_2\{S_1\}U_3\{S_2\}U_1 \text{ **)}.$$

Sodann zerlege man diese Bewegungen derart in Umwendungen um drei Axen Y_1, Y_2, Y_3, dass

$$S_1 = \{Y_2, Y_3\}, \quad S_2 = \{Y_3, Y_1\}, \quad S_3 = \{Y_1, Y_2\}.$$

(Vgl. S. 8, 9.) Dann wird X construirt zufolge

$$(12) \qquad U_1\{Y_1\}X\{Y_2\}U_2\{Y_2\}X\{Y_3\}U_3\{Y_3\}X\{Y_1\}U_1 \text{ ***)}.$$

Die Construction ist bestimmt zugleich mit den Umwendungsaxen Y_1, Y_2, Y_3, und zwar tritt dies dann ein, wenn $\mathbf{S}(U_1 U_2 U_3 V)$ nicht identisch verschwindet. Liegt die entgegengesetzte leicht zu deutende Voraussetzung vor, so kommt man auf die sogleich zu erörternden Fälle.

$$[2, C]. \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 & & \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{Bmatrix} \quad [2, C].$$

Es giebt in jedem Blatt ∞^8 zweidimensionale synektische, oder, wie wir sagen werden, gerade Ketten, die paarweise reciprok sind.

Durch irgend zwei nicht parallele Somen geht *eine* gerade Kette. Hat eine gerade Kette mit einer ebenen C_4 zwei nicht parallele Somen gemein, so liegt sie ganz in der C_4. Die gerade Kette liegt auf ∞^2 ebenen Ketten und ist der vollständige Schnitt schon von zweien unter

*) Man vergleiche die auf Seite 126 und Seite 127, sowie auf Seite 313 ff. gebrauchten Abkürzungen.

**) Wir bedienen uns hier der bereits in § 1 angewendeten Wiener'schen Bezeichnungen.

***) Diese Construction und der durch sie bewiesene Satz rühren, soviel wir wissen, von Herrn C. Stephanos her.

diesen. Um die gerade Kette durch zwei gegebene Somen, und zugleich die reciproke Kette zu construiren, suche man die Bewegung S, die das erste Soma mit dem zweiten zur Deckung bringt. Die zweigliedrige Gruppe vertauschbarer Bewegungen, in der S enthalten ist, lässt dann beide Ketten in Ruhe, ihre Transformationen lassen also aus dem ersten Soma alle Somen der verbindenden Kette hervorgehen. Die Umwendungen um die ∞^2 (eigentlichen) Strahlen des Normalennetzes der gemeinsamen Axe aller dieser Bewegungen vertauschen die beiden reciproken Ketten. (Vgl. S. 10.) — Nur wenn die gegebenen Somen parallel sind, kann die Construction unbestimmt werden: Man kommt dann auf den nunmehr zu besprechenden Fall.

$$[1, \mathrm{B}]. \quad \left\{ {}^{1}_{\varepsilon} \;\; \varepsilon \;\; 0 \;\; 0 \right\}, \quad \left\{ 0 \;\; \varepsilon \;\; {}^{1}_{\varepsilon} \;\; {}^{1}_{\varepsilon} \right\} \quad [3, \mathrm{E}].$$

Dieser Fall umfasst $2 \cdot \infty^7$ *Paare reciproker Ketten. Zu jedem Büschel paralleler Somen ist nämlich eine bestimmte dreidimensionale Kette, oder also eine bestimmte* C_3, *reciprok.*

Um diese C_3 zu construiren, suche man den planaren Strahlencomplex, dessen Strahlen senkrecht sind zu der Richtung der Schiebungen, die das gegebene Büschel in Ruhe lassen. Die ∞^3 Umwendungen um die (eigentlichen) Strahlen dieses Complexes führen dann irgend ein Soma des Büschels in alle ∞^3 Somen der C_3 über.

Liegen drei Somen vor, die keine ebene Kette bestimmen, aber auch weder einem Bündel paralleler Somen, noch einer geraden Kette angehören, so geht durch sie *eine* C_3 der hier beschriebenen Art. Die Construction des reciproken Büschels ergiebt sich aus dem zuvor Gesagten. —

Jede der gefundenen C_3 ist Ort von ∞^1 Bündeln paralleler Somen und partieller Durchschnitt von ∞^1 ebenen Ketten, deren irgend zwei eine (unschwer näher zu bezeichnende) specielle gegenseitige Lage haben und die C_3 bestimmen. Ebenso gehen ∞^2 gerade Ketten, ∞^3 ebene Ketten und ∞^3 der beschriebenen C_3 durch das reciproke Büschel.

$$[2, \mathrm{D}]. \quad \left\{ \varepsilon \;\; \varepsilon \;\; {}^{1}_{\varepsilon} \;\; 0 \right\}, \quad \left\{ \varepsilon \;\; \varepsilon \;\; 0 \;\; {}^{1}_{\varepsilon} \right\} \quad [2, \mathrm{D}].$$

∞^6 *Paare reciproker Ketten: Zu jedem Bündel von (parallelen) Somen ist ein bestimmtes anderes reciprok.*

Leicht ergiebt sich die Construction des zu einem gegebenen Bündel reciproken. Beide gestatten nämlich dieselbe zweigliedrige Gruppe Euklidischer Schiebungen. Diese bestimmt ∞^1 Schiebungsrichtungen, zu denen eine bestimmte Richtung senkrecht ist, die ein Parallelenbündel definirt.

Alle Umwendungen um Strahlen dieses Bündels, und nur solche, vertauschen die reciproken Bündel paralleler Somen. — Durch jedes Bündel gehen ∞^2 synektische C_4 und ∞^2 der genannten speciellen C_3. —

Wir kommen nun zu den reciproken Ketten mit hemisymmetraler Lage ihrer Somen. Wir nennen diese Ketten, denen in der somatisch-projectiven Geometrie wegen ihrer sehr geringen Constantenzahl eine besondere Bedeutung zukommt, *ausgezeichnete Ketten.*

$$[3, \mathrm{F}]. \left\{\begin{matrix}1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix}\varepsilon & 1 & 1 & 1\\ & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\} [5, \mathrm{B}].$$

$2 \cdot \infty^3$ *Paare von ausgezeichneten Ketten. Die eine solche ist ein beliebiges Gebüsch von (parallelen) Somen, die andere die dazu reciproke* C_5.

Alle Somen der C_5 entstehen aus irgend einem Soma des Gebüsches durch die ∞^5 Umschraubungen. Wir können die bemerkenswerthe Geometrie in dieser Kette, die ein Analogon zu dem Begriff „Planarer Strahlencomplex" darstellt, hier nicht untersuchen, und bemerken darüber nur, dass in ihr ∞^2, ∞^5, ∞^6 Gebüsche, Bündel und Büschel von Somen liegen, ferner ∞^5 zu Büscheln reciproker C_3, und ∞^6, ∞^3 gerade und ebene Ketten. Jede ebene C_4 liegt in *einer* ausgezeichneten C_5, und diese entsteht aus der C_4 durch die Gruppe aller Schiebungen.

$$[4, \mathrm{D}]. \left\{\begin{matrix}1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon\\ & \varepsilon & & \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix}\varepsilon & \varepsilon & 1 & 1\\ & & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\} [4, \mathrm{D}].$$

Es giebt ∞^4 *Paare vierdimensionaler ausgezeichneter Ketten, die paarweise reciprok sind.*

Eine solche C_4 entsteht aus irgend einem Soma, wenn man es der viergliedrigen continuirlichen Gruppe von Bewegungen unterwirft, die eine bestimmte Richtung in Ruhe lassen. Aus demselben Soma entsteht dann die — zur selben Gruppe gehörige — reciproke C_4, wenn man darauf alle Umschraubungen um Strahlen des planaren Complexes anwendet, der durch jene Richtung eindeutig bestimmt ist oder also, alle Bewegungen, die die genannte Richtung umkehren. Jede Umschraubung um irgend einen Complexstrahl vertauscht beide C_4. Die Somen einer solchen C_4 sind auf ∞^2 gerade C_2 vertheilt; die reciproken C_2 erfüllen die reciproke C_4. Jede gerade Kette liegt in *einer* solchen C_4, und diese entsteht aus jener durch die Gruppe aller Schiebungen. —

Die principielle Bedeutung der ausgezeichneten Ketten ist leicht zu erkennen: Sie lassen sich, durchweg eindeutig oder „projectiv", den Punkten, Geraden und Ebenen im Raume zuordnen nach folgendem Schema, das wohl kaum noch einer Erläuterung bedarf:

Erstes Blatt	*Bildraum*	*Zweites Blatt*
Ausgezeichnete C_5.	Punkt.	Ausgezeichnete C_3.
Ausgezeichnete C_4.	Gerade.	Ausgezeichnete C_4.
Ausgezeichnete C_3.	Ebene.	Ausgezeichnete C_5.

Diese leicht auch constructiv herzustellende Zuordnung bringt den evidenten Isomorphismus der durch die „absolute Correlation“ $X' = U$, $U' = X$ zu einer sogenannten gemischten Gruppe erweiterten Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ zur Gruppe der Collineationen und Correlationen im Raume zum Ausdruck.

Tragweite der vorausgehenden Überlegungen.

Eine unmittelbare Folge der angestellten Betrachtungen ist u. A. der Satz:

Die somatisch-projective Geometrie in einer geraden oder ebenen Kette ist identisch mit der radial-projectiven Geometrie im Normalennetz eines eigentlichen Strahls oder im Continuum aller eigentlichen Strahlen.

Unterwirft man nämlich irgend ein Soma allen Umwendungen, so ist damit die entstehende C_4 eindeutig-umkehrbar auf das Continuum der Umwendungsaxen abgebildet, und den Somenketten in der C_4 entsprechen Strahlenketten, und umgekehrt*). Vertauscht man die Somen der C_4 unter einander somatisch-projectiv, so werden gleichzeitig die ihnen zugeordneten Strahlen radial-projectiv vertauscht.

Es zeigt sich nunmehr z. B., worin die dualen von den übrigen somatischen Projectivitäten sich unterscheiden: Irgend vier in eine bestimmte Reihenfolge gebrachte Somen einer geraden Kette haben ein bestimmtes *duales Doppelverhältniss*, falls keine zwei von ihnen parallel sind. (Vgl. S. 242.) Dieses bleibt nur bei dualen Projectivitäten erhalten (S. 243). Es hat daher der folgende wohl auch ohne eine umständliche Erklärung deutliche Satz einen geometrischen Inhalt:

Die synektischen sind die analytischen Transformationen der Somen, die im Infinitesimalen dual-projectiv sind.

Es ergiebt sich ferner der Satz:

Irgend fünf Somen $X_0 \ldots X_4$, deren keine vier einer fünfdimensionalen ausgezeichneten Kette angehören, lassen sich (der Reihe nach) mit fünf anderen $Y_0 \ldots Y_4$ ($U_0 \ldots U_4$) von derselben Beschaffenheit durch eine einzige duale Collineation (Correlation) zur Deckung bringen.

---

*) Alle r-dimensionalen von eigentlichen Strahlen gebildeten Ketten sind S. 326 ... 327 zusammengestellt. Die dort mit Sternen bezeichneten zur Ergänzung der Theorie hinzugefügten „Ketten“ sind im Texte natürlich nicht gemeint.

Und überdies kann man diese somatische Projectivität nicht nur sehr leicht analytisch ausdrücken (vgl. S. 246), sondern auch beinahe eben so leicht, wenn auch nicht ganz so kurz, *geometrisch construiren* (vgl. S. 245).

Es ist nunmehr klar, dass man jedem eine bestimmte Construction ausdrückenden Satz der projectiven Geometrie des Raumes einen entsprechenden Satz der viel umfassenderen somatisch-projectiven Geometrie an die Seite stellen kann. Aber es ist auch klar, dass solche zusammengehörige Sätze durchaus *nicht* eine gleichlautende Form zu haben brauchen*), und dass ausserdem in der Regel der somatisch-projective Satz mit einer Reihe von Einschränkungen behaftet sein wird, die in dem einfacheren Falle nicht nöthig sind (übrigens *mechanisch* immer dann gefunden werden können, wenn der einfachere Satz exact formulirt vorliegt). Auch leuchtet ein, dass mit derartigen Erweiterungen bekannter Sätze der Stoff der somatisch-projectiven Geometrie nicht im Entferntesten erschöpft wird, ja dass vielleicht die interessanteren Erscheinungen gerade ausserhalb dieses Gedankenkreises zu suchen sein werden. Aber bei alledem haben wir doch eine sehr brauchbare Methode in der Hand, die das Auffinden neuer Gesetzmässigkeiten ganz ungemein erleichtern wird.

Classification und Construction der Ketten.

Wir zählen nun sämmtliche Ketten geordnet nach ihren Dimensionenzahlen auf, und geben bei den noch nicht besprochenen geometrische Constructionen an, die entweder gleich alle Individuen einer Classe, oder, was nach der vorausgehenden Darlegung ausreichend ist, von jeder Classe Repräsentanten liefern. Die Basis wählen wir, wie auch zuvor schon, in jedem Falle möglichst umfassend. Es zeigt sich, dass Ketten mit absoluten Invarianten gegenüber $\mathcal{G}_{30}$ nicht existiren, und dass alle gegenüber $\mathcal{G}_{30}$ nicht-äquivalenten Ketten auch gegenüber Transformationen von $\mathcal{G}_{31}$ von einander verschieden bleiben. Alle Ketten können als Grenzfälle der aplanaren aufgefasst werden, die in den Fällen

$$r = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5$$

von

$$11, \quad 14, \quad 15, \quad 14, \quad 11$$

Constanten abhängen.

Wir bemerken noch, dass man eine Somenkette immer auch dann

*) Man beachte, dass ein Product dualer Grössen verschwinden kann, ohne dass die einzelnen Factoren verschwinden.

erhält, wenn man ein einzelnes Soma allen Umschraubungen oder allen Schraubungen um die Strahlen einer Strahlenkette unterwirft.

[0]. *Nulldimensionale Ketten.*

$\left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ 0\ 0\ 0\right\}$ ∞^6. Das einzelne Soma.

[1]. *Eindimensionale Ketten.*

A. $\{1\ 1\ 0\ 0\}$ ∞^{11}.

Jede aplanare C_1 kann auf ∞^2 Arten durch Umwendung eines Soma um die Strahlen einer Strahlenkette erzeugt werden. Sie liegt in einer einzigen geraden Kette. Ist die erzeugende Strahlenkette ein ebenes Büschel, so gestattet die C_1 alle Drehungen um dessen Hauptaxe. Die verschiedenen zur Construction brauchbaren Strahlenketten (∞^2, oder, bei den genannten *Rotationsketten*, ∞^1) sind alle coaxial und unter einander congruent.

B. $\left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ \varepsilon\ 0\ 0\right\}$ ∞^7.

Natürlich können diese planaren C_1 oder Büschel auch durch Umwendungen mit Hülfe von Parallelenbüscheln aus einem einzelnen Soma (das in der reciproken C_3 liegt) abgeleitet werden; diese Parallelenbüschel bilden je ein Netz. (S. 404.)

[2]. *Zweidimensionale Ketten.*

A. $\{0\ 1\ 1\ 1\}$ ∞^{14}.

Jede aplanare C_2 liegt in einer einzigen ebenen Kette und entsteht auf eine einzige Weise aus dem zu dieser reciproken Soma, indem man es den Umwendungen um alle Strahlen einer *aplanaren* Kettencongruenz unterwirft.

B. $\{0\ \varepsilon\ 1\ 1\}$ ∞^{12}.

Die uniplanaren nicht-synektischen C_2. Jede wird durch Umwendungen erzeugt, aber auf ∞^1 Arten, und mit Hülfe je einer *planaren* Kettencongruenz.

C. $\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\ 0\ 0\right\}$ ∞^8.

Die besprochenen synektischen C_2 oder geraden Ketten, die mit Hülfe von je einem Normalennetz durch Umwendung aus irgend einem von ∞^2 Somen (der reciproken C_2) entstehen.

D. $\left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ 0\ \varepsilon\ \varepsilon\right\}$ ∞^6.

Die schon erörterten Bündel, die paarweise reciprok sind.

[3]. *Dreidimensionale Ketten.*

A. $\{1\ 1\ 1\ 1\}$ ∞^{15}.

Die aplanaren C_3, die die höchste bei einer Somenkette mögliche Constantenzahl 15 haben, erfreuen sich besonders schöner Eigenschaften. *Eine* solche Kette geht durch fünf Somen, von denen keine vier einer ausgezeichneten C_5 angehören, und diese Kette kann, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, geometrisch construirt werden. Jede solche C_3 hat in jedem Gebüsch von Somen *ein* Soma, und jede kann in jede andere durch *eine* dual-projective Schiebung übergeführt werden. Die ganze Theorie der geometrischen Addition aplanarer Kettencongruenzen (S. 390 u. ff.), mit allen daran geknüpften Folgerungen, lässt sich auf diese Somenketten ausdehnen. Z. B. ist jede dieser Ketten ein abgeschlossenes Continuum, und jede ist Trägerin eines quaternären Gebietes. Jede gestattet eine 15-gliedrige einfache Gruppe dualer Collineationen, die (d. h. deren discordante) zugleich eine zweite Kette derselben Art, die dem anderen Blatte angehörige *„reciproke"* Congruenz in Ruhe lassen. Die Vertheilung der Ketten niederer Dimension, und zugleich die Art, wie die beiden reciproken Ketten einander wechselweise bestimmen, wird am bequemsten durch gleichzeitige Abbildung beider Ketten auf den gewöhnlichen Raum der projectiven Geometrie dargestellt:

C_3 *im ersten Blatt.*	*Bildraum.*	C_3 *im zweiten Blatt.*
Soma.	Punkt.	Aplanare C_2.
Aplanare C_1.	Gerade.	Aplanare C_1.
Aplanare C_2.	Ebene.	Soma.

In der ersten und dritten Colonne gegenüberstehende Somen sind symmetral. Hieraus ergiebt sich sofort die Construction der reciproken Kette. In der gewählten canonischen Form fallen die beiden reciproken C_3 zusammen; die zugehörigen ∞^4 C_1 sind sämmtlich Rotationsketten. — Um eine solche specielle aplanare C_3 zu finden, hat man nur irgend ein Soma den Bewegungen (Drehungen) der dreigliedrigen Gruppe zu unterwerfen, die einen eigentlichen Punkt in Ruhe lässt. Solcher specieller C_3, die eine besonders für die Mechanik wichtige Art von Ketten bilden, giebt es ∞^6.

B. $\{\varepsilon\ 1\ 1\ 1\}$ ∞^{14}.

Es sind dies alle uniplanaren nicht in ebenen Ketten enthaltenen C_3. Jede liegt in einer bestimmten ausgezeichneten C_5. Jedes Soma des zu dieser reciproken Gebüsches kann in alle Somen der C_3 entweder durch gewisse Umschraubungen ausgeführt werden, deren Axen einen Ketten-

complex erfüllen, oder durch alle Umschraubungen, deren Axen eine aplanare Kettencongruenz erfüllen, und zwar unabhängig von der Auswahl des Soma im Gebüsch. Specielle der besprochenen C_3, nämlich ihrer ∞^{11}, lassen sich daher dadurch herstellen, dass man ein Soma allen Umschraubungen um Strahlen einer aplanaren Kettencongruenz unterwirft, und zwar kann jede von diesen C_3 auf ∞^3 Arten so erzeugt werden. Unter diesen besonderen C_3 finden sich ∞^6 noch speciellere, die mit Hülfe von Strahlenbündeln construirt werden können, und diese C_3 können auf eine anschaulichere Weise z. B. auch dadurch gefunden werden, dass man irgend ein Soma allen Spiegelungen an Ebenen des Raumes unterwirft. (Vgl. S. 183 und S. 560.) Es treten bei der hiermit gegebenen Abbildung der C_3 auf die eigentlichen Ebenen die in den C_3 enthaltenen Ketten niederer Dimension sehr einfach in Evidenz.

Die besprochenen Ketten C_3 sind paarweise zu einander *„reciprok"*. Eine solche Kette enthält nämlich ∞^2 uniplanare C_2, zu deren Somen die je eines Büschels paralleler Somen symmetral sind. Diese ∞^2 Büschel erfüllen die reciproke C_3, aus der die erste durch den nämlichen Process entsteht. In dem angeführten Beispiel fallen die beiden reciproken C_3 zusammen, und zwei in ihnen gelegene Somen sind dann symmetral, wenn die zugehörigen Ebenen auf einander senkrecht stehen.

C. $\left\{0 \ \frac{1}{\varepsilon} \ 1 \ 1\right\}$ ∞^{13}.

Jede dieser uniplanaren C_3 liegt in einer ebenen Kette, und entsteht aus dem zu dieser reciproken Soma durch die Umwendungen um Strahlen eines (aplanaren) Kettencomplexes. Dem singulären Strahl dieses Complexes entspricht ein „singuläres" Soma in der C_3. Die in einem Bündel liegenden vom singulären Soma verschiedenen, aber zu ihm parallelen Somen der C_3 entziehen sich der Darstellung durch linear auftretende Parameter*).

Die C_3 enthält ∞^1 gerade Ketten, die sich im singulären Soma durchdringen. Die zu diesen C_2 reciproken C_2 beschreiben eine neue C_3, gelegen in der zum singulären Strahl reciproken ebenen Kette; wir nennen diese C_3, die in der canonischen Form durch

$$\left\{\frac{1}{\varepsilon} \ 0 \ 1 \ 1\right\}$$

dargestellt wird, zur ersten *reciprok*.

D. $\{1 \ 1 \ \varepsilon \ \varepsilon\}$ ∞^{11}.

*) Aehnliche Singularitäten haben auch mehrere der später aufzuzählenden Ketten.

Die Vertheilung der Ketten niederer Dimension in dieser biplanaren C_3 kann ähnlich wie unter B. durch Abbildung ihrer Somen auf Ebenen (oder Punkte) eines R_3 veranschaulicht werden. Den Ebenen eines gewissen Büschels entsprechen dabei keine Somen. Die C_3 enthält u. A. ∞^1 Bündel paralleler Somen, und die zu diesen reciproken Bündel erfüllen die zur vorgelegten *„reciproke“* C_3, die im angeführten Falle zur nämlichen Basis gehört.

Ein specielles Paar reciproker, nämlich zusammenfallender C_3 der vorliegenden Classe entsteht, wenn man irgend ein Soma der dreigliedrigen Gruppe von Bewegungen unterwirft, die die parallelen Ebenen eines Büschels einzeln in Ruhe lassen. Umfassender, aber ebenfalls noch nicht erschöpfend, ist eine Erzeugung von C_3 der besprochenen Classe mit Hülfe der Umschraubungen eines Somas um die Strahlen einer planaren Kettencongruenz.

E. $\left\{0 \quad \varepsilon \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{matrix}\right\}$ ∞^7.

Die schon besprochenen zu Büscheln reciproken biplanaren C_3.

F. $\left\{\begin{matrix} 1 \\ \varepsilon \end{matrix} \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon\right\}$ ∞^3.

Die triplanaren C_3, die Gebüsche oder dreidimensionalen ausgezeichneten Ketten.

[4]. *Vierdimensionale Ketten.*

Bei den folgenden Ketten sehen wir der Kürze halber von der Angabe gewisser Erzeugungsarten ab, die nach dem Muster von bereits vorgeführten Constructionen sich finden lassen, und theilen nur noch Constructionen mit, die auf einer in jedem Falle nachweisbaren „Reciprocität“ dieser Ketten zu solchen beruhen, die bereits construirt sind.

A. $\left\{\begin{matrix} 1 \\ \varepsilon \end{matrix} \quad 1 \quad 1 \quad 1\right\}$ ∞^{14}.

Die aplanaren C_4. Sie sind *reciprok* zu den aplanaren C_2. Jede solche enthält nämlich ∞^2 aplanare C_1, diese liegen in je einer synektischen C_2 oder geraden Kette, und deren reciproke erfüllen die C_4.

B. $\left\{\begin{matrix} 1 \\ \varepsilon \end{matrix} \quad \varepsilon \quad 1 \quad 1\right\}$ ∞^{12}.

Die uniplanaren nicht synektischen C_4. Sie sind *reciprok* zu den uniplanaren nicht synektischen C_2. Jede solche enthält nämlich ∞^1 planare C_1; die zu diesen reciproken C_3 erfüllen die C_4.

C. $\left\{0 \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{matrix}\right\}$ ∞^6.

Die synektischen C_4 oder ebenen Ketten, die zu den einzelnen Somen reciprok sind.

D. $\left\{\begin{matrix}\varepsilon & \varepsilon & 1 & 1\\ & & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\}$ ∞^4.

Die biplanaren oder ausgezeichneten C_4, die paarweise zu einander reciprok sind.

[5]. *Fünfdimensionale Ketten.*

A. $\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ & & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\}$ ∞^{11}.

Die aplanaren C_5 sind *reciprok* zu je einer aplanaren C_1. Die C_5 entsteht aus dieser, indem man deren Somen allen ∞^4 Umwendungen unterwirft, und wird also von ∞^1 ebenen Ketten beschrieben.

B. $\left\{\begin{matrix}\varepsilon & 1 & 1 & 1\\ & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\}$ ∞^7.

Die planaren oder ausgezeichneten C_5, die reciprok sind zu den Gebüschen paralleler Somen.

[6]. *Die sechsdimensionale Kette.*

$\left\{\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\right\}$, ∞^0. Die Gesammtheit der Somen, eine synektische Kette.

Es hat sich also herausgestellt, dass sich bei allen Ketten geometrische Erzeugungsweisen angeben lassen, und bei den meisten sogar solche von sehr einfacher Beschaffenheit.

Die auf im Ganzen zwanzig Classen vertheilten Somenketten werden nun in ähnlicher Weise genauer untersucht werden können, wie wir die Strahlenketten untersucht haben.

Das Reciprocitätsgesetz der Ketten und seine Erweiterung.

In den vorausgehenden Erörterungen liegt ein Satz, der als *äusserst merkwürdig* bezeichnet werden darf, besonders angesichts des Umstandes, dass wir den darin vorkommenden Begriff der Reciprocität in den einzelnen Fällen auf sehr verschiedenartige Weise erklärt haben.

Sieht man vom Inbegriff aller Somen ab, so kann man jeder Somenkette des ersten Blattes eine des zweiten derart gegenüberstellen, dass je zwei zusammengehörige oder „reciproke" Ketten einander wechselweise bestimmen durch eine geometrische Construction, die invariant ist gegenüber somatischen Projectivitäten.

Die Dimensionenzahlen auf diese Art gepaarter Ketten ergänzen einander zu einer der Zahlen 4, 6, 8.

Die den Dimensionensummen vier und acht entsprechenden Paare von Ketten haben wir bereits übersichtlich angeordnet (S. 565—567). Die übrigen seien hier zusammengestellt:

$$[1A]\ \{0\ 0\ 1\ 1\}\ 2\cdot\infty^{11}\ \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ \varepsilon & \varepsilon\end{matrix}\ 1\ 1\right\}\ [5A],$$

$$[2A]\ \{0\ 1\ 1\ 1\}\ 2\cdot\infty^{14}\ \left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ 1\ 1\ 1\right\}\ [4A],$$

$$[2B]\ \{0\ \varepsilon\ 1\ 1\}\ 2\cdot\infty^{12}\ \left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ \varepsilon\ 1\ 1\right\}\ [4B],$$

$$[3A]\ \{1\ 1\ 1\ 1\}\ \infty^{15}\ \{1\ 1\ 1\ 1\}\ [3A],$$

$$[3B]\ \{\varepsilon\ 1\ 1\ 1\}\ \infty^{14}\ \{\varepsilon\ 1\ 1\ 1\}\ [3B],$$

$$[3C]\ \left\{0\ \begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ 1\ 1\right\}\ \infty^{13}\ \left\{\begin{matrix}1\\ \varepsilon\end{matrix}\ 0\ 1\ 1\right\}\ [3C],$$

$$[3D]\ \{1\ 1\ \varepsilon\ \varepsilon\}\ \infty^{11}\ \{1\ 1\ \varepsilon\ \varepsilon\}\ [3D].$$

Giebt es nun nicht eine tiefer gehende Begründung für diese gewiss auffallenden Beziehungen? Die Antwort lautet ganz ähnlich wie bei der entsprechenden Frage der Strahlengeometrie, die wir summarisch erörtert haben (S. 410 u. ff.):

Alle Ketten lassen sich auf die eine oder andere Art als geometrische Oerter von Bündeln paralleler Somen auffassen. Die reciproken Ketten entsprechenden Oerter werden dann von reciproken Bündeln beschrieben und erhalten also auf diese Weise die gleiche Dimensionenzahl.

Zur richtigen Auffassung dieser Behauptung muss man beachten, dass eine Kette auf mehrere Arten Oerter von Somenbündeln bestimmen kann, die dann nicht alle auch zur Erklärung der Kette brauchbar sein werden.

Das nachgewiesene Reciprocitätsgesetz erstreckt sich offenbar weit über die Geometrie der Ketten hinaus. Denn natürlich kann man principiell das Somenbündel als Raumelement einführen, in ähnlicher Weise, wie wir es bei dem analogen Begriff des Parallelenbüschels gezeigt haben (§ 34). Ja man kann diese Figur auch in ganz gleicher Weise wie jene durch ein System „homogener" Coordinaten Ω; $\Xi_0 \ldots \Xi_3$, $\Phi_0 \ldots \Phi_3$ darstellen, von denen die acht letzten durch eine bilineare Gleichung verbunden sind. Oerter von Somen werden jetzt auf ähnliche Art gepaart, wie zuvor Oerter von Strahlen; und man kann auch analytische Transformationen der gepaarten Bündel untersuchen, die dann die Dimensionen von Somenmannigfaltigkeiten in der Regel ändern werden. Diese Transformationen bilden eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen im Somencontinuum.

Das der gewöhnlichen projectiven Geometrie angehörige sogenannte Princip der Dualität ist von der hier besprochenen Art der Reciprocität geometrischer Figuren ein specieller Fall.

Wir müssen uns mit dieser Andeutung über einen reizvollen, aber wohl nicht ganz leicht und jedenfalls nicht kurz zu behandelnden Gegenstand begnügen.

Das Parasoma.

Bis hierher haben wir den Begriff des Soma so umgrenzt, dass er sich mit dem Grundbegriff der Kinematik, nämlich dem Begriff der Lage eines starren Körpers im Euklidischen Raume, vollkommen deckt. Wiewohl wir nun in der projectiven Geometrie der Somen erst wenige Schritte gethan haben, so sind wir doch schon genöthigt gewesen, gerade einem wichtigen unter den aufgestellten Sätzen eine Einschränkung hinzuzufügen, die nicht in der analytischen Natur des Stoffes, sondern in der Begrenztheit des bezeichneten Standpunktes und einer gewissen Unvollkommenheit der angewendeten Hülfsmittel ihren Ursprung hat. Es ist klar, dass man zu manchen tiefer liegenden und allgemeineren Sätzen nur dann wird vordringen können, wenn man die Somenmannigfaltigkeit zu einem abgeschlossenen und invarianten algebraischen, oder wie wir hierfür sagen, *natürlichen Continuum* ergänzt, und gleichzeitig „imaginäre“ Somen einführt. Wir wollen nur den ersten Punkt und auch diesen nur theilweise besprechen. Wir werden einen neuen Begriff erklären, den wir *Parasoma* nennen. *Die bisher Somen schlechthin genannten Figuren nennen wir nunmehr eigentliche Somen, und wir brauchen das Wort Soma selbst fernerhin für die eigentliche und Parasomen zusammen.*

Wir gehen zunächst von den bisher verwendeten Coordinaten „erster Art“ eines eigentlichen Soma zu solchen „zweiter Art“ über, die wie folgt erklärt sind:

(13)

$$\mathscr{X}_0 = \mathfrak{X}_0, \quad \mathscr{X}_1 = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathscr{X}_2 = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathscr{X}_3 = \mathfrak{X}_{03},$$

$$\mathscr{X}_{01} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_{01} \\ \mathfrak{X}_{123} & \mathfrak{X}_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathscr{X}_{02} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_{02} \\ \mathfrak{X}_{123} & \mathfrak{X}_{31} \end{vmatrix}, \quad \mathscr{X}_{03} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_{03} \\ \mathfrak{X}_{123} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix},$$

$$\mathscr{X}_{23} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{03} \\ \mathfrak{X}_{31} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix}, \quad \mathscr{X}_{31} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{01} \\ \mathfrak{X}_{12} & \mathfrak{X}_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathscr{X}_{12} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{01} & \mathfrak{X}_{02} \\ \mathfrak{X}_{23} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix}.$$

Jetzt ergiebt sich, zunächst analytisch definirt, der neue Begriff des Parasomas in ähnlicher Weise, wie in der Strahlengeometrie der Begriff des Punktstrahls (S. 258 u. ff.): Das Parasoma wird erklärt

durch die bis jetzt ausgeschlossen gebliebenen Coordinaten zweiter Art, die den Gleichungen $\mathfrak{X}_i = 0$ und

$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0 \tag{14}$$

genügen. Sogleich folgt, dass die Mannigfaltigkeit aller ∞^6 eigentlichen Somen und ∞^4 Parasomen ein *abgeschlossenes Continuum* bildet, das eindeutig-umkehrbar, ohne irgend welche Ausnahmestellen, abbildbar ist z. B. auf eine algebraische Punktmannigfaltigkeit M_6, die in einen ebenen Raum von 15 Dimensionen verläuft, und eine mit $\mathcal{G}_{31}$ holoëdrisch-isomorphe projective Gruppe gestattet (vgl. S. 278 u. ff., sowie § 32), übrigens erschöpfend als partieller Schnitt quadratischer Mannigfaltigkeiten dargestellt werden kann. Endlich ist zu bemerken, dass gegenüber den somatischen Collineationen die Parasomen ersten und zweiten Blattes sich genau wie die Geraden im Plücker'schen Liniencontinuum verhalten, und dass daher die Coordinaten der Parasomen beider Blätter contragredient transformirt werden.

Welcher geometrische Begriff — analog dem zum „Punktstrahl" gehörigen Parallelenbündel der radial-projectiven Geometrie — wird nun mit dem erklärten analytischen Begriff des Parasomas zu verbinden sein?

Die Antwort auf diese Frage ergiebt sich genau so wie in dem zur Erleichterung des Verständnisses erwähnten einfacheren Falle. Wir betrachten die ebene Kette, die zu einem eigentlichen Soma $\mathfrak{X}$ reciprok ist und also alle zu $\mathfrak{X}$ symmetralen eigentlichen Somen $\mathfrak{U}$ enthält. Wir lassen nun $\mathfrak{X}$ so ins Unendliche rücken, dass ein bestimmtes Parasoma daraus entsteht, und erhalten im Grenzfall die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&* \quad - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{U}_3 = 0,\\
&\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{U}_0 \quad * \quad - \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{U}_3 = 0,\\
&\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{U}_0 + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{U}_1 \quad * \quad - \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{U}_3 = 0,\\
&\mathfrak{X}_{03}\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{U}_2 \quad * \quad = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Diese bestimmen aber offenbar eine ausgezeichnete C_4 (die in der durch die erste Gleichung allein dargestellten ausgezeichneten C_5 gelegen ist). *Wir können also sagen, die Somen jeder vierdimensionalen ausgezeichneten Kette seien zu einem bestimmten Parasoma (des anderen Blattes) „symmetral".* Zu der in dieser Erweiterung des Begriffs „symmetral" liegenden Beantwortung der aufgeworfenen Frage kommt man übrigens auch unschwer durch eine geometrische Betrachtung. — Die weitere Consequenz ist nunmehr, dass irgend zwei Parasomen (verschiedener Blätter) zu einander *„symmetral"* zu nennen sind. Als mindestens *doppelt-symmetral* werden wir sie bezeichnen, wenn jedes

der gehörig ergänzten ausgezeichneten C_4 angehört, die durch das andere bestimmt wird. Dies tritt dann ein, wenn jede der beiden C_4 mit der reciproken der anderen ein Gebüsch gemein hat, oder wenn die entsprechenden Geraden des Liniencontinuums einander schneiden:

(16)

$$\mathfrak{X}_{01}\,\mathfrak{U}_{01} + \mathfrak{X}_{02}\,\mathfrak{U}_{02} + \mathfrak{X}_{03}\,\mathfrak{U}_{03} + \mathfrak{X}_{23}\,\mathfrak{U}_{23} + \mathfrak{X}_{31}\,\mathfrak{U}_{31} + \mathfrak{X}_{12}\,\mathfrak{U}_{12} = 0.$$

Dreifach-symmetral endlich werden wir zwei Parasomen dann nennen, wenn die zugehörigen C_4 zu einander reciprok sind, oder wenn die entsprechenden Geraden zusammenfallen:

(17)
$$\mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12} =$$
$$= \mathfrak{U}_{23} : \mathfrak{U}_{31} : \mathfrak{U}_{12} : \mathfrak{U}_{01} : \mathfrak{U}_{02} : \mathfrak{U}_{03}.$$

(Vgl. S. 263.) Alle diese Beziehungen sind invariant gegenüber $\mathcal{G}_{31}$. — Wir verfolgen solche Betrachtungen nicht weiter, sondern heben nunmehr das Wesentlichste davon in folgenden Sätzen hervor:

Die Mannigfaltigkeit der ∞^6 eigentlichen Somen wird durch Hinzufügung der ∞^4 Parasomen zu einem in Bezug auf die Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ natürlichen Continuum ergänzt. Die einzelnen Stellen dieses Continuums sind eindeutig-umkehrbar zugeordnet den ∞^6 vierdimensionalen synektischen (ebenen) Ketten und den ∞^4 vierdimensionalen ausgezeichneten Ketten.

Die somatisch-projective Geometrie reducirt sich, wenn nur Parasomen betrachtet werden, auf die Plücker'sche Liniengeometrie. (Vgl. S. 568.)

Erwähnung verdient vielleicht noch der Umstand, dass erst drei Somen, die zu einem Parasoma symmetral sind, eine specielle Lagenbeziehung haben müssen, während das Entsprechende in der Strahlengeometrie schon bei zwei Strahlen eintritt. — Einige wichtige Folgerungen liegen ferner in folgenden Sätzen:

Der für die eigentlichen Figuren bereits nachgewiesene Zusammenhang zwischen der somatisch-projectiven Geometrie in einer ebenen Kette und der radial-projectiven Geometrie im Strahlencontinuum erstreckt sich auch auf die Ergänzungen dieser Continua durch Parasomen und Punktstrahlen.

Beim Uebergang von einem veränderlichen eigentlichen Soma zu einem bestimmten Parasoma zerfällt die zu dem Soma reciproke ebene Kette in die dem Parasoma zugeordnete ausgezeichnete Kette und in das Continuum aller Parasomen.

Wir werden von dem Parasoma in der vorliegenden Skizze weiter keinen Gebrauch zu machen haben; ganz übergehen mochten wir diesen Grundbegriff indessen nicht.

Gruppentheoretisches.

Führt man irgend eine Art nicht ausgezeichneter Ketten als Raumelement ein, so erhält man stets eine zur Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ *holoëdrisch*-isomorphe Gruppe, die in mannigfacher Weise als projective Gruppe dargestellt werden kann. Auf einige besonders interessante unter diesen Gruppen beziehen sich die folgenden Sätze:

Führt man die dreidimensionalen aplanaren Somenketten als Raumelemente ein, so entsteht aus $\mathcal{G}_{31}$ eine primitive Gruppe des Raumes R_{15}, die bei geeigneter Coordinatenwahl als projective Gruppe erscheint und dann identisch wird mit einer Gruppe, die aus der Adjungirten der allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes durch einen gewissen Erweiterungsprocess abgeleitet werden kann. (Vgl. S. 393 u. ff.)

Correlativ zu dieser Gruppe ist eine andere Gruppe, zu der man gelangt, wenn man die Somenbündel auf eine geeignet gewählte Punktmannigfaltigkeit M_6' abbildet. (Vgl. S. 420 u. ff.)

Bemerkenswerth ist ferner, dass nicht nur im Raume R_6 zwei wesentlich-verschiedene Gruppen von der Zusammensetzung der Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ sich nachweisen lassen, sondern auch im Raume R_7. Eine von diesen letzten erhält man durch Einführung der Somenbüschel oder der zu diesen reciproken Ketten; die andere ist in einer Gruppe mit 32 Parametern enthalten, die vollkommen analog ist zu der auf Seite 240 erörterten Gruppe Γ_{18}. Dies führt uns zu einer ohnehin nahe liegenden Frage:

Lässt sich eine geometrische Figur nachweisen, die sich zu dem Soma ähnlich verhält, wie das Gewinde zum Strahl?

Hierauf lässt sich eine bejahende Antwort finden; es giebt sogar (wenigstens) zwei solche Figuren, die von sieben Constanten abhängen, und durch acht homogene Coordinaten darzustellen sein werden. Zu einer von diesen, die etwa als „Hypersoma“ bezeichnet werden kann, kommt man, wenn man bemerkt, dass die Gruppe der Bewegungen durch die mit ihnen vertauschbaren Dilatationen zu einer siebengliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen erweitert wird, und dass auch diese noch durch unsere Parameter (α, β), unter Benutzung der gleichen Formeln für deren Zusammensetzung, dargestellt werden kann*). An Stelle der Punkte des einzelnen Soma treten im Hyper-

*) Mit Hülfe von Systemen complexer Grössen, die die Quaternionen enthalten, kann man noch eine Reihe umfassenderer Gruppen *bequem* darstellen und

soma dann Kugeln von (auch den Vorzeichen nach) gleichen Radien. Diese einigermaassen verwickelte Figur, die bei rein geometrischer Betrachtung mit dem übrigens ja auch nicht ganz einfachen Gewinde so wenig Verwandtschaft zu haben scheint, wie nur möglich, weist dennoch bis in viele Einzelheiten hinein analoge Eigenschaften auf. Zu diesen Eigenschaften gehört auch die, dass das Hypersoma nicht nur zu einer der radial-projectiven Geometrie vergleichbaren Geometrie der Somen in Beziehung gesetzt werden kann, sondern auch noch zu einer anderen Art von Geometrie, die der Plücker'schen Liniengeometrie an die Seite gestellt werden darf, und deren unmittelbare Verallgemeinerung bildet. Diesen neuen Gegenstand wollen wir nunmehr betrachten, jedoch aus einem anderen Gesichtspunkt.

Die pseudoconformen Transformationen der Somen.

In der folgenden Andeutung über eine weitere Art von „Geometrie der Somen" werden wir, um Eintönigkeit zu vermeiden, einen anderen Gedankengang einschlagen als bisher.

Wir machen jetzt die Annahme, dass die Parameter (α, β) der Bewegung, die aus dem Protosoma ein eigentliches Soma $\mathfrak{X}$ hervorgehen lassen, durch die Gleichung (9) S. 176 verbunden seien, benutzen also als Coordinaten acht im *gewöhnlichen* Sinne des Wortes homogene Grössen, die durch die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = 0$ oder

$$\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{123} + \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0 \tag{18}$$

verbunden sind. Die hiermit erklärte Mannigfaltigkeit ergänzen wir von vorn herein zu einem abgeschlossenen Continuum, indem wir solche Werthsysteme, die den Gleichungen $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = 0$ genügen, ebenfalls zulassen und als Coordinaten eines *Pseudosoma* bezeichnen.

---

zusammensetzen. So die Aehnlichkeitstransformationen im Raume von vier oder drei Dimensionen (Papers from the Chicago Congress, New York 1896, p. 379), und natürlich alle mit diesen gleichzusammengesetzten Gruppen, darunter eine elfgliedrige gemischte Gruppe von B. T., die die im Texte genannte Gruppe umfasst. Die Aehnlichkeitstransformationen des gewöhnlichen Raumes hat neuerdings Herr Combebiac in dieser Weise behandelt (*Calcul des Triquaternions*, Thèse, Paris 1902).

Es mag erlaubt sein, hier noch eine besonders handliche Schreibart der zuerst erwähnten allgemeineren Formeln herzusetzen: In nicht homogener Gestalt werden sie geliefert durch die Quaternionengleichungen

$$x' = \bar{a}(xb + c) \quad \text{und} \quad \bar{x}' = \bar{a}(xb + c)\,,$$

oder durch die ähnlich gebildeten Gleichungen

$$x' = (\gamma + \beta x)\bar{\alpha} \quad \text{und} \quad \bar{x}' = (\gamma + \beta x)\,\bar{\alpha}.$$

Auf eine Erörterung über die geometrische Deutung dieses analytischen Begriffs lassen wir uns nicht ein, sondern formuliren sogleich den folgenden Satz, dessen Beweis und nahe liegende Verallgemeinerung hier ebenfalls keinen Platz finden können:

Jede analytische Transformation, die im Continuum der ∞^6 eigentlichen und ∞^3 Pseudosomen überall wohldefinirt, eindeutig und stetig ist, gehört einer sogenannten gemischten Gruppe $\mathcal{G}_{28}$, $\mathfrak{S}_{28}$ mit achtundzwanzig Parametern an, deren continuirliche Untergruppe $\mathcal{G}_{28}$ einfach ist.

Diese Transformationen werden nämlich erschöpft durch die linearen Transformationen der Coordinaten $\mathfrak{X}_0 \ldots \mathfrak{X}_{12}$, die das Bestehen der quadratischen Gleichung (18) *nicht zerstören.*

Es folgt nun aus bekannten Thatsachen, dass die Gruppe $\mathcal{G}_{28}$, $\mathfrak{S}_{28}$ imaginär-ähnlich ist zur Gruppe der conformen Transformationen eines Raumes von sechs Dimensionen, und dass sie völlig charakterisirt wird bereits durch die Invarianz der (neben (18) zu stellenden) Mongeschen Gleichung

$$(19) \qquad d\mathfrak{X}_0 d\mathfrak{X}_{123} + d\mathfrak{X}_{01} d\mathfrak{X}_{23} + d\mathfrak{X}_{02} d\mathfrak{X}_{31} + d\mathfrak{X}_{03} d\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

Wir nennen deshalb unsere Transformationen der Somen *pseudoconform**) und bemerken, dass die Gleichung (19) und ebenso die entsprechende endliche Gleichung

$$(20) \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_0 \mathfrak{Y}_{123} + \cdots + \mathfrak{X}_{123} \mathfrak{Y}_0 + \cdot \cdot = 0$$

sehr leicht geometrisch gedeutet werden kann:

Die pseudoconformen Transformationen der Somen haben die ebenfalls charakteristische Eigenschaft, consecutiven eigentlichen Somen, die durch eine infinitesimale Drehung (oder Schiebung) in einander übergeführt werden können, Somen gleicher Eigenschaft zuzuordnen.

Sie haben in Folge dessen auch noch die weitere Eigenschaft, aus irgend einer Rotationskette im Allgemeinen wieder eine solche oder auch eine Schiebungskette, ein Büchel paralleler Somen, hervorgehen zu lassen.

Der hier gemachte Zusatz „im Allgemeinen" hat folgenden *präcisen* Sinn: Es wird nur eine solche Umgebung eines eigentlichen Somas betrachtet, in der kein Soma liegt, das durch die Transformation in ein Pseudosoma übergeht.

---

*) Uebrigens würde der Ausdruck „pseudoprojectiv" wohl ebensogut — oder ebensoschlecht — am Platze sein.

Die reichhaltige Geometrie der Gruppe $\mathcal{G}_{28}$, $\mathcal{S}_{28}$ können wir hier nicht auch nur so ausführlich behandeln, wie wir die der Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ behandelt haben. Wir betrachten die Gruppe $\mathcal{G}_{28}$, $\mathcal{S}_{28}$ hier überhaupt nur aus systematischen Gründen. Wir wollen aber ihre Bedeutung ins Licht setzen, indem wir deren Zusammenhang mit einem schönen Satze des Herrn G. Königs darlegen*). Dieser Satz kann nämlich folgendermaassen formulirt und ergänzt werden:

Wenn eine analytische Schaar von ∞^r eigentlichen Somen die Eigenschaft hat, dass je zwei benachbarte Somen der Schaar durch eine Rotationskette oder eine Schiebungskette verbunden werden können, so kann ihre Dimensionenzahl r höchstens den Werth drei haben.

Hat sie den Werth drei, so können auch je zwei endlich-verschiedene Somen der Schaar durch eine der beschriebenen Ketten verbunden werden, die ganz in der Schaar verläuft.

Die Figur hängt dann nur von sechs Constanten ab und kann auf eine der folgenden Arten geometrisch erzeugt werden:

*1) Ein Soma wird auf alle möglichen Weisen entweder an Ebenen oder an Punkten des Raumes gespiegelt (oder, im zweiten Falle, ein Soma wird allen Schiebungen unterworfen)**).*

*2) Ein Soma wird der dreigliedrigen Gruppe aller Drehungen um einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt unterworfen**). —*

Durch die Transformationen der Gruppe $\mathcal{G}_{28}$ werden die ∞^6 Schaaren der ersten unter diesen beiden Familien transitiv unter einander vertauscht. Sie bilden also eine einzige Classe äquivalenter Figuren. Ebenso bilden die ∞^6 Schaaren der zweiten Familie eine Classe, nachdem man noch das Continuum der ∞^3 Pseudosomen hinzugefügt hat. Die Transformationen der Schaar $\mathcal{S}_{28}$ vertauschen beide Classen.

In ähnlicher Weise lassen sich (von dem genügend bekannten Falle $r = 1$ abgesehen) auch die der Annahme $r = 2$ entsprechenden Mannigfaltigkeiten aufzählen. Es ergeben sich aber hier natürlich unendlich viele Classen, die man auf *fünf Familien* vertheilen kann. Die Schaaren jeder Familie werden durch die Gruppe $\mathcal{G}_{28}$ nur unter einander oder (in zwei Fällen) mit Mannigfaltigkeiten von Pseudosomen vertauscht. Drei von diesen Familien sind enthalten in einer oder zwei der soeben besprochenen Schaaren von ∞^3 Somen; die beiden übrigen Familien aber haben ein hohes Interesse. In ihre Theorie gehört nämlich einer der (dem Grundgedanken nach) schönsten Sätze

*) Vgl. Königs, Leçons de Cinématique, Art. 84, 85.

**) Es entstehen also specielle unter den Figuren, die in unserer Geometrie der Ketten aufgetreten sind. Vgl. S. 571—573.

der Kinematik, den man Herrn Ribaucour verdankt*). Man kommt ferner von diesen Betrachtungen aus zu einem interessanten Satze des Herrn P. Stäckel, der bereits aus der Theorie der Deformation der Flächen eine Gruppe mit 28 Parametern abgeleitet hat**). Diese Gruppe entsteht nämlich aus der unsrigen (zu der sie ausserdem noch reell-ähnlich ist) durch Wechsel des Raumelementes.

Wir müssen uns eine eingehendere Untersuchung dieses, wie wir glauben, für die Differentialgeometrie äusserst wichtigen Gegenstandes für eine andere Gelegenheit vorbehalten. Hier bemerken wir noch, dass man vorsichtig zu Werke gehen muss, sobald man auch imaginäre Figuren zu betrachten hat. Wir hätten das Wort Soma in diesem Falle gar nicht brauchen dürfen; denn nur im reellen Gebiete sind wenigstens die eigentlichen Somen, wie wir sie zuvor erklärt hatten, mit den verwandten Figuren identisch, die zur Gruppe $\mathcal{G}_{28}$, $\mathfrak{G}_{28}$ gehören. (Man vergleiche die Erörterungen in § 28 über den Unterschied der Begriffe Strahl und gerade Linie.) Ueberhaupt wird bei weiterem Vordringen in dieses Gebiet die Terminologie einer sorgfältigeren Ausbildung bedürfen. —

Die Gruppe $\mathcal{G}_{28}$ enthält eine continuirliche Untergruppe mit 22 Parametern, deren Transformationen die charakteristische Eigenschaft haben, eigentlichen (reellen) Somen durchweg wieder solche anzuordnen, und die also alle analytischen Transformationen umfasst, die Rotationsketten *ausnahmslos* ebensolche (und parallelen Somen wieder parallele Somen) zuordnen.

In dieser Gruppe, die man als ein Seitenstück zur Gruppe der affinen Transformationen im Liniencontinuum betrachten kann, liegt die Gruppe aller Transformationen der eigentlichen Somen, die gleichzeitig pseudoconform und projectiv sind, und also verglichen werden können den Aehnlichkeitstransformationen der reellen eigentlichen Geraden oder Strahlen, die gleichzeitig projectiv und radial-projectiv sind. Während aber die ∞^7 Aehnlichkeitstransformationen eine (im üblichen Sinne des Wortes) continuirliche Gruppe bilden, ergiebt sich hier eine (lediglich durch den verschiedenen Charakter der Dimensionenzahlen bedingte) Abweichung von der sonst vorhandenen Analogie:

---

*) Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces*, Comptes rendus, t. LXX, 1870, p. 330. Vgl. Darboux, Théorie des Surfaces, I, Paris 1887, Art. 58—61. Königs, Cinématique, Art. 84. — Der von den genannten Autoren reproducirte Satz von Ribaucour ist übrigens incorrect, und die vorliegende Fassung entfernt sich auch ziemlich weit von der Wirklichkeit. Eine berichtigte Formulirung denken wir an anderer Stelle mitzutheilen.

**) Comptes Rendus. t. CXXI, 1895, p. 396.

Die Gesammtheit aller Transformationen der eigentlichen Somen, die zugleich pseudoconform und projectiv sind, bildet eine gemischte Gruppe $\mathcal{G}_{13}$, $\mathfrak{S}_{13}$ *mit dreizehn Parametern.*

Diese Gruppe ist demnach dadurch erklärt, dass sie im Infinitesimalen, und folglich auch im Endlichen, gerade Ketten und Rotationsketten in ebensolche überführt.

Sie besteht aus allen Transformationen der Gruppe $\mathcal{G}_{31}$, *die mit den zu ihnen discordanten zusammenfallen, oder also das Uebereinanderliegen von zwei Somen verschiedener Blätter nicht zerstören.*

Die Aehnlichkeitstransformationen der Somen (S. 560) gehören trivialer Weise auch noch zu dieser Gruppe. Wir betrachten näher nur die in $\mathcal{G}_{13}$, $\mathfrak{S}_{13}$ enthaltenen synektischen Transformationen, die äusserst merkwürdige Eigenschaften haben. Wir nennen sie *orthogonal*, weil sie, in dualen Coordinaten dargestellt, die dual-quadratische Form

$$(21) \qquad (XX) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

nur um einen (dualen) Factor ändern.

Die Geometrie der orthogonalen Transformationen der Somen.

Die orthogonalen Transformationen bilden, wie ohne Weiteres klar ist, eine gemischte Gruppe $\mathcal{G}_{12}$, $\mathfrak{S}_{12}$ mit zwölf Parametern, deren Transformationen als *eigentlich* ($\mathcal{G}_{12}$) und *uneigentlich* ($\mathfrak{S}_{12}$) unterschieden werden können.

Ein Blick auf den Ausdruck (21) *zeigt nun, dass in der Geometrie dieser Gruppe der orthogonalen somatischen Transformationen der ganze Begriffsinhalt der Nicht-Euklidischen Geometrie im Raume positiver Krümmung eine neue und wesentlich erweiterte geometrische Deutung finden muss**).

Wir werden nachweisen, dass den Grundbegriffen der Nicht-Euklidischen Geometrie, insbesondere im sogenannten elliptischen Raume, beinahe eben so einfache, und dabei mit den Hülfsmitteln der Elementargeometrie zu erklärende Begriffe der gewöhnlichen Kinematik an die Seite gestellt werden können, die unter einander — im Grossen und Ganzen — denselben Zusammenhang haben wie jene, und wir werden diesen Gedanken durch einige Anwendungen erläutern.

Dass den Begriffen *Punkt, Gerade, Ebene* die Begriffe *eigentliches Soma, gerade Kette, ebene Kette* parallel laufen, haben wir schon gesehen.

---

*) Wegen der anzuwendenden Vorsichtsmassregeln vergleiche man Seite 569.

Was aber, müssen wir nun fragen, entspricht dem Begriff „Entfernung zweier Punkte“, da ja doch auf diesem die weiteren Begriffe Winkel, Flächeninhalt und Volumen, und schliesslich die entlegensten Sätze der Differentialgeometrie beruhen und auch für diese ja die Möglichkeit einer Uebertragung auf die Kinematik in Anspruch genommen wird? Die Antwort lässt an Einfachheit Nichts zu wünschen übrig. Bedeutet 2ϑ den (mod. 2π bestimmten) Drehungswinkel und 2η die Schiebungsgrösse der Schraubung, die das eigentliche Soma X mit einem anderen Y zur Deckung bringt, und nennen wir dann $\vartheta + \eta\varepsilon$ *die duale Entfernung* der beiden Somen (wobei wie immer das Vorzeichen willkürlich bleibt), so findet sich sofort

$$\text{(22)} \qquad \arccos \frac{(XY)}{\sqrt{XX}\sqrt{YY}} = \vartheta + \eta\varepsilon.$$

Die orthogonalen Transformationen der Somen haben daher die (charakteristische) Eigenschaft, die duale Entfernung zweier eigentlicher Somen, oder also den Drehungswinkel und die Schiebungsgrösse der durch beide bestimmten Bewegung nicht zu zerstören.

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich nunmehr mit leichter Mühe ziehen lassen, führen wir nur einige wenige und ganz specielle ausdrücklich an, solche aber, die wir für besonders wichtig halten. Wir bedecken etwa das erste Blatt des Somencontinuums wiederum mit zwei Blättern, durch Adjunction von $\sqrt{XX}$. Wir erhalten dann ein neues Continuum *„orientirter“ Somen*, analog dem Punktcontinuum der *sphärischen* (Riemann'schen) Geometrie.

Alle synektischen Transformationen, die im Continuum der (reellen) orientirten eigentlichen Somen überall wohl definirt, eindeutig und stetig sind, bilden eine continuirliche Gruppe $\mathcal{G}_{20}$ mit 20 Parametern.

Diese besteht aus allen dual-conformen Transformationen der Somen, d. h. den synektischen Transformationen, die die duale Entfernung consecutiver eigentlicher Somen X, $X + dX$ um einen lediglich von der Stelle X abhängigen (dualen) Proportionalitätsfactor ändern.

Diese Gruppe somatischer Transformationen kann auch dadurch erklärt werden, dass ihre Transformationen synektisch sind und aus Somenkugeln stets wieder solche hervorgehen lassen.

Unter einer Somenkugel verstehen wir natürlich eine durch die Gleichung $\vartheta + \eta\varepsilon = \text{const.}$ erklärte Mannigfaltigkeit, d. h. den Inbegriff aller eigentlichen Somen Y, die aus einem gegebenen Soma X durch Schraubungen hervorgehen, deren Drehungswinkel 2ϑ und Schiebungsgrösse 2η gegeben sind.

Der vollständige Durchschnitt der Gruppe $\mathcal{G}_{20}$ mit der Gruppe der projectiv-somatischen oder auch mit der Gruppe der pseudoconformen Transformationen ist die Gruppe der orthogonalen Transformationen der Somen.

Nachdem wir hiermit unsere Gruppe $\mathcal{G}_{12}$, $\mathcal{H}_{12}$ auf nicht weniger als drei verschiedene Arten als Durchschnitt an sich interessanter Gruppen erkannt haben, wird es lohnend sein, sie noch etwas näher zu betrachten. Wir überlassen es dem Leser, sich selbst deutlich zu machen, *welche* Begriffe und Sätze der Nicht-Euklidischen Geometrie nunmehr auf die Kinematik übertragen werden.

Die Parametergruppen der Bewegungen*).

Die Gruppe $\mathcal{G}_{12}$, $\mathcal{H}_{12}$ und ebenso auch eine noch umfassendere Gruppe, die durch Zufügung irgend einer Umlegung (*der Somen;* vgl. S. 560) entsteht, kann sehr bequem mit Hülfe der Quaternionenrechnung dargestellt werden. Die Transformationen von $\mathcal{G}_{12}$ z. B. sind alle enthalten in der Form

$$\dot{X}' = \dot{A} \cdot \dot{X} \cdot \dot{B} \qquad (\mathfrak{a}_{00}, \mathfrak{b}_{00} \neq 0) \tag{23}$$

(vgl. S. 557), und man kann mehrere von ihnen zusammensetzen nach der Regel

$$\dot{\mathfrak{a}} \cdot \dot{\mathfrak{a}}' = \dot{\mathfrak{a}}'', \quad \dot{\mathfrak{b}} \cdot \dot{\mathfrak{b}}' = \dot{\mathfrak{b}}'' \tag{24}$$

Diese Formeln liefern auch eine vollkommene Einsicht in die Structur unserer Gruppe, die indessen hier nicht genauer erörtert werden kann.

Wir heben zunächst hervor:

Die Gruppe $\mathcal{G}_{12}$ der eigentlich-orthogonalen Transformationen der Somen kann in zwei mit einander vertauschbare Gruppen $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_6'$ zerlegt werden. Diese sind identisch mit (oder ähnlich zu) den beiden Parametergruppen der Gruppe der Euklidischen Bewegungen, und überdies fällt die eine von ihnen $\mathcal{G}_6$ mit dieser Gruppe selbst zusammen, wenn man das eigentliche (reelle) Soma als Raumelement wählt.

Die Bewegungen der Somen werden nämlich erhalten, wenn man in den Gleichungen

*) Aehnlich wie diese Parametergruppen lassen sich alle mit bilinearer Zusammensetzung der Parameter behandeln, und in gewissem Grade auch beliebige Parametergruppen. Vgl. Leipz. Ber. 1889, S. 177 ff.

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathcal{G}_6 \\ \dot{X}' = \dot{X}\cdot\dot{A} \\ \dot{X}' = \dot{A}\cdot\dot{X} \\ \mathcal{G}_6' \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} X_0' = \quad a_0 X_0 \mp a_1 X_1 \mp a_2 X_2 \mp a_3 X_3, \\ X_1' = \pm a_1 X_0 + a_0 X_1 + a_3 X_2 - a_2 X_3, \\ X_2' = \pm a_2 X_0 - a_3 X_1 + a_0 X_2 + a_1 X_3, \\ X_3' = \pm a_3 X_0 + a_2 X_1 - a_1 X_2 + a_0 X_3, \end{array}$$

die durch die oberen Zeichen dargestellten Combinationen wählt.

Es drängt sich nun sofort die weitere Frage auf: Wodurch sind die Transformationen der (nach Lie's Terminologie) zur Gruppe $\mathcal{G}_6$ reciproken Gruppe $\mathcal{G}_6'$ charakterisirt? Und was bedeuten ferner die Transformationen der Schaar $\mathfrak{S}_{12}$? Eine Antwort hierauf — unter anderen — ist enthalten in den folgenden Sätzen, deren zweiter wohl eines der überraschendsten specielleren Resultate unserer Untersuchung darstellt:

Die Gruppe $\mathcal{G}_{12}$ der eigentlich-orthogonalen Transformationen besteht aus allen synektischen Transformationen der Somen, die congruente gerade Ketten oder auch coaxiale gerade Ketten in ebensolche überführen).*

Die uneigentlich-orthogonalen Transformationen (die der Schaar $\mathfrak{S}_{12}$) haben ebenso die für sie unter allen synektischen Transformationen charakteristische Eigenschaft, aus congruenten (coaxialen) geraden Ketten coaxiale (congruente) hervorgehen zu lassen.

Es giebt also solche Transformationen!

Die zur Gruppe der Bewegungen der Somen reciproke Gruppe $\mathcal{G}_6'$ besteht aus allen analytischen Transformationen, die die Individuen einer jeden beliebigen Schaar coaxialer gerader Ketten (höchstens) unter einander vertauschen.

Die Gruppe $\mathcal{G}_{12}$ vertauscht daher die ∞^4 Axen der verschiedenen Schaaren coaxialer Ketten nur sechsgliedrig, und zwar ebenso wie ihre Untergruppe

$$(26)\qquad \dot{X}' = \dot{A}\cdot\dot{X}\cdot\dot{A} \qquad (a_{00} \neq 0),$$

die zur sogenannten *Adjungirten Gruppe der Bewegungen* ähnlich ist, und hier wohl ebenso wie diese, deren Stelle sie vollkommen vertritt, bezeichnet werden darf. Diese „adjungirte Gruppe" also besteht aus allen Transformationen von $\mathcal{G}_{12}$, die das Protosoma, und daher auch die reciproke ebene C_4, in Ruhe lassen. Die Strahlen werden von ihr durch die Bewegungen gerade so vertauscht wie nach dem Satze auf Seite 568 die Axen der Umwendungen, die das Protosoma in die Somen der reciproken ebenen Kette $X_1 = 0$ überführen.

---

*) Alle analytischen Transformationen gleicher Eigenschaft bilden die zuvor kurz besprochene Gruppe $\mathcal{G}_{15}$.

Natürlich kann ohne Weiteres die völlig bestimmte Transformation von $\mathcal{G}_6'$ construirt werden, die ein gegebenes eigentliches Soma X in ein beliebiges anderes X' überführt: Man braucht nur das Somenpaar X, X' allen Bewegungen zu unterwerfen. Aber ebenso leicht lassen sich Transformationen von $\mathfrak{H}_{12}$ finden. Wir sagen, dass zwei eigentliche Somen X, X' einander in der *Spiegelung an einem eigentlichen Soma O* (oder an der reciproken ebenen Kette) entsprechen, wenn sie

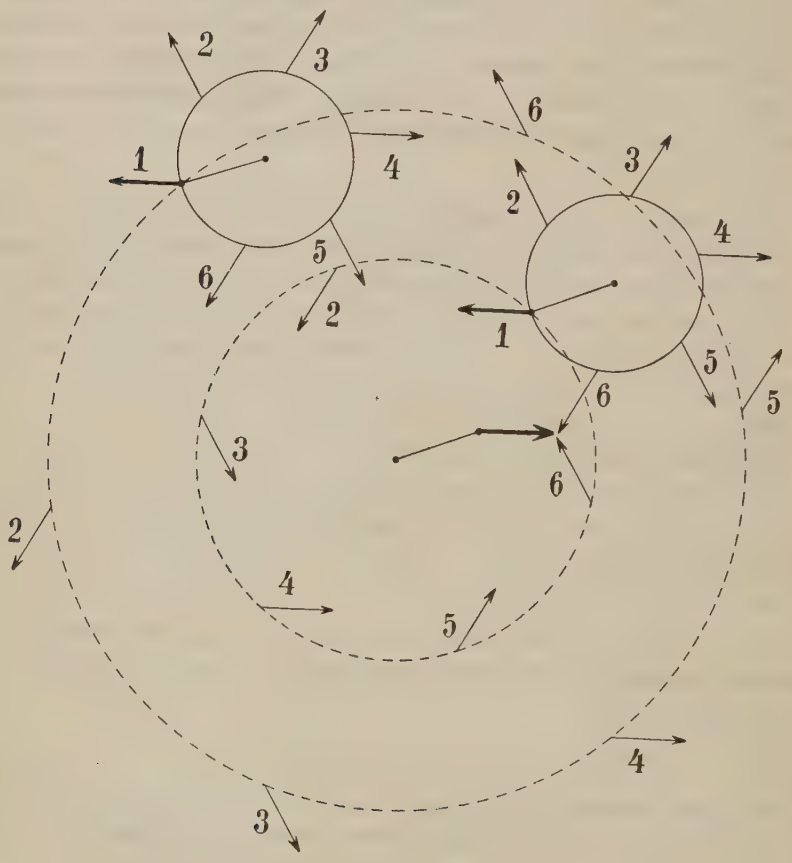


Fig. 46.

aus diesem Soma durch entgegengesetzte Bewegungen hervorgehen. Diese Transformationen, zu denen die Spiegelung am Protosoma

$$(27) \quad X_0' = X_0, \quad X_1' = -X_1, \quad X_2' = -X_2, \quad X_3' = -X_3$$

gehört, erschöpfen alle involutorischen Transformationen von $\mathfrak{H}_{12}$. Aus dreien von ihnen kann man alle uneigentlichen, und aus vieren alle eigentlichen orthogonalen Transformationen der Somen zusammensetzen.

Zwei von einander verschiedene eigentliche Somen sind dann symmetral, wenn die zugehörigen Spiegelungen vertauschbar sind, und umgekehrt.

Wir überlassen weitere Ausführungen, die sich in grosser Menge darbieten, dem Leser, fügen aber noch einen (sehr speciellen) Satz zur Erläuterung hinzu:

Es mögen zwei hinter einander geschaltete einander rechtwinklig schneidende Laufstangen (S. 537, 552) gegeben sein. Ein eigentliches Soma soll zuerst um die zweite Laufstange beliebig geschraubt werden können, und hierauf die ganze so entstandene gerade Kette um die erste Laufstange. Dieser Mechanismus erlaubt dann dem Soma, ∞^4 Lagen einzunehmen, und diese bilden eine synektische Mannigfaltigkeit, die offenbar von ∞^2 congruenten geraden Ketten und von ∞^2 coaxialen geraden Ketten beschrieben werden kann.

Es giebt nun $2 \cdot \infty^2$ somatische Spiegelungen, die die betrachtete Mannigfaltigkeit als Ganzes in Ruhe lassen, aber die ∞^2 congruenten mit den ∞^2 coaxialen Ketten vertauschen.

Das zu einer solchen Spiegelung gehörige Soma ist ein beliebiges unter denen zweier bestimmter gerader Ketten, die zu den Ketten der ersten Schaar congruent und gleichzeitig zu denen der zweiten Schaar coaxial sind.

Die Spiegelung an einem Soma wird in einem besonderen Falle durch die Figur 46 erläutert. In dieser werden Somen, die durch Bewegungen der Zeichnungsebene vertauscht werden können, durch Pfeile von gleicher Länge repräsentirt. Zwei coaxiale Rotationsketten werden an einem bestimmten Soma O gespiegelt und dadurch in congruente (und daher auch parallel gestellte) Rotationsketten übergeführt. Die Drehung z. B., die den Pfeil 3 einer der ersten Ketten mit dem Pfeil 0 (dem ohne Nummer) zur Deckung bringt, ist dieselbe, die diesen mit dem Pfeil 3 einer der beiden letzten Ketten zur Deckung bringt.

Der natürliche Aequivalenzbegriff der Kinematik und die sogenannte Umkehrung einer „Bewegung“.

Betrachten wir alle die Bewegungen, die etwa das ruhend gedachte Protosoma O mit den Somen X einer r-dimensionalen Somenmannigfaltigkeit zur Deckung bringen, so haben wir eine Schaar von ∞^r Bewegungen vor uns, deren Inbegriff — mit einem wenig glücklich gewählten Wort, wie uns scheint — wiederum eine [r-dimensionale] „Bewegung“ benannt zu werden pflegt. Sei $X(t_1 \ldots t_r)$ die Somenschaar und $S(t_1 \ldots t_r)$ die zugehörige sogenannte Bewegung, so erhält man eine neue Somenschaar und eine neue „Bewegung“, die ebenfalls

als bekannt gelten können, erstens, wenn man auf die ganze Figur (mit Ausschluss des Protosoma) eine willkürlich gewählte Bewegung B ausführt; zweitens, wenn man an Stelle des Protosoma ein mit diesem starr verbundenes Soma treten lässt, das aus O durch irgend eine bestimmte Bewegung A entsteht. Diese r-dimensionalen Bewegungen nun, die sämmtlich in der Form

$$S'(t_1 \ldots t_r) = A^{-1} \cdot S(t_1 \ldots t_r) \cdot B \tag{27}$$

darstellbar sind, werden in der Kinematik allgemein als *äquivalent* erachtet, allerdings ohne dass man — wie es scheint — eine ausdrückliche Definition dieses Aequivalenzbegriffs für nöthig gehalten hätte. Wir wollen etwa sagen:

Der zur Gruppe $\mathcal{G}_{12}$ der eigentlich-orthogonalen Transformationen der Somen gehörige Aequivalenzbegriff ist der natürliche Aequivalenzbegriff der Kinematik. Das heisst, jeder Classe von in Bezug auf $\mathcal{G}_{12}$ äquivalenten r-dimensionalen Somenmannigfaltigkeiten entspricht, nach der üblichen Terminologie, eine bestimmte „Art der Bewegung" und umgekehrt.

Und hierzu gehört als eine besonders wichtige Ergänzung die Bemerkung:

Unterwirft man irgend eine der genannten Classen einer beliebigen uneigentlich-orthogonalen Transformation der Somen, also z. B. der Spiegelung an einem Soma, so geht aus der zugehörigen Bewegungsart die sogenannte umgekehrte Bewegungsart hervor.

In der That, nach der Definition der Spiegelung am ruhenden Soma O liegt ja zu diesem das bewegliche Soma X' gerade so, wie O selbst zu dem beweglichen Soma X.

In unserer Systematik erscheint also der Aequivalenzbegriff der Kinematik als ein einzelnes Glied, an bestimmter Stelle, in einer ganzen Reihe (oder vielmehr in mehreren Reihen) von Aequivalenzbegriffen. Als letztes Glied aber, wenigstens als letztes Glied von allgemeinerem Interesse, steht in dieser Reihe noch ein weiterer Aequivalenzbegriff, den wir hier wohl als den *Aequivalenzbegriff der Mechanik* bezeichnen dürfen. In der Mechanik nämlich ist bekanntlich die Lage des untersuchten starren Körpers gegen die seine Beweglichkeit einschränkende Vorrichtung nicht gleichgültig, und man kann daher — bei bestimmter und nicht zu specieller Wahl des Körpers — als äquivalent nur solche Somenschaaren erachten, die durch eine von ihnen vermöge je einer Transformation der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}_6$, also in der Form

(28) $$S'(t_1 \ldots t_r) = S(t_1 \ldots t_r) \cdot B$$

darstellbar sind.

*Mechanisch-äquivalent sind also nur congruente Somenmannigfaltigkeiten.**)

Die besprochenen Thatsachen zeigen, dass dem relativ-speciellen Satze über die kinematische Erweiterung der Nicht-Euklidischen Geometrie und der darin enthaltenen Theorie der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}_6$ in unserem System eine Sonderstellung zufällt. Denn ein ganz unmittelbares Interesse haben wir, die wir Bewohner des Euklidischen Raumes sind, oder uns wenigstens als solche gebahren, an den mathematischen Begriffen, die uns die Natur selbst zu liefern scheint. Solche aber sind die beiden Arten der Aequivalenz, die wir soeben besprochen haben. Jede von ihnen bezeichnet eine bestimmte Behandlungsweise der Kinematik, und beinahe alle bisher auf diesem Gebiete angestellten Untersuchungen fallen unter eine dieser beiden grossen Kategorien. Wenn nun wirklich, wie wir es gezeigt zu haben glauben, zwischen diesem unzweifelhaft wichtigen Forschungsfeld und der Nicht-Euklidischen Geometrie ein solcher Zusammenhang besteht, dass die in der letzten auftretenden Begriffsverkettungen nur anders gedeutet zu werden brauchen, um kinematische Sätze zu liefern, so darf das gewiss als eine der merkwürdigsten und wichtigsten unter den wunderbaren Erscheinungen betrachtet werden, die das Vorkommen logisch-gleicher Schlussfolgen in verschiedenen mathematischen Disciplinen darbietet. Die Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie ist damit in ein neues Licht gerückt.

Für unsere Behandlungsweise kinematischer Probleme ist es offenbar charakteristisch, dass der bewegliche starre Körper (zunächst) sozusagen als ein *Atom*, und nicht als ein aus einfacheren Bestandtheilen aufgebautes Ganzes in Rechnungen und Constructionen eingeführt wird. In Wirklichkeit aber ist der starre Körper der theoretischen Kinematik der Inbegriff aller mit ihm starr verbundenen Punkte, Curven, Flächen u. s. w., also für sich allein schon eine ganze Welt, die, in Bewegung gesetzt, im Vergleich zur Geometrie der ruhenden Figuren eine Fülle von neuen und interessanten Erscheinungen darbietet. Wenn die hier skizzirte Theorie einmal weiter ausgebildet sein wird, so wird

*) Der Begriff der Symmetrie fällt hier weg, weil, nach der Definition des Soma, symmetrische starre Körper überhaupt als völlig verschiedene Figuren gelten müssen. Dass sie bei gleichzeitiger Symmetrie der wirkenden Kräfte denselben Gesetzen folgen, ist so selbstverständlich, dass wohl kein Mangel darin gefunden werden kann, wenn dieser Umstand in der Formulirung des obigen Aequivalenzbegriffes nicht zum Ausdruck kommt.

man mit Recht eine Ergänzung dazu in derselben Richtung fordern, in der die bisherige Entwickelung der Kinematik sich vorzugsweise bewegt hat. Es wird sich daher für uns vielleicht noch darum handeln müssen, durch einen wenn auch noch so bescheidenen Beitrag, wenigstens die Möglichkeit einer organischen Weiterentwickelung auch in dieser Richtung darzulegen. Wir wählen dazu einige ganz einfache Figuren aus, die aplanaren ein- und zweidimensionalen Somenketten, deren geometrische Erzeugung wir noch einmal in Erinnerung bringen: Sie entstehen durch Umwendung eines Soma um alle Strahlen einer Strahlenkette oder einer aplanaren Kettencongruenz, mit Hülfe von Figuren also, für die wir zuvor schon mannigfache Constructionen, darunter auch elementargeometrische, angegeben hatten.

Weitere Eigenschaften einiger Ketten.

Wir erinnern zunächst an einen Satz von Darboux, der alle nichttrivialen Bewegungen (s. S. 589) bestimmt hat, bei denen jeder beliebige Punkt eine ebene Curve beschreibt*). Der Satz über die Fusspunktcurven der Strahlenketten (S. 345) setzt nun in Evidenz, dass die durch eine aplanare C_1 bestimmte Bewegungsart in diese Familie von Bewegungen gehört. Dasselbe aber gilt von der umgekehrten Bewegung, und diese Eigenschaft ist offenbar charakteristisch. Wir drücken dies so aus:

Die aplanaren eindimensionalen Somenketten sind die Darboux-schen Somenschaaren, die durch Spiegelung an irgend einem und folglich an jedem (eigentlichen) Soma wieder in solche übergeführt werden.

*Jede beliebige solche Kette wird (u. A.) dadurch gefunden, dass man ein Soma an einer Laufstange gleiten lässt und dabei irgend einen Punkt des Somas, der nicht auf der Laufstange liegt, auf eine Ebene beschränkt, die nicht zur Laufstange parallel ist. Alle nicht auf der Laufstange gelegenen Punkte beschreiben dann Ellipsen, und alle nicht zur Laufstange senkrechten Ebenen umhüllen Umdrehungskegel, deren Axen zur Laufstange parallel sind**).*

Betrachten wir jetzt zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Es hat ebenfalls Herr Darboux auf eine Familie von Bewegungen aufmerksam gemacht, bei denen jeder Punkt eine *Steiner'sche Fläche*

*) Darboux, Sur les mouvements algébriques. (Note III in der Cinématique von Königs.)

**) Vgl. ferner Schoenflies, Math. Ann. Bd. 40 (1891), S. 317 u. ff. — Uebrigens kann man auch noch aus dem Darboux'schen Gedanken ein weiteres sehr umfassendes Classificationsprincip ableiten.

oder eine Ausartung dieser Figur beschreibt. Man kommt zu diesen Bewegungen (die übrigens nicht die einzigen solcher Art sind), wenn man in den Formeln auf Seite 176 die Parameter α_i als homogene lineare Functionen von drei *wesentlichen* Parametern $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ darstellt, und die Grössen a_{10}, a_{20}, a_{30} gleichzeitig als quadratische Functionen (Formen) eben dieser Parameter ausdrückt. Wir wollen sagen, dass die entsprechenden Somenmannigfaltigkeiten zur *Darboux'schen Familie* gehören. Man findet nun (diesmal mit Hülfe einer kleinen Rechnung) ähnlich wie oben:

Jede Somenschaar der Darboux'schen Familie, deren Spiegelbild in Bezug auf irgend ein Soma ebenfalls zur Darboux'schen Familie gehört, ist eine zweidimensionale aplanare Somenkette, und umgekehrt.

Nach dem Vorgetragenen giebt es von diesen besonderen Darboux'schen „Bewegungen" genau so viele kinematisch-verschiedene Classen, als es gegenüber Bewegungen verschiedene Classen von aplanaren Kettencongruenzen giebt. Wir betrachten der Kürze halber nur den interessantesten Fall, den, der unseren Kettencongruenzen des *ersten* Typus entspricht, und erhalten dann sofort aus den auf Seite 346, 347 besprochenen Eigenschaften der Fusspunktflächen die folgende weitere kinematische Erzeugung unserer Mannigfaltigkeiten:

Es möge die auf Seite 464 beschriebene Figur von zwei Punkten o', o'' und zwei Ebenen ω', ω'' doppelt gesetzt werden, und es seien die beiden so entstehenden congruenten Figuren durch Indices 0,1 *unterschieden. Beide Figuren sollen sich zunächst decken, so dass*

$$o_1', o_1''; \quad \omega_1', \omega_1'' \quad \text{mit} \quad o_0', o_0''; \quad \omega_0', \omega_0''$$

der Reihe nach zusammenfallen.

Nun werde mit der Figur (0) *ein beliebiges Soma O starr verbunden, und mit der Figur* (1) *ebenso das Soma X, das aus O durch Umwendung um die Axe $o'o''$ oder $\omega'\omega''$ hervorgeht.*

Jetzt lasse man die zweite Figur, und mit ihr das Soma X sich so bewegen, dass die Punkte und Ebenen

$$o_1', o_1''; \quad \omega_1', \omega_1''$$

der Reihe nach mit den Ebenen und Punkten

$$\omega_0'', \omega_0'; \quad o_0'', o_0'$$

vereinigt bleiben. Dann durchläuft das Soma X eine zweidimensionale aplanare Somenkette. Es bleibt nämlich in jeder seiner möglichen Lagen zu dem ruhenden Soma O symmetral, und die zugehörigen Umwendungsaxen erfüllen die aplanare Kettencongruenz, der die beiden ebenen Büschel (o_0', ω_0') und (o_0'', ω_0'') angehören.

Jede zweidimensionale Somenkette, die durch Spiegelung eines Soma an den Strahlen einer aplanaren Kettencongruenz des ersten Typus entsteht, wird so, und zwar — reell — auf eine einzige Weise, erzeugt.

Aber die zweidimensionalen aplanaren Somenketten lassen sich noch in anderer Weise kennzeichnen. Man kommt nämlich sehr leicht zu dem folgenden Satz (vgl. Seite 385, 413):

Wenn eine zweidimensionale Schaar von Somen X dadurch entsteht, dass man ein Soma O allen Umwendungen um die (eigentlichen) Strahlen einer analytischen Congruenz unterwirft, deren Strahlen nicht auf Cylinder vertheilt werden können, so bilden, in der Umgebung einer Stelle X allgemeiner Lage, die Axen aller Schraubungen, die consecutive Somen der Schaar verbinden, im Allgemeinen einen Strahlencomplex, der von ∞^2 Strahlenketten beschrieben werden kann. Spiegelt man die ganze Figur an dem Soma O, so bleibt sie in Ruhe, oder man erhält dieselbe Figur nochmals gesetzt.

Nimmt man nun die zweite dieser beiden congruenten Figuren aus ihrer ursprünglichen Lage weg, indem man, durch Umwendung, O mit X zur Deckung bringt, so kommen damit zwei einander entsprechende Strahlenketten beider Complexe auf's Neue zur Deckung. Die gemeinsame Hauptaxe dieser beiden Ketten oder dieser Doppelkette ist die Umwendungsaxe. Jede infinitesimale Schraubung, die X in eine Nachbarlage überführt, findet um einen Strahl der zugehörigen Doppelkette statt.

Die einzige Ausnahme von dieser Regel bilden die aplanaren zweidimensionalen Somenketten.

In diesem Falle nämlich, und in ihm allein, erhält man statt des Complexes nur eine Congruenz; die vorgelegte Congruenz ist dann eine aplanare Kettencongruenz, und die daraus abgeleitete deren Reciproke.

Natürlich gehört dann jeder Strahl der reciproken Congruenz nicht zu einem einzigen Soma X, sondern zu einfach-unendlich vielen; und diese Somen bilden auch wieder eine (aplanare eindimensionale) Kette.

Eine viel reichere Ausbeute an geometrischen Eigenschaften werden ohne Zweifel die dreidimensionalen Somenketten liefern; diesen Gegenstand aber, der an Umfang und jedenfalls auch Schwierigkeit die in den §§ 37—39 durchgeführte Untersuchung der Kettencongruenzen weit übertrifft, lassen wir ganz auf sich beruhen, ebenso wie überhaupt verschiedene Erweiterungen der behandelten Probleme, die sich unmittelbar darbieten.

Schlussbemerkung.

Wenden wir das dargelegte Erweiterungsprincip auf die besonderen Constructionen der Nicht-Euklidischen Geometrie an, von denen in § 14 die Rede war, so erkennen wir, dass alle die Sätze, die uns im ersten Abschnitt beschäftigt haben, einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig sind (bei der jedoch der Zusammenhang mit der Composition von Kräften verloren geht). Ein Aehnliches aber gilt von den Constructionen der Quaternionentheorie, in der die geometrische Addition der Vectoren mit der Zusammensetzung der endlichen Drehungen um einen festen Punkt in ein grösseres Ganzes verwebt wird. Die mannigfachen hier sich darbietenden neuen Fragen können wir nicht mehr erörtern; wir wollen aber, in der folgenden Behauptung, wenigstens noch äusserlich eine weitere Richtung möglicher Entwickelung bezeichnen:

Die Geometrie der Dynamen, oder wenigstens ein grosser Theil der Constructionen, die wir unter dieser Bezeichnung zusammengefasst haben, und die Lehre von der constructiven Zusammensetzung endlicher Bewegungen, bilden verschiedene Ausschnitte aus einer umfassenderen Theorie gewisser geometrischer Constructionen, die Hamilton's geometrischer Quaternionentheorie analog ist und diese umfasst), und worin der Geometrie der Dynamen selbst eine ähnliche Stellung zufällt, wie der geometrischen Addition der Vectoren in der Quaternionenlehre.*

Die elementargeometrische Theorie, die uns hier vorschwebt, wird an Constructionsmöglichkeiten die Quaternionen um so vieles übertreffen, als die Geometrie der Dynamen die Addition der Vectoren übertrifft. Der zugehörige analytische Apparat wird aus einem System complexer Grössen mit acht, oder besser noch, *sechzehn* Einheiten bestehen. —

Wir sind hiermit schliesslich zu dem Gedanken zurückgekehrt, der den Ausgangspunkt für des Verfassers kinematische Untersuchungen

---

*) Hiermit wünschen wir nicht zu sagen, dass diese Dinge auch in der höchst umständlichen und ausserdem von classischen Mustern sich weit entfernenden Form dargestellt werden sollen, die Hamilton selbst und seine Nachfolger zur Darlegung des Quaternionencalculs gewählt haben, und deren Conservirung — beiläufig bemerkt — der eigentliche Zweck des neuerdings gebildeten „Vereins zur Förderung der Quaternionentheorie" zu sein scheint. Dass diese Abweichungen von den für mathematische Gedanken üblichen Ausdrucksformen unnöthig sind, wird jeder, dem das nicht ohne Weiteres klar ist, aus des Verfassers elementarer Begründung der Quaternionenlehre ersehen können. (Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Greifswald 31. Jahrgang 1899 [Berlin 1900, S. 1—49].)

und damit für alle in der vorliegenden Schrift enthaltenen Ergebnisse gebildet hat. Es ist dies derselbe Gedanke, der sich in einer dunkeln und unvollkommenen Gestalt in mehreren Schriften von Clifford findet, und der in anderer Richtung auch von Herrn Lipschitz (in dessen Untersuchungen über Summen von Quadraten) weiter entwickelt, sonst aber kaum beachtet worden ist. —

Wir glauben, dass mit den bis jetzt bekannten Beispielen die Fälle noch nicht erschöpft sind, in denen Systeme complexer Grössen bei geometrischen Untersuchungen mit Nutzen zur Auffindung neuer Wahrheiten verwendet werden können. Z. B. bietet die Theorie gewisser (endlicher und unendlicher) Gruppen von Berührungstransformationen ein weites Feld für fernere Untersuchungen der Art.

Die erwähnten Ideen Clifford's aufzuklären und anzuwenden, haben allerdings einige englische Mathematiker versucht. Es scheint aber diesen Autoren, soweit der Verfasser ihre Arbeiten kennt, an klar gefassten Problemen und überhaupt an den nöthigen Kenntnissen gefehlt zu haben. Sie und noch Andere dürften die beklagenswerthen Opfer eines früher und zum Theil anscheinend auch jetzt noch in England üblichen Erziehungssystems geworden sein.

In anderen Ländern scheint der Entwickelung solcher Gedanken die (von Einigen auch ausdrücklich formulirte) Ansicht im Wege gestanden zu haben, Untersuchungen über von den gemeinen verschiedene complexe Grössen müssten „unfruchtbar“ sein. Man hat damit einer bekannten Aeusserung von Gauss eine Interpretation gegeben, die nach unserem Dafürhalten als unzulässig bezeichnet werden muss. Dass andere Systeme complexer Grössen „in der allgemeinen Arithmetik“ nicht in der Weise verwendet werden können, wie die gewöhnlichen, ist durch Untersuchungen, die Weierstrass und Andere an jenen Ausspruch geknüpft haben, gewiss sicher gestellt. Ueber ihre Verwendbarkeit in begrenzten Gebieten und zu bestimmten Zwecken kann aber daraus zum Mindesten so lange nichts geschlossen werden, als man diese Zwecke noch gar nicht kennt. — Keine Art der Urtheilsbildung erheischt wohl grössere Vorsicht, als die Abschätzung des zukünftigen Ertrages irgend einer Forschungsrichtung. Sind doch brauchbare Gedanken nicht immer gleich in sachgemässer Fassung aufgetreten, und können ja doch jeder Zeit Thatsachen zum Vorschein kommen, die einer noch im Hintergrunde stehenden Art von Betrachtungen neue Anwendungsgebiete erschliessen. Eine solche Möglichkeit scheint auch Gauss selbst in Rechnung gezogen zu haben; denn wir dürfen schwerlich annehmen, dass die in seinen Worten „in der allgemeinen Arithmetik“ liegende Einschränkung von ihm ohne bestimmte Absicht hinzugefügt worden sei.

Verbesserungen und Zusätze.

S. 6 Z. 19 v. u. tilge: von der identischen . . . verschiedenen.
„ 12 „ 12 v. u. lies: den Punkt $\bar{x}$ statt: den Punkt x.
„ 13 „ 1 v. o. lies: $\bar{x}$ statt: x.
„ 15 „ 2 v. o. lies: $\underline{u}$ statt: $\underline{u}$.
„ 15 „ 9 v. u. lies: $x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x'$ statt: $x\{\mathfrak{T}_1\}x\{\mathfrak{T}_2\}x'$.
„ 26 „ 1 v. u. lies: dass sie eigentlich, *nicht Leitlinie* des genannten Nullsystems, und nicht zu dessen Hauptaxe parallel ist.
„ 61 „ 7 v. o. lies: des Quirles Null statt: des Quirles.
„ 65 „ 14 v. o. lies: $\mathfrak{D}_\omega^\zeta$ statt: $\mathfrak{D}_\omega^\eta$.
„ 102 „ 9 v. u. lies: $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{U}'\}$ statt: $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{D}'\}$.
„ 127 „ 6 v. u. lies: $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ statt: $(x_1\, x_3\, x_4\, x_4)$.
„ 150 Nr. 42 lies: dist $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ statt: dist $(\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y})$.
„ 185 Z. 15 v. o. lies: $\xi_2\psi_3$ statt: $\xi_2\psi_2$.
„ 188 „ 9 v. u. lies: $(\mathfrak{D}\mathfrak{Y}\,\mathfrak{D}\mathfrak{Y})$ statt: $(\mathfrak{D}\mathfrak{Y}\,(\mathfrak{D}\mathfrak{Y}))$.
„ 201 „ 14 v. o. lies: rechtwinklige statt: allgemeine.
„ 210 „ 4 v. u. lies: $(Q_i Q_k)$ statt: $(Y_i Y_k)$
„ 211 „ 4 v. u. lies: $\mathfrak{D}_\lambda^-, \mathfrak{D}_\lambda^+$ statt: Q_λ^-, Q_λ^+.
„ 219 „ 15 v. u. lies: Strahlencoordinaten statt: Liniencoordinaten.
„ 220 „ 7 v. o. lies: $-\frac{a_2}{a_0}$ statt: $-\frac{a_2}{a_1}$.

Auf S. 231 ist die erste Anmerkung zu streichen. Die Gruppe der dualen Collineationen der Strahlen (nicht aber auch die der radialen Collineationen, und ebenso nicht die Gruppe der dualen Collineationen der Somen) ist auch im reellen Gebiet continuirlich.

S. 233 Z. 7 v. o. lies: Unterscheidung statt: Untersuchung.

Zu S. 300. Als *algebraisches Strahlenband* wird weiterhin auch ein Inbegriff von mehreren analytischen und zugleich algebraischen Strahlenbändern, also eine nicht-analytische Mannigfaltigkeit bezeichnet.

S. 306 Z. 11 v. u. lies: proportional zu einem vollständigen Differential ist.

Der Verfasser verdankt Herrn A. B. Pierce die nicht unwichtige Bemerkung, dass die Aufsuchung der abwickelbaren Flächen in der einen von zwei reciproken nicht dem accessorischen Complex angehörigen synektischen Congruenzen eben die Flächen liefert, deren Normalen die andere Congruenz bestimmen.

Zu S. 347. Der in der Anmerkung Herrn Joly zugeschriebene Satz findet sich ebenfalls schon in der auf S. 460 citirten Arbeit des Herrn Waelsch, wo er für aplanare Kettencongruenzen des ersten und zweiten Typus (nach unserer Terminologie) ausgesprochen wird.

S. 424 Z. 5—11. Diese Worte beziehen sich auf den ursprünglichen Plan des Buches, der nachträglich erst durch den jetzt vorliegenden die Untersuchungen des dritten Abschnittes umfassenden Plan ersetzt worden ist.

Auf S. 443 wird das Wort „Band parataktischer Strahlenkreuze" besser durch ein anderes Wort ersetzt, damit das Wort Band für einen allgemeineren Begriff vorbehalten werden kann. Es empfiehlt sich vielleicht das Wort Streifen, oder Band mit einem Zusatz: lineares Band.

S. 446 Z. 12 v. o. lies: 2. ∞^1 Classen statt: ∞^2 Classen.

„ 451 „ 2 v. u. lies: ∞^1 Classen statt: ∞^2 Classen.

[Man vergleiche die Berichtigung auf S. 538 und den nachfolgenden Zusatz zu S. 458.]

„ 455 „ 1 v. o. lies: vierter statt: dritter.

„ 455 „ 3 v. o. lies: Büschels statt: Bündels.

Zu S. 458. Der Satz auf S. 459 lässt sich einfacher so begründen: Enthält ein Büschel von Gewinden mit parallelen aber nicht identischen Hauptaxen Gewinde verschiedenen Parameters, so wird der Parameter eines im Büschel veränderlichen Gewindes eine lineare Function (S. 458, Nr. 23) der das einzelne Gewinde bezeichnenden Grösse $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Es giebt dann im Büschel ein Gewinde vom Parameter 1, und ein anderes vom Parameter -1. Beide diese Gewinde werden vertauscht durch die Spiegelung an jedem eigentlichen Punkt, der auf der Mittellinie zwischen den beiden zugehörigen Hauptaxen liegt. Die Gruppe von perspectiven Aehnlichkeitstransformationen, die durch irgend einen dieser ∞^1 Punkte bestimmt ist, lässt dann das ganze Büschel in Ruhe, das die genannten Gewinde verbindet. Das Quadrat des Abstandes der Hauptaxen dieser beiden Gewinde ist offenbar die einzige unabhängige Bewegungsinvariante, die ein derartiges Gewindebüschel haben kann, so dass, wie zuvor angegeben, in der That nur ∞^1 Classen solcher Gewindebüschel entstehen.

S. 473 Z. 4 v. o. lies: geht, wenn $e_2 \neq 0$, statt: geht.

Wenn nämlich e_2 verschwindet, so fällt die Focalaxe der reciproken Congruenz in das Linienbüschel selbst, und ist also nicht isolirt.

„ 511 „ 3 v. o. lies: Gewindebündel statt: Gewindebüschel.

Alphabetisches Inhaltsverzeichniss.

Abhängigkeit von Strahlen 351; Ihrer fünf bestimmen einen sechsten 379.
Abstand von zwei Punkten 141; v. Punkt u. Gerader 144; v. Punkt u. Ebene 142; von zwei Geraden 148—151; von zwei parallelen Ebenen 145; *dualer,* von zwei Somen 585.
Abwickelbare Flächen, s. Flächen.
Addition, geometrische d. Stäbe 22—29. 159—163; d. Keile 30—43. 163—164; d. Quirle 58—69. 165—167; der sphärischen Stäbe, Keile u. Quirle 34. 67—69; d. Vectoren 157; d. Motoren 50—58. 186—189; d. Impulsoren 79—85. 190—192; *stereometrische,* d. Motoren 85—99. 213—217. Tabellarische Uebersicht: 109. — Vgl. S. 595.
Adjungirte d. allg. proj. Gruppe erweitert: 394—401. 415. 421—423. 561. Adj. Gr. d. Gruppe der Bewegungen 587.
Aehnlichkeitstransformationen d. Strahlen 234—236. 239. 292. 309. 340. 393. 399—401; der Somen 560.
Aequivalenzbegriffe der Kinematik u. Mechanik 590.
Alternanten oder *alternirende bilineare Formen:* 135—136. 154; — zerlegt 169, 170; — zugeordnet Summen von Stäben, Keilen od. Quirlen 168; Motoren 189. 216; Impulsoren 192; Bewegungen 181. 221; — Moment und Comoment zweier Alt. 192; — *Trilineare altern. Formen* 149. 156. 247.
Anticollineationen, duale d. Strahlen 233; involutorische 389—393. 432; d. Somen 564.
Anticorrelationen, duale d. Strahlen 233; involutorische 433; d. Somen 564.
Analogieen, verschiedenartige 103. 108—115. 168. 204 ff. 250. 293. 368. 399—401. 440—444. 559. 561. 568. 569. 579. 584—591.
Anzahl, behauptete Erhaltung der 378.
Arbeit e. Dyname bei e. inf. Bew. 194.

Band, v. Strahlen 300. 303. 306. 410. 412. 597; v. Parallelenbüscheln 408. 431.
Basis e. linear. Syst. v. Gewinden 312; e. Somenkette 563. 564.
Bewegungen 4—22. 29. (im Strahlencont.:) 233. 292. 399. (im Somencont.:) 586—591; *Parameterdarstellung der B.* 174—181. 219—221; *Parametergruppe der B.* 586. 587; Zerlegung einer B. in Drehung u. Schiebung 179; *Infinitesimale B.,* lineare Systeme von 536 ff.; *Lineare Superpos. d. B.* 43—50. 109. 181. 222; *Correlative Superpos. d. B.* 70—79. 109. 181. 222; *Stereometr. Superpos. d. B.* 100—108. 109. 221. 222; B. *associirt* e. Summe von Keilen 48. 179; B. *associirt* e. Summe von Quirlen 77. 179; B. *affiliirt* e. Summe von Stäben, Keilen od. Quirlen 102. 221. Vgl. Gruppen, Zusammensetzung.
Bewegungsfreiheit, Beweglichkeit e. starren Körpers im Infinitesimalen, verschiedene Arten der, classificirt und kinematisch beschrieben 537—554.
Biquaternionen 222. 595.
Blatt, erstes u. zweites, im Strahlencont. 263—267; im Somencont. 563. 564.
Bündel, Büschel, s. Gewinde, Parallel, Soma.

Cardanisches Gelenk u. Cardanische Aufhängung 542. 544.
Chasles, Satz von 163. (Verwandte Sätze 164. 167.)
Classification, s. Gruppen.
Cogredienz u. Contragredienz 139. 140. 225. 238. Vgl. Concordanz.
Collineationen, duale, v. Strahlen 231. 243. 246. 428; involutorische 431; *radiale Coll.* 234—236. 387. 424—428; *somatische Coll.* 559. 564 ff.; *gewöhnliche Coll.* 130—133; Solche, die mit Bewegungen verbunden sind 12—17. 46—48. 171—173. 179. Vgl. S. 104. 105. 223.
Complex, Congruenz, s. Strahlencomplex, Strahlencongruenz, Parallelenbüschel.
Concordanz u. Discordanz 264—267. 564.
Continuum, abgeschlossenes 248; Punktcont. d. proj. Geom., Plücker'sches Liniencont. 247—249. 282. Vgl. Liniengeo-

metrie, Linienkreuz, Parallelenbüschel, Soma, Strahl.
Coordinaten, v. Punkten, Geraden, Ebenen 125—129; *v. Strahlen* (1. Art) 200. 294; (2. Art) 258. 294; (3. Art) 270; *elliptische,* bei apl. Kettencongruenzen 492—510; *v. Parallelenbüscheln* 403. 423; *v. aplan. Kettencongruenzen* 395; *v. Somen* (1. Art) 557; (2. Art) 576; (3. Art) 580.
Correlationen, duale, v. Strahlen 232. 243—246; involutorische 432; *absolute Correlation* 232. 432; *radiale* 234—236. 387. 427; *somatische Corr.* 564; *gewöhnliche* 134—136; solche, die mit Bewegungen verbunden sind 17—22. 72. 73. 174. 179. Vgl. Alternanten, Gewinde, Nullsystem.
Cylinder 300.
Cylindroid 57. 320. 338. 345. 346. 348. 366. 455—459. 522. Vgl. Strahlenkette.

Discordanz, s. Concordanz.
Doppelverhältniss, duales 241—244. 293. 331. 568.
Drehkraft 1. 116 ff.
Drehung 5. 178.
Drehungswinkel e. Schraubung 5. 178; e. ausgearteten Umschraubung 76. 180.
Duale Grössen, s. Grössen.
Dual-conforme Transformationen (der Somen) 585.
Dynamen 2. 116—121.

Ejector 80.
Euklidische Geometrie, systematische Stellung der 233. 292. 393. 399—401. 422. 423. 587. 591. Vgl. Analogieen, Nicht-Euklidische Geometrie.

Flächen, abwickelbare 306. 308. 597; *Brenn-, Grenz-, Haupt- und Mittelflächen* von Kettencongruenzen 475—510. 519—528; Geradlinige Flächen 3. O. im R_3 338; *Fusspunktflächen* 346—348. 475—478. 494. 524. 528. 593; *Normalflächen* 279; *4. Ordn.* 333; *3. Ordn.* 337; *Steiner'sche Fl.* 341—344. Vgl. 475 ff. 593; *Flächen 2. Ordnung,* metr. Eigenschaften von 466 ff. 515 ff.
Flächeninhalt eines Dreiecks 145—147.
Formen, duale lineare, Motoren zugeordnet 213. 214; *alternirende* s. Alternanten.
Fortsetzung, analytische (Ueber vermeintliche Anwendungen der a. F.) 534.
Functionen, elliptische; angewendet auf Kettencongruenzen 506—510; *synektische* 199.
Fusspunktcurven des Cylindroids 345.
Fusspunktflächen, s. Flächen.

Gebüsch v. Geraden 129. Vgl. Gewinde, Soma.
Gewebe, s. Gewinde.
Gewinde 21. 129. 151—156; *coaxiale* 153. 237—240. 288. 311. 315. 322; *conjugirte* 154; *eigentliche und uneigentliche* 288. 311. 319; *Büschel, Bündel, Gebüsch, Gewebe* v. G. 310; *Hauptaxe (u. Nebenaxe) e. Gew.* 21. 153. 285. 288; Oerter solcher Axen 319—326; *Lineare Systeme v. G. classificirt* 300—318. 444—452. Vgl. Art. Kettencongruenz, Plan. Strahlencomplex, u. s. w.
Gleichungen, algebraische, zwischen dualen Grössen 196.
Grenzflächen, s. Flächen.
Grenzstrahlen 267—270.
Grössen, duale 195—199; Anwendungen dieser Grössen 200—225. 231—246. 293. 298—300. 312—331. 385. 428. 444—452. 557—575. 584—587.
Gruppen von Transformationen, benutzt zur Classification geometrischer Figuren 228. 273—283. 309—460. 559—592; v. Bewegungen 540—554 (deren Auftreten in der Kinematik:) 566 ff. 582; *Primitive Gr.,* die in der Geometrie der Strahlen u. Somen auftreten 393 ff. 579. 581.

Hamilton, Satz von 384.
Haupt- u. Nebenaxe e. Linienkreuzes 4; e. Strahlenkette 320.
Haupt- u. Nebeneinheit e. Systems dualer Grössen 196.
Hauptflächen, s. Flächen.
Hauptstrahlen, bei linearen Systemen von Gewinden und entsprechenden Ketten 444—452.
Hemisymmetrale Somen 558.
Hooke'scher Schlüssel, s. Cardanisches Gelenk.

Impulsor $\mathfrak{I}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ 80; I. *associirt* e. Summe von Quirlen 83. Vgl. Addition.

Kegelschnitt, absoluter 138. 290. 291.
Keil, $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\psi}$ 30; *Sphärischer Keil* 35; K., der e. Summe von Keilen *begleitet* 44—46. 172; Summe von K., *associirt* e. Bewegung 48. Vgl. Addition.
Keiltrapez 32. 163.
Ketten, r-dimensionale, v. Strahlen 326; v. Somen 563.
Kettencomplex 321. 355—359. 386. 419. 431. 433. 435. 436. 441. 457. 572.
Kettencongruenz, aplanare 323. 331—333. 346. 375. 381. 384. 385. 413. 433. 438. 442. (Auftreten in der Kinematik:) 570. 593. (als Raumelement:) 387—401. 415. 420—423. (Verh. bei rad. Coll.:) 426—428. (classificirt:) 448. (Nähere Untersuchung des ersten Typus:) 461—510, vgl. S. 593. (zweiter Typus:) 511. (dritter

Typus:) 512. (Grenzübergang zu specielleren Figuren:) 523—530. Vgl. S. 301. 377.
Kettencongruenz, cylindrische 352—354. 375. 431.
Kettencongruenz, planare 323. 324. 334—338. 347. 353. 354. 375. 381. 386. 432. 436—438. (classificirt:) 449—451. (Auftreten in der Kinematik:) 570. 573. (Genauere Untersuchung des ersten Typus:) 513—526. (zweiter und dritter Typus:) 526—528. Vgl. S. 301. 302. 377.
Kniegelenk 537.
Kugelgelenk 537.

Länge, e. Impulsors 80. 190; e. Motors 51. 187; e. Quirles 60. 165; e. Stabes 22. 159; e. Vectors 26. 158.
Laufstange 537.
Liniengebüsch 129. 152. 288.
Linien- und Strahlengeometrie, Beziehungen zwischen beiden 237—240. 255. 283—292. 294—304. 309. 320. 358. 368. 423. Vgl. S. 460. 462. 512.
Linienkreuz 4. 153. 203. 207. 232; Continuum der L. 257. 280.
Liniennetz 57.

Mechanismen, zur Darstellung d. inf. Beweglichkeit e. starren Körpers 537—554.
Minimalcomplex 291.
Minimalgerade 287—292.
Minimalstrahlen 287—292. 309.
Mittelflächen, s. Flächen.
Moment, s. Alternanten. Mom. e. Stäbepaares 26. 161.
Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ oder $\mathfrak{N}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{y}}$ 51. Vgl. Addition. Transf. der Motoren 241. Motor, *associirt* e. Summe von Keilen 53. 189; *associirt* e. Summe von Quirlen 83. 192; *affiliirt* e. Summe von Stäben, Keilen oder Quirlen 94. 216.
Multiplication, geometrische und stereometrische, mit Zahlen. S. Addition; Stab, Keil, Quirl, Motor, Impulsor, Vector.

Netz von Parallelenbüscheln 404 ff.
Nicht-Euklidische Geometrie 113—115. 282. 440—443; *Ihre Bedeutung für die Kinematik* 584—591.
Normale, gemeinsame, zwischen zwei Geraden 150; zwischen zwei Strahlen 203. 298—300.
Normalebenen d. Sehnen bei e. Bewegung 19. 174; bei e. Umlegung 183.
Normalflächen, s. Flächen.
Normalennetz e. Geraden 285—289; eines Strahls 203. 206. 232. 236. 243. 260—264. 285—291. 324. 339. 340. 348. 376. 381. 386. 405. 431. 525—531. (Auftreten in der Kinematik:) 566.
Normalform d. Gl. e. Strahlencomplexes 275—278; e. Summe v. Stäben 27. 160; v. Keilen 41. 164; v. Quirlen 67. 167.
Normalkegel, dreidimensionaler 349 ff.; *vierdimensionaler* 407 ff.
Nullsystem 20. 21. 129. S. Gewinde, Alternante, Bewegung.

Oeffnung e. sphärischen Stabes 35; e. Keiles 30. 163; e. Motors 51. 187; e. Impulsors 80. 190; e. Ejectors 82. 190; e. uneigentlichen Quirls 64. 165; duale, e. Motors 216.
Orientirung e. Geraden 9. 143; e. Ebene 14. 141; e. Soma 585.
Orthogonale Transf. d. Somen 584.
Orthogonalität, doppelte, von Punktstrahlen 263.

Parallelismus v. Strahlen 263; v. Somen 558.
Parallelenbüschel 244. 254. (reciproke:) 298. 325. 533. (als Raumelement:) 402—424. (singuläres:) 408. (Bänder, Congruenzen, Complexe von Pb.:) 408—423. 429—431. (Natürliche Continua von Pb.:) 408. 428. 429. (Verhalten bei radialen Collineationen:) 426.
Parallelenbündel 300. 324. 341. 531—533; *gestreifte* 267.
Parameter e. Nullsystems od. Gewindes 153. 240. 453; e. inf. Bewegung 540.
Parametermannigfaltigkeiten, insbes. *Parameterflächen* 452 ff.
Parasoma 576—578.
Perspective Lage verschiedener Figuren 244. 330. 331. 438. 511.
Peterson u. Morley, Satz von 107. 217.
Planarität e. Somenschaar 562.
Potenzreihen dualer Grössen 198.
Prismenführung 537.
Projectivität, s. Collineation, Correlation, Anticollineation, Anticorrelation.
Protosoma 556.
Pseudoconforme Transf. d. Somen 581.
Pseudopolaritäten 434—436.
Pseudosoma 580.
Punkt, betrachtet als Specialfall e. aplanaren Kettencongruenz 400. 401.
Punktstrahlen 261—266. 279. 367—369. 376.

Quasifocus e. Paraboloids 515.
Querlinien e. Linienkreuzes 4. 203. 288. 320.
Quirl $\mathfrak{Q}_{\xi}^{\psi}$ oder $\mathfrak{Q}_{\varphi}^{\eta}$ 59. 60. 63. 165; unendlich ferner Quirl 65. S. Addition. Quirle, die e. Summe v. Quirlen *begleiten* 70. 173.

Quirltrapez, Quirlvierflach 62. 166.
Quirlvierseit, sphärisches 68.

Raum, dreifach ausgedehnter, verhält sich singulär in Bezug auf die Geometrie der Dynamen 119; Geometrie in höheren Räumen angewendet 271. 272. 278. 279. 282. 337. 349—354. 367—423.
Reciproke lineare Systeme v. Gewinden 310—318.
Reciproke Figuren i. d. Strahlengeometrie 327. 328. 410 ff.; i. d. Kinematik 574—576.
Rotationsketten v. Somen 570. 581 ff.
Rotor 51.

Scalar 196. (Zeichen $\mathbf{S}$ 313.)
Schicht, erste u. zweite im Gewindecontinuum 237. 310; im irregulären Strahlencontinuum 224. 231—233. 265—267.
Schiebung (Euklidische) 7. 178; *duale* (dual-projective) d. Strahlen 235. 332. 392; *dual-projective* d. Somen 561.
Schraube 537.
Schiebungsgrösse e. Bewegung 5. 178.
Schneiden, rechtwinkliges, von Strahlen 202. 260 ff. 285 ff.
Schraubungsaxe e. Bew. 178.
Sechsseit, mit lauter rechten Winkeln 107. 209—213. 217.
Sehnenmitten bei e. Bewegung 12—14. 172; bei e. Umlegung 183.
Singularitätencongruenz e. quadr. Strahlencomplexes 362—367. 381. 386. 436. 438.
Sinus, v. Staudt'scher 147. 151; dualer 205.
Soma 556—592, vgl. Coordinaten; duale Entfernung zweier S. 585; Somenschaaren, *r*-dimensionale 562; Büschel, Bündel, Gebüsche v. Somen 558; Continua, v. Somen, verschiedene natürliche 578. 581.
Somenketten 563; aplanare 569; ausgezeichnete 567. 568; gerade 565; ebene 565; reciproke 564 ff. insbes. S. 574.
Speer 9. 15. 143.
Sperrung e. uneigentlichen Keils 38. 163; e. Motors 86. 216.
Spiegelungen an Punkten 6. 7. 183. 432. 433; an Geraden od. Strahlen 7. 178. 432. 433 (s. Umwendung); an Ebenen 6. 183. 432. 433. (Ihr Auftreten in der Kinematik:) 572. 582; Sp. an Somen 588. 590, vgl. Vertauschung; Sp. an aplanaren Kettencongruenzen 392.
Stab $\mathfrak{S}_\xi^\eta$ 1. 22. 159. S. Addition. Sphärischer Stab S_ξ^η 34; Stäbe, e. Summe von Keilen *begleitend* 44. 171.
Stäbeparallelogramm 24. 159.
Stäbeviereck, sphärisches 35.
Stephanos, Satz von 565.
Strahlen, eigentliche u. uneigentliche 201. Vgl. Coordinaten, Grenzstrahlen, Punktstrahlen. *Imaginäre Str.* 283—309; *accessorische* 286; Minimalstr. 287. Vgl. Bänder, Abhängigkeit, Soma. *Strahlencontinuum, irreguläres* 250—258. 264—267; *erstes natürliches* 258—267. 280; Abbild. auf e. Punktmannigfaltigkeit 272. 278. 279. 367—386; *zweites natürliches* 267—270. 280; Abbild. auf e. Punktmannigfaltigkeit 272. 278. 279.
Strahlenbündel u. -feld 301. 302. 335. 341.
Strahlencomplexe. Analytische und algebraische 273—277. 295. 379. 411; mit vorgeschriebenen Eigenschaften 379. 386; solche, die zu Congruenzen reciprok sind 413. (Ihr Auftreten in der Kinematik:) 594. Kettencomplex s. d. *Quadratische Strahlencompl.* 303. 304. (classificirt:) 358—360; *reguläre* 360—367. 385. 386. 418. 431. 435. 442. Durchschnitte von quadr. Compl. 371—380; *conische* 327. 360. 370. 376; insbes. *accessorischer Complex* 290. 433. *Planare Complexe* 303. 320. 321. 349—355. 375. 386. 415. 443. (Ihr Auftreten in der Kinematik:) 566.
Strahlencongruenzen. Analytische 305. 384. 385. *Synektische* 305—308. 430. Algebraische, die ganz aus eigentlichen Strahlen bestehen 308. Solche mit drei Schaaren von ∞^1 Ketten 372. Solche mit ∞^2 oder ∞^3 Ketten 381—385. Reciproke 305. 306. 413. Cylindrische 305. 410. 411. Conische 293. 294. 432. *Die absolute Congruenz* 290—294. 429. 430. 432. Vgl. Kettencongruenz, Normalennetze, Strahlenbündel u. -feld.
Strahlenketten 320. 328—331. 345. 346. 379. 381. 384. 385. 419. 455—458. (Auftreten in der Kinematik:) 570. 592. 594; ihrer zwei bestimmen eine dritte 373. Vgl. Cylindroid, Kettencomplex.
Streckung e. Bewegung, *lineare* 50; *correlative* 79; *stereometrische* 103.
Strictionsband 303. Vgl. S. 492—496.
Stufe u. Dimension 310.
Superposition, s. Bewegung.
Symmetrale Somen 558.

Tetraeder 69. 147. 148. 167.
Torsor 80.
Träger e. Bewegung 7. 8. Vgl. Linienkreuz, Keil, Impulsor, Motor, Quirl, Vector.
Translator 51.
Trigonometrie im Strahlenraum 209—212.

Umkehrung e. Speers 9; einer sogenannten Bewegung 590.

Umlegungen 182—183. 233.
Umschraubungen 6. 178. (Ihr Auftreten in der Kinematik:) 558; *ausgeartete Umschr.* 76. 180; *associirt* e. uneigentlichen Quirl oder e. Ejector 77. 83. 180. 184. 190.
Umwendungen 7. 178. (Ihre Bedeutung für die Kinematik:) 558.
Uneigentliche Figuren in der Geometrie 247—249. 288 ff. Vgl. Strahlen.

Vector $\mathfrak{B}_{\xi}^{\eta}$ 23. 175. Gehörig zu e. Stäbepaar 25; zu e. uneigentl. Keil 38; zu e. uneigentl. Quirl 66; zu e. Translator 54; zu e. Ejector 82.
vectoriell 196. (Zeichen $\mathfrak{V}$ 313.)
Vectorendreieck u. -polygon 24. 157. 158.
Vertauschung, coaxialer und congruenter gerader Somenketten durch Spiegelung an einem Soma 587—589.
Volumen e. Tetraeders 147.

Winkel zweier Ebenen 142; zweier Geraden 144; zwischen Ebene und Gerader 144; *dualer,* zweier Strahlen 205.
Winkelhalbirende zweier Ebenen, die i. e. Bew. einander entsprechen 14—16. 173; zweier Strahlen, die in derselben Beziehung stehen 104. 223.

Zugkraft 1. 116 ff.
Zusammensetzung von Collineationen 131. Zus. endlicher Bewegungen 8. 9. 177 (vgl. Parametergruppe d. B.). Zus. von Bewegungen und Umlegungen 182; von Dynamen u. infinitesimalen Bewegungen 116—121.

531.1 S933

a39001 006967130b

/
3